LGS und Matrizen

lineare Gleichung: Unbekannte x kommt nur in der ersten Potenz vor (=> x^1, NICHT x^2)

Wenn mehrere Unbekannte:

Anz. Unbekannte > Anz. Gleichungen => keine eindeutige Lösung

Lineares Gleichungssystem (LGS):

m lineare Gleichungen mit **n** Unbekannten

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}\right\}$$

Äquivalentes LGS = LGS mit gleicher Lösungsmenge

Spaltenvektor (hoch)

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \quad & \mathbf{a}^n \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

Zeilenvektor (tief)

=> Matrix vom Typ m x n (Zeilen x Spalten)

Matrizen können **transponiert** werden.

-> Spalten werden zu Zeilen (und umgekehrt)

Operationen:

Addition:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$
—> Subtraktion gleich

Matrix **mal Konstante:**

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

Jede Komponente mit der Konstante multiplizieren

Matrix **mal Vektor:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

- Resultat ist ebenfalls ein Vektor!
- Summe von „Zeile (Matrix) mal Spalte (Vektor)" <- komponentenweise

-> Vektor transponiert: Spalte (Matrix) mal Zeile (Vektor) **=>** (Zeilenvektor)

- Vektor und Matrix können auch vertauscht werden

Matrix **mal Matrix:**

- x-te Zeile mal y-te Spalte = a_{xy} (wie oben komponentenweise)
- Resultat: Anz. Zeilen durch 1. Matrix definiert, Anz. Spalten durch 2. Matrix definiert
- Nicht kommutativ -> Können NICHT vertauscht werden! (In der Regel

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Rechenregeln:

Sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix, C eine $p \times q$-Matrix, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3 x 4   4   2   2 x 1

- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$; assoziativ
- $A \cdot \alpha \cdot B = \alpha \cdot A \cdot B$;   m x n   n x n
- Ist I die Einheitsmatrix passender Ordnung, so gilt $A \cdot I = A$, bzw. $I \cdot A = A$. m x m

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \quad => \quad (A|\ \vec{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Koeffizientenmatrix, Spaltenmatrix, rechte Seite => erweiterte Koeffizientenmatrix

Homogenes LGS: $A \times \vec{x} = \vec{0}$

Zeilenstufenform:

- Nullzeilen sind zuunterst
- Nicht-Nullzeile => führende Zahl eine 1
- Weiter unten stehende führende 1 muss weiter rechts sein
- Zusatz **Reduziert**: Spalten mit führenden 1 haben sonst nur Nullen

—> $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \lambda \\ x_4 = \mu \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 2\lambda - 3\mu + 5 \\ x_3 = -\mu + 3 \end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ 0 + \lambda \\ 3 \quad -\mu \\ 0 \quad +\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parameter-Darstellung ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

1 führende Einsen

führende Unbekannte: x1, x3

freie Unbekannte: x2, x4

Gauss-Jordan-Verfahren

1. Wir bestimmen die am weitesten links stehende Spalte mit Elementen $\neq 0$. Wir nennen diese Spalte die *Pivot-Spalte*.
2. Ist die oberste Zahl in der Pivot-Spalte $= 0$, dann vertauschen wir die erste Zeile mit der obersten Zeile, die in der Pivot-Spalte ein Element $\neq 0$ hat.
3. Die oberste Zahl in der Pivot-Spalte ist nun eine Zahl $a \neq 0$. Wir dividieren die erste Zeile durch a. So erhalten wir die führende Eins.
4. Nun wollen wir unterhalb der führenden Eins lauter Nullen erzeugen. Dazu addieren wir passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen.

Wir lassen nun die erste Zeile aussen vor und wenden die ersten vier Schritte auf den verbleibenden Teil der Matrix an. Dieses Verfahren wiederholen wir so oft, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.

5. Nun arbeiten wir von unten nach oben und addieren jeweils geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen. optional => reduzierte Form

Mit Jordan können Lösungen direkt abgelesen werden.
Ohne Jordan kann via Rücksubstituierung die Lösung gefunden werden.

