Integral

Integration durch Substitution

$$F(u(x)) = \int F'(u) * u'(x)\, dx$$

Beispiel: $\int \cos(x^2) * x \; dx$

1. Substitutionsgleichung für x wählen

$$u(x) = x^2$$

2. Substitutionsgleichung für dx

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{u\prime(x)}$$

$$u'(x) = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

3. Substitution einsetzen, dabei muss eine unbekannte gekürzt werden können, sonst funktioniert es nicht.

$$\int \cos(u) * x\, \frac{du}{2x} = \int \cos(u)\, \frac{du}{2}$$

$$= \int \frac{\cos(u)}{2}\, du$$

Bei bestimmtem Integral muss u(x) auch auf die Grenzen angewendet werden.

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos(x^2) * x\, dx = \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi/2})} \frac{\cos(u)}{2}\, du$$

4. Integration in u

$$\int \frac{\cos(u)}{2}\, du = \frac{1}{2}\int \cos(u)\, du = \frac{1}{2}\sin(u) + C$$

5. Rücksubstitution bei unbestimmtem Integral

$$\frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

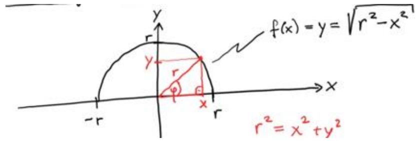
Mittelwert

$$\frac{1}{b-a} * \int_a^b f(x)dx$$

Bogenlänge

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Kreisfunktion



Vol. Rotationskörpers

$$\pi * \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Mantelfläche

$$2\pi * \int_a^b f(x) * \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Massenträgheitsmoment

$$J_x = \frac{1}{2}\pi\varrho \cdot \int_a^b y^4\, dx = \frac{1}{2}\pi\varrho \cdot \int_a^b [f(x)]^4\, dx$$

$$J_y = \frac{1}{2}\pi\varrho \cdot \int_c^d x^4\, dy = \frac{1}{2}\pi\varrho \cdot \int_c^d [g(y)]^4\, dy$$

Schwerpunkt Vol.

$$x_S = \frac{\pi}{V}\int_a^b x \cdot f(x)^2\, dx$$

Partielle Integration

$$\int (u'(x) * v(x)) * dx = u(x) * v(x) - \int (u(x) * v'(x)) * dx$$

$$\int_a^b (u'(x) * v(x)) * dx = [u(x) * v(x)]_a^b - \int_a^b (u(x) * v'(x)) * dx)$$

Faustregel

- v Polynome ($x^n + \dots + c$), $\ln(x)$ — Ableitung ($v \to v'$)
- u' Exp- ($e^x, \dots$) / Trigo-Funktionen ($\sin(x), \dots$) — Integration ($u' \to u$)

Für v sollte der Faktor verwendet werden, der durch eine Ableitung vereinfacht werden kann.

$$\int (\ln(x) \cdot x^2)dx$$

$$\int \underbrace{(x^2 \cdot \ln(x))}_{u' \cdot v} \cdot dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} \cdot \ln(x)}_{u \cdot v} - \int \underbrace{\left(\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\right)}_{u \cdot v'} dx$$

$$\frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \left(\frac{x^2}{3}\right) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} = \ln(x) - \frac{2x^3}{9}$$

Rechenregeln

$$a * \int f(x)dx = \int a * f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm d(x)) = \int f(x) \pm \int d(x)$$

$$\int \frac{1}{x^n} = -\frac{1}{(n-1) * x^{n-1}}$$

$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a \rvert$	
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b}\ln\left\lvert \frac{x-a}{x-b} \right\rvert$	$(a \neq b)$
$\frac{1}{(x-a)^2}$	$-\frac{1}{x-a}$	
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$	$(\lvert x \rvert > \lvert a \rvert)$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}$	$(\lvert x \rvert < \lvert a \rvert)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}$	
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2} \rvert$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2} \rvert$	
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$	
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$	
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	

f'(x) | F(x)

