Analysis 2 - ZHAW FS 2024

Integration Fortsetzung:

$$\int f(x-k)\,\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\int f(k \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

Partielle Integration: (bei Funktionsprodukt)

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}$$

für bestimmte Integrale:

$$\boxed{\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x}$$

u und v geschickt wählen! Ziel: zweites Integral soll lösbar sein
Also: kein Produkt mehr oder ein bekanntes Produkt oder auf dem Weg dahin
Tricks: Potenzen senken, bis x wegfällt (ableiten) | ln(x) zu 1/x | cos/sin Kreislauf nutzen
! Teilweise sind mehrere Durchgänge nötig !

Partialbruchzerlegung: (bei komplexeren Bruch-Integralen)

1. Nullstellen des Nenners bestimmen
   (evtl. mit Polynomdivision)
2. Kürzen des Bruchs? (gemeinsame Nullstellen?)
3. Jede Nullstelle einem Partialbruch zuordnen.
   (doppelte Nullstellen: beim zweiten Bruch $(\ldots)^2$
4. Mit Hauptnenner Multiplizieren
   => Brüche fallen weg
5. Sortieren nach den verschiedenen Graden
6. Koeffizienten bestimmen
7. Partialbrüche einzeln integrieren

Tipp:

$$\int \frac{1}{x-x_1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-x_1| + C,$$

$$\int \frac{1}{(x-x_1)^r} = -\frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{(x-x_1)^{r-1}} + C \quad (r \geq 2)$$

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

mit Hauptnenner $(\rightarrow (x-1)\cdot(x+2))$ multiplizieren

$$\Rightarrow 5x+1 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-1)$$
$$= Ax + 2A + Bx - B$$
$$= (A+B)x + (2A-B)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 5 = A + B \rightarrow B = 5 - A \\ 1 = 2A - B \rightarrow 6 = 3A \end{array} \right. \quad \boxed{A=2} \quad \boxed{B=3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} \rightarrow \text{einzeln integrieren}$$

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right) + C,$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\gamma}\arctan\frac{x-\beta}{\gamma} + C.$$

Funktioniert nur, wenn Grad-Nenner echt grösser als Grad-Zähler!

Polynomdivision ->

$$\frac{x^3}{x^3+x^2-x+1} \Rightarrow \frac{x^3 \overbrace{+x^2-x+1-x^2+x+1}^{=0}}{x^3+x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{-x^2+x-1}{x^3+x^2-x+1} \Rightarrow \text{Partialbruch...}$$

Substitution:

Durch Ersetzen eines Ausdruckes einen anderen heraus „kürzen" können:

1. Substitutionsgleichung:
2. $u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$
3. In Integral einsetzen.
4. Integrieren
5. Rücksubstituieren!!!

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \rightarrow \overbrace{u = x^2+1}^{\text{Substitution}} \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du \rightarrow \text{integrieren} + C$$

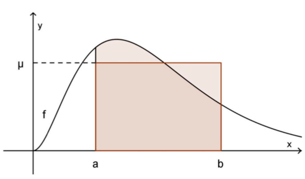
Bei bestimmten Integralen:

$$\int_{u(y)}^{u(x)} \quad \text{oder} \quad \int \quad (\rightarrow \text{bei Stammfunktion wieder setzen})$$

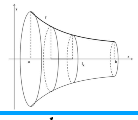
Mittelwert einer Funktion:

- Durchschnitt aller Funktionswerte ->

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$



- μ = Mittelwert
- $A_{\text{Rechteck}} = A_{\text{Kurve}}$



Rotationsvolumen:

- Volumen, wenn man Kurve um Achse dreht: rotation um x-Achse / y-Achse

rotation um y-Achse: Funktion nach y auflösen!