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\ \vec{c})$.
Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** gilt: $\mathrm{rg}(A) = n$.
Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $\mathrm{rg}(A) < n$.

rg(A) = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeihlen (=> Zeilen mit führender 1)
Nur in Zeilenstufenform!

Vektorengeometrie

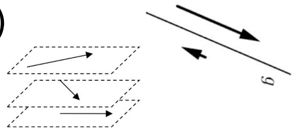
Objekt mit Betrag (Länge) und Richtung -> $\vec{v}, \overrightarrow{PQ}, |\vec{v}| = Betrag$ Komponenten: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Gleicher Betrag und gleiche Richtung = gleicher Vektor
Nullvektor $\vec{0}$: Länge Null
Einheitsvektor (normiert) $\vec{e}$: Länge 1($\vec{a} \times 1/a$)
Gegenvektor: negative Richtung

(1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	(2) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
(3) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	(4) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$	(4) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$	*Assoziativ-Gesetz*
(2) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$	(5) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$	*Distributiv-Gesetz*
(3) $(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (-\vec{a})$	(6) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$	*Distributiv-Gesetz*

Linearkombination: Summe von Produkten von Skalaren und Vektoren: $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$
Kollinear: Vektoren sind parallel (Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear)
-> Vektoren sind dann Vielfachen voneinander
Komplanar: Es gibt eine Ebene, zu der alle Vektoren parallel sind.



X NICHT-komplanare Vektoren können jeden Vektor in R^X abbilden (Linearkombination)
Ortsvektor: Am Ursprung angeheftet (nur dann heissen die Komponenten Koordinaten!)

Addition	Skalare Multiplikation	Gegenvektor
$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$	$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$	$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

Betrag Vektor Ebene: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ Betrag Vektor Raum: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Skalarprodukt: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi)}$ —> ist Null, wenn Winkel zwischen Vektoren 90° ist.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

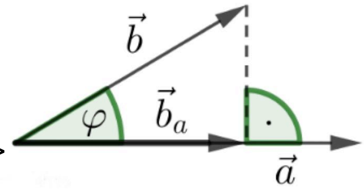
Kommutativ-Gesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\quad (a \cdot b) \cdot c \neq a \cdot (b \cdot c)$

Distributiv-Gesetze: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

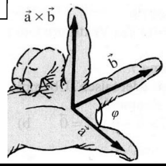
$$cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$ —> φ = arccos(...)

orthogonale Projektion: $\boxed{\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad |\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}}$ —>



Vektorprodukt: —> =

Fläche von aufgespanntem Parallelogramm durch Vektoren



a: Daumen
b: Zeigefinger

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\varphi)$

$\vec{a} \times \vec{b}$ **ist orthogonal zu** $\vec{a}$ **und zu** $\vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{array} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 - 6 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Antikommutativ-Gesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Distributiv-Gesetze: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

Das normale *Assoziativ-Gesetz* gilt im Allgemeinen nicht: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Gerade:

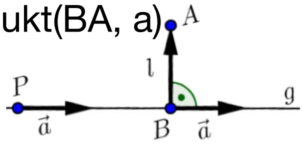
Parameterdarstellung: $\boxed{g : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} \quad P = Aufpunkt, \;\; \vec{a} = \overrightarrow{PQ} = Richtungsvektor}$

-> Punkt liegt auf g, wenn es ein λ gibt, für das das LGS aufgeht

		Gibt es einen **gemeinsamen** Punkt?	
		Ja	Nein
sind die Richtungsvektoren **kollinear**?	Ja	identisch	echt parallel
	Nein	schneidend	windschief

Abstand zu Gerade:

- via Fusspunkt: B allgemein berechnen ->Vektorprodukt(BA, a)
- via Parallelogramm (PA × a) / |a|
- via Projektion PA auf g = PB -> PA - PB



Koordinatendarstellung: g: ax + by + c = 0 -> $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu g

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b\lambda \\ c + d\lambda \end{pmatrix}$$