$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2} \rvert$

$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert \tan\frac{x}{2} \right\rvert$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{1+\sin x}$	$\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{1}{1-\sin x}$	$-\cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a \rvert$	
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b}\ln\left\lvert \frac{x-a}{x-b} \right\rvert$	$(a \neq b)$
$\frac{1}{(x-a)^2}$	$-\frac{1}{x-a}$	
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$	$(\lvert x \rvert > \lvert a \rvert)$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}$	$(\lvert x \rvert < \lvert a \rvert)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	

$\sin x$	$-\cos x$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert \tan\frac{x}{2} \right\rvert$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{1+\sin x}$	$\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{1}{1-\sin x}$	$-\cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

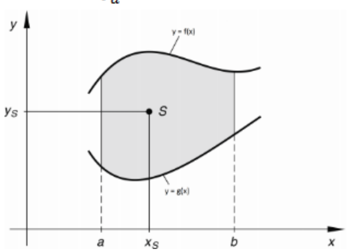
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}$
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2} \rvert$

Schwerpunkte von Flächen

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot dx$$

$$x_s = \frac{1}{A}\int_a^b \left(x \cdot (f(x) - g(x))\right) \cdot dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) \cdot dx$$



Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen von N(x) bestimmen und Bruch zuordnen:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)(x - x_2)}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2} + \cdots$$

2. f(x) gleich mit der Summe der Brüche setzen
3. Konstanten bestimmen, x einsetz. damit ein Bruch =0
4. Einsetzen in ursprüngliche Gleichung

Nullstellenform im Zähler

$$\frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Zuordnung eines Partialbruchs zu jeder Nullstelle

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)(x-2)}$$

Koeffizienten bestimmen

$$x + 1 = A(x-2)(x-2) + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1)$$

$$A = 2, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = 3$$

Einsetzen in ursprüngliche Gleichung

$$\frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x-2)}$$

Integral zu berechnen (*nicht teil des Verfahrens*)

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

Uneigentliche Integrale

Erste Art

$$\int_a^{\infty} f(x)\cdot dx\,, \quad \int_{\infty}^{b} f(x)\cdot dx\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot dx\,, \quad (f(x)\text{: stetig})$$

Integration über $[a,\lambda]$

$$I=\int_a^{\infty} f(x)\cdot dx\,, \qquad I(\lambda)=\int_a^{\lambda} f(x)\cdot dx$$

Grenzübergang $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$

$$I=\int_a^{\infty} f(x)\cdot dx=\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_a^{\lambda} f(x)\cdot dx\right)$$

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$ existiert, heisst das Integral $\int_a^{\infty} f(x)\cdot dx$ *konvergent*, sonst *divergent*.

Beispiel

$$I=\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx$$

Integration über $[1,\lambda]$

$$I(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx=\left|\left(-\frac{1}{x}\right)\right|_1^{\lambda}=-\frac{1}{\lambda}+1$$

Grenzübergang $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$

$$I(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_1^{\lambda}\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx\right)=\lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}+1\right)=1$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$ existiert $\to$ *konvergent*

Reziprokenregel (Kehrwertregel) anwenden:

$$\left[\frac{1}{u(x)}\right]'=-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

Potenzregel anwenden:

$$[u(x)^n]'=n\cdot u(x)^{n-1}\cdot u'(x)$$

Beachte: Hier wurde die Kettenregel angewendet: Multipliziere mit der inneren Ableitung $u'(x)$.

$$[\ln(u(x))]'=\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\ln(\ln(x))\cdot\frac{\lambda}{\ln(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\ln(x))\cdot\frac{\lambda}{\ln(x)}}$$

Mantelfläche um y Achse

Bei Rotation um die y-Achse:

$$M_y=2\pi\int_{\min[f(a),f(b)]}^{\max[f(1),f(b)]} x\cdot\sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

Zweite Art

Vorgehen zur Berechnung $f(x)$, mit Pol bei $x=a$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

Integration über $[a+\epsilon,b]$

$$I(\epsilon)=\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\cdot dx=\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)=\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\cdot dx\right)$$