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx} \qquad \boxed{V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy}$$

Bogenlänge einer Kurve:

- Approximation durch unendlich feine Unterteilung ————>
- Intervall [a, b]

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx}$$

Mantelfläche:

- durch Rotation um x-Achse ->

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx}$$

Schwerpunkt von Fläche:

$$\boxed{x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] \, dx}$$

$$\boxed{y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b x \cdot [f(x)^2 - g(x)^2] \, dx}$$

Reminder:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx$$

Schwerpunkt von Rotationskörper:

$$\boxed{x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot [f(x)]^2 \, dx}$$

y Koordinate liegt auf x-Achse (=0)

Uneigentliche Integrale -> Integrale mit unendlichem Intervall oder Polstelle

Unendliches Intervall: falls Grenzwert existiert -> konvergent, sonst divergent

$$\boxed{I = \int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(\int_a^\lambda f(x)\, dx \right)}$$

Bsp.: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \left(\left[-\frac{1}{x} \right]_1^\lambda \right) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(-\frac{1}{\lambda} + 1 \right) = 1$

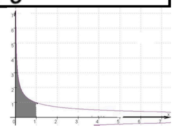
Dasselbe mit Intervall [-∞, a] einfach mit λ→-∞ , und: $\boxed{\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx}$

Polstelle: Intervall [a, b] und Polstelle x = a (+Stetigkeit auf **(**a, b]) ————————>

Statt über [a, b] integriert man über **[a+ε, b]**

Konvergent, falls Limes existiert (sonst div)

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx \right)}$$



Taylorreihen: (mit jedem Polynom wird die eigentliche Kurve an $\mathbf{x_0}$ besser angenähert)

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

- gerade Funktion: Taylorreihe enthält nur Potenzen mit <u>geraden</u> Exponenten
- ungerade Funktion: Taylorreihe enthält nur Potenzen mit <u>ungeraden</u> Exponenten

<u>Binomialreihe:</u> (spezielle Taylorreihe)

$$\boxed{(1 + x)^k = \sum_{n=0}^\infty \binom{k}{n} x^n}$$

$$\boxed{\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}}$$

$$\boxed{(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n}$$

Bernoulli- de l'Hospital: (nur bei $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$)

$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},}$ -> falls neuer Grenzwert immer noch vom Typ ist: nochmals anwenden

Varianten:

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) - g(x) = \infty - \infty = \lim_{x \to c} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ oder } = \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}}$$

Taylor-Approximation ist nicht perfekt: -> Restglied
-> Taylorpolynom n-ten Grades von f(x) und x0
-> dann gibt es ein **ξ** zwischen x0 und x, sodass das Restglied Rn(x):

$$\boxed{|R_n(x)| \le \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right|}$$

Konvergenz von Potenzreihen:
Werte eine Potenzreihe (Taylor) werden immer ungenauer, je weiter weg sie vom approximierten Zentrum sind.
-> Konvergenzradius: Alle Werte für x innerhalb: konvergieren, ausserhalb: divergieren Grenzen müssen einzeln getestete werden!
Konvergenzradius **ρ** einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad \rho = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Es kann sein, dass eine (oder beide) Grenzwerte nicht definiert sind
(wenn beide: kompliziertere Formeln)

Differentialgleichungen:
- Lösungsmenge ist keine Zahl, sondern Menge von Funktionen
(Menge aller Lösung = allgemeine Lösung)

- Ein *Anfangswertproblem* einer DGL *n*-ter Ordnung ist

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) &= 0, \quad (x,y,\dots y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{cases}$$

- Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' &= G(x,y), \quad (x,y,y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

DGL n-ter Ordnung braucht n verschiedene Anfangswerte
-> DGL 1. Ordnung = ein Anfangswert