Parameter -> Koordinate: Gleichung mit x und y aufstellen, λ eliminieren

Koordinaten -> Parameter: zwei beliebige Punkte: aus x, y bestimmen: Aufpunkt+Richtung

Ebene:

Parameterdarstellung: $\boxed{E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \quad P = Aufpunkt, \;\; \vec{a} \; und \; \vec{b} \; Richtungsvektoren}$

-> Punkt liegt auf E, wenn es ein λ und μ gibt, für die das LGS aufgeht

Koordinatendarstellung: ax + by + cz + d = 0 -> (a | b | c) ist orthogonal zu E (normale)

Parameter -> Koordinate: LGS mit x, y, z aufstellen, λ und μ eliminieren (wie oben^)

Normierte Koordinatendarstellung: Werte a, b,c sind so, dass $|\vec{n}| = 1$ (d auch anpassen)

Parameter -> Koordinate (V2): $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} -> a, \, b, \, c \; gegeben \; -> via \; Aufpunkt \; d \; berechnen$

Koordinaten -> Parameter: gleich wie in 2D! ^

Lage zweier Ebenen: *Identisch* -> a,b,c,d jeweils Vielfachen voneinander (gleicher Faktor)

Parallel: kollineare Normalenvektoren, sonst: eine *Schnittgerade*

Spezielle Lagen: parallel zur (x/y/z) Ebene $\vec{n}$ hat dort zwei Nullstellen (Achse: an der Stelle)

Abstand zu Ebene: Punkt A = (x_A, y_A, z_A) und Ebene: ax + bx + cz + d (Nenner = $|\vec{n}|$)

$$l = \frac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}}$$

wenn Koord.darstellung normiert |d| = Abstand zum Ursprung

sonst: $|d| / |\vec{n}|$

Quadratische Matrizen -> = gleich viele Spalten wie Zeilen (m=n)

- Diagonalmatrix: Alle Elemenete ausserhalb Hauptdiagonale = 0
- Einheitsmatrix: Diagonalmatrix mit Diagnonale 1
- Obere Dreiecksmatrix: (alle Elemente unterhalb Diagonale = 0)
- Untere Dreiecksmatrix: (alle Elemente oberhalb Diagonale = 0)
- Symmetrische Matrix: symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

-> AE = EA = A (E = Einheitsmatrix)

->$A^0 = E,\ A^k = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A\ (k\ Faktoren)$

Rechnen mit Matrizen - **Regeln**

$X \cdot A + X \cdot B = X \cdot (A + B)$, $aber\ X \cdot A + X \cdot B \neq (A + B) \cdot X!!!$

$2 \cdot X + A \cdot X \neq (2 + A) \cdot X!!!$, sondern: E einbauen -> $2 \cdot X + A \cdot X = 2 \cdot E \cdot X + A \cdot X = (2 \cdot E + A) \cdot X$

Inverse Matrizen

Definition: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Inverse einer 2 x 2 Matrix: —> $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

regulär = invertierbar
singulär = nicht invertierbar

Regeln: $(A^{-1})^{-1} = A$, $\quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, $\quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

LGS lösen: $A \cdot \vec{x} = \vec{c}\ \ => A^{-1} \cdot \vec{c} = \vec{x}$

Inverse 3x3 Matrizen(empfohlen statt allgemeine Lösung)-> Lösungsweg: nächstes Kapitel

Allgemeine Lösung: erweiterte Koeffizienten-Matrix auflösen:

$[A \,|\, I] = \begin{pmatrix} a & b & c & | & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & | & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -> Gauss-Jordan-Verfahren -> $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & r & s & t \\ 0 & 1 & 0 & | & u & v & w \\ 0 & 0 & 1 & | & x & y & z \end{pmatrix}$

Determinanten

- 2x2 Matrix: det(A) = $a \cdot d - b \cdot c$
- 3x3 Matrix: $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
  -> etwas schöner grafisch:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$
$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

- Damit kann man nun ebenfalls die Inverse einer 3x3 Matrix bestimmen:

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$ (adj = adjunkte der Matrix)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} => adj(A) = \begin{bmatrix} +\det\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\det\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\det\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\det\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\det\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\det\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