Beispiel

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx$$

$$\int_{0+\epsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx=\left|2\sqrt{x}\right|_{\epsilon}^{1}=2-2\cdot\sqrt{\epsilon}$$

Im Grenzübergang $\epsilon\to 0$ ergibt sich

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx=\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{0+\epsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx\right)=\lim_{\epsilon\to 0}(2-2\sqrt{\epsilon})=2$$

Taylorreihen

Quotientenkriterium

Erfüllen die Glieder einer unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a \neq 0$ für alle n die Bedingung: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$ ist Reihe konvergent, wenn > 1 dann divergent

$O(x^{n+1})$

Alles später ist zusammen höchstens x^{n+1} => Sehr klein mit grosen n

Konvergenzbeweis

Zerlegen in Partialbrüche und Partialsumme kürzen

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + B * n}{n(n+1)}$$

$1 = A(n+1) + B * n \,;\, n = 0 \Rightarrow A = 1; n = -1 \Rightarrow B = -1$

Somit zerlegt = $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow$ Partialsumme $\quad S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1}$$

(Teleskopsumme)

Summenwert $\quad S = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\to 0}\right) = \underline{\underline{1}}$

Somit konvergiert zu 1.

Taylorpolynom bestimmen

Taylorpolynom *n-ter* Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

Vorgehen

1. *n-te* Ableitung berechnen
   $f^{(n)}(x) = \cdots$
2. x_0 in Ableitungen einsetzen
   $f^{(n)}(x_0) = \cdots$
3. Vorfaktoren $a_0 - a_n$ bestimmen
   $a_n = \frac{f^{n}(x)}{k!}$
4. Taylorreihe $t_f(x)$ bestimmen

$t_f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + a_n \cdot (x - x_0)^n$

$f(x) = e^x$ Jede Ableitung ist e^x und somit mit x = 0 auch 0

$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$

$\Rightarrow e^x = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Das Taylor-Polynom dritten Grades ist:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

x^n *noch* $-x_0$ *wenn* x_0 *nicht* $= 0$

Potenzreihen im Konvergenzbereich

Ist sie eine stetige Funktion. Man darf wie mit Summen rechnen sowie Polynomdivision. Ableitung und Integration ist möglich. Koeffizientenvergleich möglich. Bei mehreren Reihen die Schnittmenge nehmen.

Rechnen: $P_1 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3); P_2 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$

$$P_1(x) + P_2(x) = (1+1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + O(x^3)$$

$$P_1(x) * P_2(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + O(x^3)\,;\, Alles\ mit > x^3 ersetzt\ O(x^3)$$

Taylorreihe

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

x_0: Entwicklungszentrum oder Entwicklungspunkt

Wenn =0 ist es die Maclaurinsche Reihe

Regel von Bernoulli-de l'Hospital

Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Vorgängige Umformungen

- $0 \cdot \infty \qquad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
- $\infty - \infty \qquad f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{0}{0} \overset{BH}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{1}\right) \to x = 0: \frac{e^0}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 3x + 7}\right) = \frac{\infty}{\infty} \overset{BH}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{4x + 3}\right) \to x = \infty: \frac{1}{2}$$

Potenzreihen

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k * x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k - x_0)^k$$

a = Koeffizienten, x = Entwicklungspunkt

Konvergenzbereich: Menge von X bei der die Reihe konvergiert, 0 ist immer drin. Bereich ist immer ein symmetrisches Intervall zum 0 Punkt

$$I = (x_0 - p, x_0 + p)$$

Konvergenzradius p:

$$p = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

|x| < r = konvergiert

|x| > r= divergiert

Für die obere zweite Variante $x - x_0$

Bsp.: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad a_k = \frac{1}{k!}, \quad a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$

$\Rightarrow r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{1}\right|$

$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot (k+1)}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}}\right| = \lim_{k\to\infty}|k+1| \longrightarrow \infty$

Diese Reihe konvergiert für alle x

Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k = \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \mp \cdots$

Substitution: $u = x - 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot u^k \qquad \Rightarrow a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \; a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+2}}{k+1}$

$\Rightarrow r_u = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \frac{(k+1)}{(-1)^{k+2}}\right|$