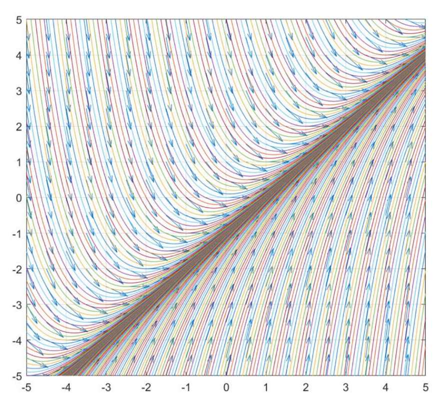
Lösung Anfangswertproblem: Spezielle/partikuläre Lösung

y’ = f(x, y) -> (z.B.: f(3, y(3))

- Richtungsfeld: f(x, y) = Steigung der Lösungskurve im Punkt (x, y):
  -> Alle Steigungen ergeben ein Vektorfeld: => Tangenten an die Lösungskurven

Typen:
- *Unbestimmtes Integral:* Richtungsfeld ist unabhängig von y
- *Autonomes DGL:* Richtungsfeld ist unabhängig von x

Beispiel (Forsetzung)
- DGL: $y' = x - y$
- Allgemeine Lösung: $y = C \cdot e^{-x} + x - 1$
- Richtungsfeld mit Lösungskurven:



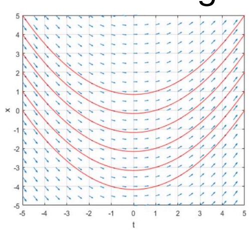


Abbildung: Unbestimmtes Integral

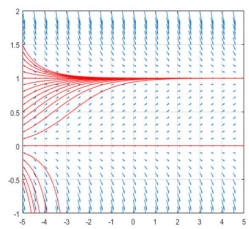
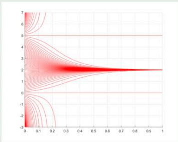


Abbildung: Autonome DGL

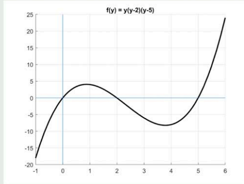
Spezielle Lösung: falls $f(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine konstante Lösung
-> <u>Nullstellen der Funktion finden</u>

Beispiel

- DGL:
$$y' = y(y-2)(y-5)$$
- Konstante Lösungen: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 5$. → Nullstellen
- Richtungsfeld dieser DGL:



- Man sieht, dass $y_2 = 2$ eine stabile konstante Lösung ist, während $y_2 = 0$ und $y_3 = 5$ instabile konstante Lösungen sind.
- Stabilität/Instabilität bedeutet, dass benachbarte Lösungen angezogen/abgestossen werden.
- Es ist auch Semi-Stabilität möglich, d.h. Anziehung auf der einen Seite und Abstossung auf der anderen Seite.
- Betrachtung des Graphen der Funktion $f(y) = y(y-2)(y-5)$:



- Das Vorzeichen von $f(y)$ gibt die Änderungstendenz von Lösungen an, die sich am entsprechenden Wert befinden!

<u>Separierbar:</u> falls DGL als *Produkt* eines x- und y-Anteils geschrieben werden kann
-> $y' = g(x) \times h(x)$ (Autonome DGL [-> $y' = f(y)$] sind separierbar!)
Allgemeine Lösung: $y' = \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ (Falls $h(y_0) = 0$, dann ist $y = y_0$ Lösung von DGL)
Trennung aller x- und y-Terme: $\frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$ -> Integration: $\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx$
Auflösen nach y, Anfangsbedingungen einsetzen: $\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(y)}\, ds = \int_{x_0}^{x} g(x)\, dt$

Wenn nach speziellen Lösungen gesucht: Wert für x und y einsetzen. Ziel: C = …
-> Da C die Höhe der vielen Lösungskurven bestimmt!