Zielelement abdecken => 2x2 Matrix der übrigen Elemente -> Determinante … Transponieren

$$= \begin{bmatrix} (ei - fh) & (fg - di) & (dh - eg) \\ (ch - bi) & (ai - cg) & (bg - ah) \\ (bf - ce) & (cd - af) & (ae - bd) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (ei - fh) & (ch - bi) & (bf - ce) \\ (fg - di) & (ai - cg) & (cd - af) \\ (dh - eg) & (bg - ah) & (ae - bd) \end{bmatrix}$$

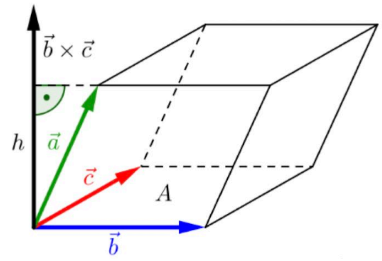
Allgemeine Berechnung der Determinante nach Laplace (auch > 3x3):

1. Eine beliebige Zeile/Spalte wählen (Vorzugsweise eine Spalte mit *vielen Nullen!*)
2. Elemente der Reihe sind Faktoren mit $(-1)^{i+j}$ als Vorzeichen (i = Zeile, j = Spalte) ↴
3. Element mal Determinante der Matrix (n-1 x n-1) die entsteht, wenn man die Zeile und Spalte des entsprechenden Elements zuhält
4. Wenn kleinere entstandene Matrizen grösser als 3x3 / 2x2: goto Schritt 1

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Wiederhole die Schritte solange bis man det() direkt berechnen kann

Betrag der Determinante = Fläche/Volumen/etc. des aufgespannten Körpers der Spaltenvektoren der Matrix = Spat Bsp.: (3x3) ->



Wichtige Eigenschaften der Determinante

(1) Für die Einheitsmatrix E gilt: $\det(E) = 1$

(2) Für jede $n \times n$ -Dreiecksmatrix U gilt: $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$

(3) Für jede quadratische Matrix A gilt: $\det(A^T) = \det(A)$

(4) Für alle $n \times n$ -Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(5) Für jede invertierbare Matrix A gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(6) Für jede $n \times n$ -Matrix A und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

- 2x2: $det(A) = 0$ --> $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *kollinear*
- 3x3: $det(A) = 0$ --> $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *komplanar*

Lineare Unabhängigkeit: $0 \cdot \vec{a_1} + 0 \cdot \vec{a_2} + 0 \cdot \vec{a_3} + \ldots + 0 \cdot \vec{a_k}$ ist die **einzige** Lösung, um den Nullvektor zu bekommen, sonst -> linear abhängig

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS

Für eine quadratische $n \times n$ -Matrix A sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\det(A) \neq 0$

(2) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(3) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(4) $\mathrm{rg}(A) = n$

(5) A ist invertierbar.

(6) Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.

Vektorräume

Definition Reeller Vektorraum: Menge V (≠∅) mit:

- Addition: $+ : V \times V \to V : (\vec{a}; \vec{b}) \to \vec{a} + \vec{b}$
  -> Zwei Vektoren addiert sind immer noch in V
- skalare Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V : (\lambda, \vec{a}) \to \lambda \cdot \vec{a}$
  -> Vektor mal Skalar ist immer noch in V

Zusatz:

Für einen Vektorraum V gilt:

(1) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ für jeden Vektor $\vec{a} \in V$.

(2) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ für jeden Vektor $\vec{a} \in V$.

Unterraum: Teilmenge U ≠∅ eines Vektorraums mit gleichen Bedingungen wie Vektorraum: Addition und skalare Multiplikation

-> Der Nullvektor muss also in jedem Unterraum vorhanden sein!