$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} \cdot \frac{(1 + \overbrace{1/k}^{\to 0})}{1}\right| = 1$

Für u wieder x einsetzen, heisst Reihe konvergiert für |x-1| < 1

Bsp.: $\sum_{k=0}^{\infty} (2x-1)^k$ (ist nicht in der verlangten Form $\to$ Substitution: $u = 2x-1$)

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u^k \qquad \Rightarrow a_k = 1, \; a_{k+1} = 1$

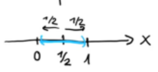
$\Rightarrow r_u = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 1$

$\Rightarrow$ konvergiert für alle $|u| < 1$

$\Rightarrow$ konvergiert für alle $|2x-1| < 1$

$\Rightarrow$ Betragsungleichung nach x auflösen:

$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$



$\Rightarrow$ konvergiert für $\underline{\underline{x \in (0,1)}}$

Restglied

Für die Abschätzung des Fehlers bzw. Restglieds

$$R_n(x) = f(x) - p_{n(x)}$$

Es gibt ein ξ zwischen x_0 und x, so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_{n(x)}| \le \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Beispiel

Fehler bei Approximation von $f(x) = e^x$ durch $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ im Intervall $[0, 1]$

$$R_3(x) = |f(x) - p_3(x)| \le \frac{f^4(\xi)}{4!} \cdot (1-0)^4$$

$$\le \frac{e^\xi}{24} \le \frac{e}{24} \approx 0.113$$

$$x = 1 : e^1 = 2.71828\ldots$$

$$p_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \approx 2.667 \rightarrow \Delta = 0.0516\ (< 0.113)$$

$$\boxed{f_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

und für das Restglied $R_n(x)$ gilt dann:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad x_0 < \vartheta < x}$$

Eine Funktion $f(x)$ ist unter den folgenden Bedingungen in eine MacLaurin- bzw. Taylor-Reihe entwickelbar:

1) $f(x)$ ist beim Entwicklungspunkt (0 bzw. x_0) beliebig oft differenzierbar.
2) Es gilt: $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

Wird besser desto grösser n und x näher am Entwicklungspunkt ist. Denn Beim Entwicklungspunkt ist es 0

Binominal Reihe

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{k} x + \binom{\alpha}{k} x^2 + \binom{\alpha}{k} x^3 \ldots \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{k} x + \binom{n}{k} x^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^n$$

Beispiel

$$\alpha = \frac{1}{2} : a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (a-1) \cdot (\alpha - 2) \cdot (\alpha - 3) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}$$

$$a_0 = \binom{0.5}{0} = 1$$

$$a_1 = \binom{0.5}{1} = \frac{\alpha}{k!} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \binom{0.5}{2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{k!} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$a_3 = \binom{0.5}{3} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)}{k!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} = \frac{1}{16}$$

MacLaurin Reihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \ldots$$

Funktion	1. Näherung	2. Näherung
e^{-x}	$1 - x$	$1 - x + \frac{1}{2}x^2$
a^x	$1 + (\ln a)\, x$	$1 + (\ln a)\, x + \frac{(\ln a)^2}{2} x^2$
$\ln(1+x)$	x	$x - \frac{1}{2}x^2$
$\ln(1-x)$	$-x$	$-x - \frac{1}{2}x^2$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2x$	$2x + \frac{2}{3}x^3$
$\sin x$	x	$x - \frac{1}{6}x^3$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2}x^2$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$
$\tan x$	x	$x + \frac{1}{3}x^3$
$\arcsin x$	x	$x + \frac{1}{6}x^3$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3$
$\arctan x$	x	$x - \frac{1}{3}x^3$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3$
$\sinh x$	x	$x + \frac{1}{6}x^3$
$\cosh x$	$1 + \frac{1}{2}x^2$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$
$\tanh x$	x	$x - \frac{1}{3}x^3$
$\operatorname{arsinh} x$	x	$x - \frac{1}{6}x^3$
$\operatorname{artanh} x$	x	$x + \frac{1}{3}x^3$