Bsp.: $y' = -x^2 \cdot y \;\to\; \frac{y'}{y} = -x^2 \;\to\; \frac{1}{y}\,dy = -x^2\,dx$
$\to \int \frac{1}{y}\,dy = \int -x^2\,dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = -\frac{1}{3}x^2 + C$
$\underline{\underline{y = e^{-1/3 x^3} \cdot C}}$ $(= e^{C_{alt}})$ Spezielle Lösung: $y(0) = 1$
$\to C \cdot e^{-1/3 \cdot 0^3} = \underline{\underline{C \overset{!}{=} 1}}$

Lineare DGL 1. Ordnung: Inhomogen $y' + f(x)y = g(x)$ -> Homogen: $y' + f(x)y = 0$

Formel für inhomogen $\boxed{y = \left(\int g(x) e^{F(x)} dx\right) \cdot e^{-F(x)}}$ ($F(x)$ = Stammfunktion von $f(x)$)

Lösungsverfahren 'Variation der Konstanten' für lineare Differentialgleichungen

(I) Vergleich der *gegebenen* Differentialgleichung mit der *allgemeinen* Form $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ und Bestimmung von $f(x)$ und $g(x)$. (**Vorzeichen**)

(II) Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

(III) Einsetzen in die Formel $y_0 = C \cdot e^{-F(x)}$ liefert die Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung.

(IV) Das Ersetzen von C durch eine noch zu bestimmende Funktion $K(x)$ führt zum folgenden *Ansatz* für die *allgemeine* Lösung:
$$y = K(x) \cdot e^{-F(x)}$$

(V) Die Funktion $K(x)$ lässt sich durch die folgende Formel berechnen.
$$K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)}\, dx$$
(Integrationskonstante nicht vergessen!)

(VI) Einsetzen von $K(x)$ in den Ansatz aus **(IV)** ergibt die *allgemeine* Lösung.

Beispiel: $y' = 4y + e^{3x} \Rightarrow y' - 4y = e^{3x}$
I) $f(x) = -4$, $g(x) = e^{3x}$ II) $F(x) = -4x$
III) $y_0 = C \cdot e^{-(-4x)} = C \cdot e^{4x}$ IV) $y = K(x) \cdot e^{4x}$
V) $K(x) = \int e^{3x} \cdot e^{-4x}\, dx = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C$
VI) $y = (-e^{-x} + C) \cdot e^{4x} = \underline{\underline{-e^{3x} + C \cdot e^{4x}}}$

Numerisches Verfahren: (approximativ)

- Nur mit Anfangswertproblem (AWP), da allgemein keinen Sinn ergeben würde.

DGL 1. Ordnung [y' = f(x;y)] mit Streckenabschnitt-Länge h und Startpunkt P(x_0, y_0):

$$P_k\,(x_k/y_k):\begin{cases} x_k = x_{k-1} + h & -> [oder: x_k = x_0 + k \cdot h] \\ y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1}; y_{k-1}) & -> [f(x_{k-1};\ y_{k-1}) = y' = Steigung] \end{cases}$$

Beispiel: AWP: $\begin{cases} y' = -2x \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$h = 0{,}1$

$$\begin{cases} x_k = x_0 + k \cdot h \\ y_k = y_{k-1} + h \cdot (-2x_{k-1} \cdot y_{k-1}^2) \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 1 \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}1} \\ y_1 = y_0 + h \cdot (-2x_0 \cdot y_0^2) = 1 + 0 \cdot (-2 \cdot 0 \cdot 1^2) = \underline{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 + 2 \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}2} \\ y_2 = y_1 + h \cdot (-2x_1 \cdot y_1^2) = 1 + 0{,}1 \cdot (-2 \cdot 0{,}1 \cdot 1^2) = \underline{0.98} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 + 3 \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}3} \\ y_3 = y_2 + h \cdot (-2x_2 \cdot y_2^2) = 0.98 + 0{,}1 \cdot (-2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}98^2) = \underline{0{,}9415} \end{cases}$$

Dabei entsteht immer ein Fehler! Der Fehler wird, wenn die Schrittgrösse halbiert wird ebenfalls ungefähr halbiert! (Proportional!)