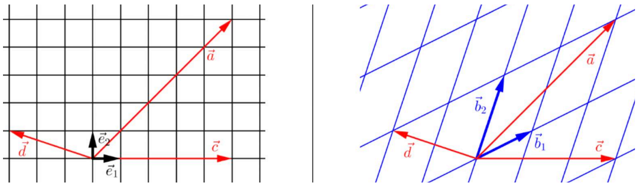
-> Somit ist der *Nullvektorraum* auch immer ein Unterraum von V

Linearer Spann / Lineare Hülle

- Die Menge aller Linearkombinationen aus einer Menge Vektoren aus einem Vektorraum

Basis und Dimension

Statt den bekannten Vektoren (1,0) und (0,1) können wir auch andere Vektormengen verwenden um ein Koordinatensystem zu definieren



Bedingung: jeder Vektor in V muss als EINDEUTIGE Linearkombination der Grundvektoren gebildet werden können. Und Span von den Vektoren muss V sein!

Lineare Unabhängigkeit: gleich wie Kapitel vorher!

Satz
Wir betrachten die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^m$ sowie die $m \times n$ -Matrix B, die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ nebeneinander schreiben.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(1) Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^m$.
(2) Das lineare Gleichungssystem $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$ ist für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ lösbar.
(3) Es gilt: $\mathrm{rg}(B) = m$.

Definition: Wichtige Basen
Für $\mathbb{R}^n$: Die Basis $\mathcal{S} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ heisst *Standardbasis.*
Für $\mathbb{P}_n[x]$: Die Basis $\mathcal{M} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ von $\mathbb{P}_n[x]$ heisst *Monombasis.*

Wenn Menge von Vektoren Erzeugendensystem von V + linear unabhängig = **Basis**
Anzahl Vektoren von Basis von V = Dimension (Anzahl immer konstant!) $dim(\{\vec{0}\}) = 0$

Umrechnen zwischen Komponentendarstellungen

Bsp.:
S -> B: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_B \quad \mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} \right\}_S$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_S \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_S$

B -> S: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_S \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$\underset{-①}{\overset{:2}{=}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \end{array}\right) \underset{:5/2}{\overset{-1/2 ②}{=}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & \boxed{-1} \end{array}\right)$

$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$ und $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2, \ldots,\ \vec{b}_n$
in ihrer Komponentendarstellung
bzgl. $\mathcal{S}$ einsetzen in
$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{b}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{b}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{b}_n$

Komponentendarstellung bzgl $\mathcal{S}$	Komponentendarstellung bzgl $\mathcal{B}$
$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

LGS $B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$
nach $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$ auflösen.

Lineare Abbildungen

Definition: Lineare Abbildung
Gegeben sind zwei reelle Vektorräume V und W (V und W können auch gleich sein).
Eine Abbildung $f: V \to W$ heisst *lineare Abbildung* (auch: *lineare Tranformation*), wenn für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
(1) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
(2) $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$
} die von oben
Der Vektor $f(\vec{x}) \in W$, der herauskommt, wenn man f auf einen Vektor $\vec{x} \in V$ anwendet, heisst *Bild* von $\vec{x}$.

Linearität ist die Ausnahme!
Um beweisen: für alle Vektoren/Skalare zeigen!
lineare Abbildung ≠ lineare Funktion

Matrix Lineare Abbildung: (Abbildungsmatrix)

Satz
Wir betrachten zwei endlich-dimensionale Vektorräume V mit Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1;\ \vec{b}_2;\ \ldots;\ \vec{b}_n\}$ und W mit Basis $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1;\ \vec{c}_2;\ \ldots;\ \vec{c}_m\}$. Dann gilt:
Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ lässt sich durch eine $m \times n$ -Matrix ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ darstellen:

$$(f(\vec{x}))_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} \cdot \vec{x}_{\mathcal{B}} \quad \text{für jeden Vektor } \vec{x} \in V$$

von B zu C

Die Spalten der Matrix ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ sind die Bilder der Elemente von $\mathcal{B}$ in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{C}$:

$${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \left(f(\vec{b}_1)\right)_{\mathcal{C}} & \left(f(\vec{b}_2)\right)_{\mathcal{C}} & \cdots & \left(f(\vec{b}_n)\right)_{\mathcal{C}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Beispiel:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f()]{} \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$f(\vec{b}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}_C$