Umformen für BH

Funktion $\varphi(x)$	Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \varphi(x)$	Elementare Umformung
(A) $u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ bzw. $\frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
(B) $u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x) \cdot v(x)}}$
(C) $u(x)^{v(x)}$	$0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$	$e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$

}f(x)
}g(x)

$$\rightarrow e^{\underbrace{v(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln(u(x))}_{\to -\infty}} = e^{\left(\frac{\ln(u(x))}{\frac{1}{v(x)}}\right)}$$

Bsp.: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow$ Typ "$\frac{0}{0}$"

$$\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Bsp.: $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(2x-1)}{e^x} \rightarrow$ Typ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln(2x-1))'}{(e^x)'} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2x-1} \cdot (2)}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{(2x-1) \cdot e^x} = \underline{\underline{0}}$$

Bsp.: $\lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{u} - \underbrace{\frac{1}{\sin(x)}}_{v}\right) \rightarrow$ Typ "$\infty - \infty$"

$$\overset{\text{Umformung (B)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)} \rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x) - x)'}{(x \cdot \sin(x))'} \overset{\text{Produktregel}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cdot \cos(x)} \rightarrow \text{Typ "}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\cos(x) - 1)'}{(\sin(x) + x \cdot \cos(x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{\underbrace{\cos(x) + \cos(x)}_{\to 1+1} - \underbrace{x \cdot \sin(x)}_{\to 0}} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

Differentialgleichungen

Definition

DGL in n-ter Ordnung: $F(x, y', y'', y^n) = 0$

Explizit: nach y^n aufgelöst $y^n = G(x, y', y^{n-1})$

Implizit: nicht explizit

Allgemeine Lösung: Menge aller Lösung von DGL

Spezielle/Partikuläre Lösung: Lösung des Anfangswertproblems

Unbestimmtes Integral: Das Richtungsfeld ist unabhängig von y

Autonome DGL: Das Richtungsfeld ist unabhängig von x

Separierbar DGL

$$\frac{dy}{dx} = y' = g(x) * h(y)$$

1. Alle x und y Terme auf Seiten verschieben: $\frac{1}{g(y)}dy = h(x)dx$
2. Beide Seiten Integrieren: $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)\,dx$
3. Wenn möglich explizit lösen

Beispiel: $\frac{dy}{dx} = y * e^x$

1. $\frac{1}{y}dy = e^x dx$ 2. $\int \frac{1}{y}dy = \int e^x\,dx \Rightarrow \ln(y) = e^x + C$

3. $y = e^{e^x} * e^C$

Beispiel 2: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

1. $y * dy = -x * dx$ 2. $\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 + C_1 = \frac{1-}{2}x^2 + C_2$

3. $y^2 = -x^2 + 2C \Rightarrow y = \pm\sqrt{K - x^2}$

Konstante Lösung

Falls $f(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine *konstante Lösung der autonomen DGL* $y' = f(y)$. Um die konstante Lösung der DGL zu finden, müssen wir die Gleichung $f(y) = 0$ lösen.

- Stabil — Benachbarte Lösungen werden *angezogen*
- Instabil — Benachbarte Lösungen werden *abgestossen*
- Semi-Stabil — *Anziehung* auf einer, *Abstossung* auf der anderen Seite

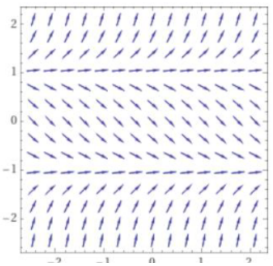
Beispiel

$$y' = y^2 - 1$$

- $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \to y = 1$: *Konstante Lösung*
- $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \to y = -1$: *Konstante Lösung*

Werte in der Nähe der *Konstanten Lösung* einsetzen

- $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
- $f(1.5) = (1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $\boldsymbol{f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \to}$ ***Instabil***
- $f(0.5) = (0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $f(0) = (0)^2 - 1 = -1$
- $f(-0.5) = (-0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $\boldsymbol{f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \to}$ ***Stabil***
- $f(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$