$f(\vec{b}_2) = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}_C$

${}_C A_B = {}_C\begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$ (→ von B zu C)

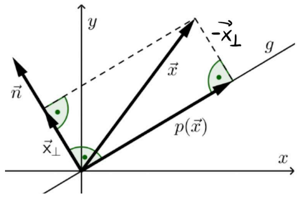
Spezielle Abbildungen:

Spiegelung an x-Achse	**Spiegelung** an y-Achse	**Punkt-spiegelung** am Ursprung	**Orthogonale Projektion** auf x-Achse	**Orthogonale Projektion** auf y-Achse	**Zentrische Streckung (Zoom)** um Faktor 0.5 in beide Richtungen	**Streckung** um Faktor 2 in x-Richtung und Faktor 0.5 in y-Richtung **(Skalierung)**	**Rotation** um Winkel φ um den Ursprung	**Scherung** in x-Richtung mit Faktor 0.5 (= alle punkte werden um 0.5 mal y parallel zur x-Achse verschoben)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Orthogonale Projektion auf eine allgemeine Gerade durch den Ursprung:

$g : ax + by = 0$

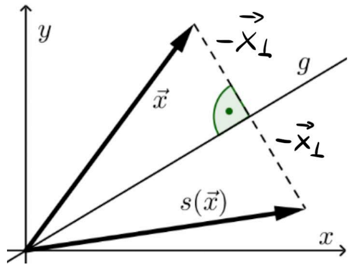
$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}}$$



Spiegelung an einer allgemeinen Geraden durch den Ursprung:

$g : ax + by = 0$

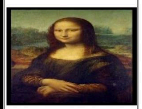
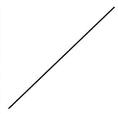
$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}}$$



$$\boxed{a^2 + b^2 = 1 \ (wenn\ nicht\ 1 : normieren!)}$$

Im Raum:

Orthogonale Projektion auf die x/y-Ebene	**Spiegelung** an der x/y-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die x-Achse	**Spiegelung** an der x-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die x/z-Ebene	**Spiegelung** an der x/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die y-Achse	**Spiegelung** an der y-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die y/z-Ebene	**Spiegelung** an der y/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die z-Achse	**Spiegelung** an der z-Achse
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

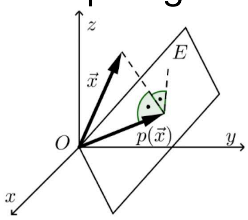
Streckung um λ_1 in x und λ_2 in y	**orthogonale Projektion** auf die Gerade $g: ax + by = 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$	**Spiegelung** an der Geraden $g: ax + by = 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$	**Rotation** um den Ursprung um Winkel φ	**Scherung** in x-Richtung mit Faktor m
				
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

zentrische Streckung mit Faktor λ: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Orthogonale Projektion auf eine allgemeine Ebene durch den Ursprung:

$E : ax + by + cz = 0$

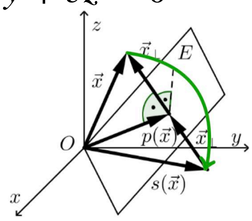
$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}}$$



Spiegelung an einer allgemeinen Ebene durch den Ursprung: $E : ax + by + cz = 0$

$$\boxed{S = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}}$$

$$= E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$



$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1 \ (wenn\ nicht\ 1 : normieren!)}$$

Rotation um Achse:

x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ y-Achse: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ z-Achse: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kern und Bild einer Abbildung:

Kern: $ker(A) = (\vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0})$

=> Alle Vektoren die auf $\vec{0}$ abgebildet werden

-> Nullvektor ist immer Element von Kern!