Beispiel DGL

Differentialgleichung (DFG): $y' = x + y$

Lösung zu prüfen: $y_1 = e^x - 1$

- Linke Seite LS $\quad y' = (e^x - 1)' = e^x$
- Rechte Seite RS $\quad x + y = x + (e^x - 1)$

$LS \neq RS \to$ *Keine Lösung der DFG*

Lösung zu prüfen: $y_2 = -x - 1$

- Linke Seite LS $\quad y' = (-x - 1)' = -1$
- Rechte Seite RS $\quad x + y = x + (-x - 1) = -1$

$LS = RS \to$ *Lösung der DFG*

Beispiel 2 AWP

$$AWP: \begin{cases} y' = x - 4 \\ y(2) = 9 \end{cases}$$

$$y = \int (x - 4) \cdot dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

$$y(2) = 2 - 8 + C = 9 \to C = 15$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$$

Lineare ODE

$$y'(x) + p(x) * y(x) = g(x)$$

Y darf nur hoch 1 vorkommen und darf nicht selbst von y abhängig sein, dann ist die Gleichung linear in Y. p und g dürfen nur von x abhängig sein. Dann kann so gelöst werden:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} * \left(\int u(x) * g(x)dx\right) ; u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Beispiel: $t * \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 2y(t) = t^2 - t + 1 ; y(1) = \frac{1}{2}$

Beide Seiten durch t dividieren:

$$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{y'(t)} + \underbrace{\frac{2}{t}}_{p(t)} \cdot \underbrace{y(t)}_{} = \underbrace{t - 1 + \frac{1}{t}}_{g(t)}$$

linear in y

$$\Rightarrow \mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\int \frac{1}{t}dt} = e^{2 \cdot \ln(|t|)}$$

$$\Rightarrow \mu(t) = e^{\ln(|t|) \cdot 2} = \left(e^{\ln(|t|)}\right)^2 = (|t|)^2 = t^2$$

Potenz-Regel

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t) \cdot g(t)\,dt + C\right)$$

$$= \frac{1}{t^2} \cdot \left(\int t^2\left(t - 1 + \frac{1}{t}\right)dt + C\right)$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(\int (t^3 - t^2 + t)dt + C\right)$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C\right.$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2}$$

allgemeine Lösung

Anfangswertproblem

Finden einer Lösung, welche die Anfangsbedingung erfüllt.

DGL: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ AB: $y(t_0) = y_0$

Beispiel: $\frac{dy}{dt} = 3y$ AB: $y(0) = 2$

Lösung der DGL ergibt: $y = e^C * e^{3t}$

Jetzt muss $2 = e^C * e^{3*0}$ ergeben.

Somit ist die Lösung des DGL mit AB: $y(t) = 2 * e^{3t}$

Randwertproblem

Bei DGL von 2. Ordnung Wie AB Problem jedoch mit 2 Werten/Rändern:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) &= 0 \qquad (a < x < b) \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{cases}$$

Beispiel: $y''(x) = -y(x)$ AB: $y(0) = 0\ und\ y(\pi) = 0$

Lösung von DGL ist: $y(x) = A * \cos(x) + B * \sin(x)$

Jetzt A und B bestimmen mit RW. Damit folgt A = 0 und B = belieb und das DGL mit RW zu lösen.

Analytische Verfahren

Die Allg. Lösung der inhomogenen DGL

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Ist gegeben durch

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int \left(g(x) \cdot e^{F(x)}\right) \cdot dx$$

Wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^4}$$

DGL umformen

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\ln(x)$$

In Formel einsetzen

$$y = e^{--\ln(x)} \cdot \int \left(\frac{1}{x^4} \cdot e^{-\ln(x)}\right) \cdot dx$$

$$y = e^{--\ln(x)} \cdot \int \left(\frac{1}{x^5}\right) \cdot dx$$

Integral berechnen

$$y = e^{\ln(x)} \cdot \left(\frac{1}{-5+1}x^{5-1} + C\right)$$

$$y = x \cdot \left(-\frac{1}{4x^4} + C\right)$$

$$y = -\frac{1}{4x^3} + C \cdot x$$