-> LGS lösen (z.B. Gauss-Jordan)

Bild: $im(A) = span(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n})$

=> Alle linear unabhängigen Vektoren

-> Bild finden: dim(im(A) berechnen (via Satz) und dann so viele linear unabhängige Spaltenvektoren von A auswählen.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \ldots rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{2}$

$\Rightarrow dim(im(A)) = 2 \quad \rightarrow dim(ker(A)) = 3 - 2 = 1$

Kern: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = -3x_2 + x_3 = -2\lambda \\ \rightarrow x_2 = x_3 = \lambda \\ \rightarrow \text{frei Var.}: x_3 = \lambda \end{array} \Rightarrow \left\{\lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in R\right\}$

Bild: $dim(im(A)) = 2 \Rightarrow 2$ lin. unabhängige Spaltenvektoren

$\rightarrow im(A) = \left\{\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \mu, \gamma \in R\right\}$

Satz-> **m x n Matrix A: dim(im(A)) = rg(A) und dim(ker(A)) + dim(im(A)) = n**

=> alle Punkte auf Ursprungsgerade (Kern) nun auf Nullpunkt

=> Alle Vektoren nun auf Ebene (Bild)

Verknüpfung = zwei Abbildungen hintereinander = eine grosse (direkte) Abbildung

-> $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ -> zuerst wird f auf x angewendet, danach g -> $(g \circ f) \neq (f \circ g)$

-> $Spiegeln: \ S \cdot (S \cdot x) = (S \cdot S) \cdot x = E \cdot x = x, \ \ Projektion: P \cdot (P \cdot x) = P \cdot x$

Inverse: $(g \circ f)(x) = x$ für jedes x -> die *Inverse* g macht f rückgängig (-> $B \cdot A = E, \ \ B = A^{-1}$)

Basiswechsel: -> Abbildungsmatrix

Satz

Gegeben ist ein Vektorraum V mit zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sowie eine lineare Abbildung $f: V \to V$. Dann besteht zwischen den Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$und ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}}$ folgender Zusammenhang:

$$ {}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{B}}^{-1} $$

Dabei sind die Spalten der Matrix ${}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{B}}$ die Elemente der Basis $\mathcal{B}$ in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{C}$.

Beispiel: $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad B = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S\right\}$

${}_S T_B = {}_S\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_B$ ("von B zu S"), $({}_S T_B)^{-1} = {}_B T_S = {}_B\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}_S$

${}_B A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow {}_S A_S = {}_S T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_B T_S$

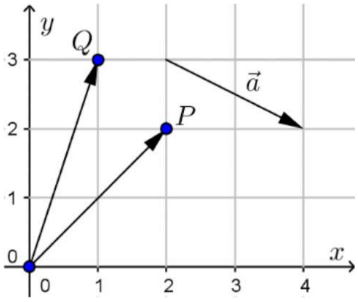
$\Rightarrow {}_S\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_B \cdot {}_B\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B \cdot {}_B\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}_S = \underline{\underline{{}_S\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_S}}$

Homogene Koordinaten:

- wird benutzt um via Umweg, Translationen auch als lineare Abbildung dargestellt werden kann

-> Jeder Vektor um eine Komponente erweitern:

- **Ortsvektor** (am Ursprung angeheftet): zusätzliche Komponente: **1**
- **Freie Vektoren** (frei parallel verschiebbar): zusätzliche Komponente: **0**



—> P = (2;2), Q = (1;3), $\vec{a}$ = (2;-1)

Erweiterungen: $\vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{r}(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erweiterungen heben sich bei Rechenoperationen wieder auf/machen keine Veränderung:

- Addition von Vektoren: $\vec{a} + \vec{b} \quad -> 0 + 0 = 0$
- skalare Multiplikation von Vektoren: $\lambda \cdot \vec{a} \quad -> \lambda \cdot 0 = 0$
- Subtraktion von Ortsvektoren: $\vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \overrightarrow{PQ}\ (Ergebnis:\ Vektor) \ -> 1 - 1 = 0$
- Addition Ortsvektor, Vektor: $\vec{r}(P) + \vec{a}\ (Ergebnis:\ Ortsvektor) -> 1 + 0 = 1\ (Ortsvektor)$

Beispiel: $\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{r}(P) + \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{r}(R)$

Abbildungsmatrix anpassen: $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (alles Nullen einsetzen, ausser 1 in der Ecke)

Translationsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ => Translation um Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Kann auch kombiniert werden mit z.B. Rotation: $\boxed{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$