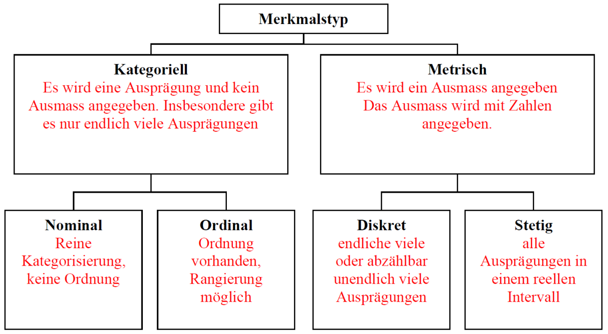
Stochastik und Statistik

HS23 Aviatik ZHAW

Karen Klöti

7. Januar 2024

1 Deskriptive Statistik



1.1 Häufigkeiten

PMF=Dichtefunktion

1.1.1 Absolute (empirische) und relative Häufigkeitsfunktionen

$$h(x) =_x \text{ Anzahl der } 1 \leq i \leq n \text{ absolute Häufigkeit}$$

$$\textbf{PDF } f(x) = \frac{h(x)}{n} \Rightarrow \text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolut Häufigkeit}}{\text{Anzahl Versuche}}$$

1.1.2 absolute und relative kumulative Verteilungsfunktion

$$H(x) = \text{ Anzahl aller Stichprobenwerte} \leq x = \sum_{i:a_i \leq x} h_i$$

$$\textbf{CDF } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{F(B)}{B-A} \cdot (X-A) + F(A)$$

Anzahl a_i	1	2	3	4	5	Tot.
Abs. Häufigkeit h_i	9	8	5	7	1	30
Rel. Häufigkeit f_i	9/30	8/30	5/30	7/30	1/30	1
Kumulative abs. Häufigkeit H_1	9	17	22	29	30	
Kumulative rel. Häufigkeit F_1	9/30	17/30	22/30	29/30	1	

1.1.3 Häufigkeisdichtefunktion h

$h = \frac{h_i}{d_i}$ mit Breite der Werte d_i

von bis	[10,20[	[20,25[	[25,30[
h_i abs. Häufigkeit	2	5	14
m_i Mitte	15	22.5	27.5
f_i/r_i rel. Häufigkeit	2/21	5/21	14/21
d_i/b_i Breite	10	5	5
Säulenhöhe abs.	2/10	5/5	14/5
Säulenhöhe rel. PDF $f(x)$	(2/21)/10	(5/21)/5	(14/21)/5
kum. Verteilungsfunktion rechts $F(x)$	(2/21)/10	(7/21)	1

Stichprobenmittel $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i = 15 \cdot \frac{2}{21} + 22.5 \cdot \frac{5}{21} + 27.5 \cdot \frac{14}{21}$

Stichprobenvarianz $s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 15^2 \cdot \frac{2}{21} + 22.5^2 \frac{5}{21} + 27.5^2 \cdot \frac{14}{21}$

A spring 7.3m weit

	700-720	720-740	740-760	760-780	780-800	800-820
A	19	24	26	27	10	5

$\frac{F_A(740)-F_A(720)}{20} = \frac{q_a - F_A(720)}{730-720} \Leftrightarrow q_a = \frac{19}{111} + \frac{10 \cdot 24/111}{20} = \frac{31}{111} \approx$ 0.2793

1.2 Kenngrössen

Lagemasse: Zentrum der Verteilung
Streumasse Abweichung vom Zentrum

1.2.1 Begriffe

Arithmetisches Mittel = Durchschnitt der Daten

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot h_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot f_i$$

Median =n 2 gleich grosse Hälften (0.5 Quantil ⇒ 2. Quartil)

$$Median(x_1, ..., x_n) = x_{med} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

$$R_{0.5} = \overbrace{25}^{a_i} + \frac{\overbrace{0.5}^{Quantil} - \overbrace{\frac{7}{30}}^{F(a_i)}}{\underbrace{\frac{21}{30}}_{F(a_{i+1})} - \underbrace{\frac{7}{30}}_{F(a_i)}} \overbrace{(\underbrace{30}_{a_{i+1}} - \underbrace{25}_{a_i})}^{Inverval}$$

Modus= häufigster Wert in der Stichprobe
Quantil $= q \cdot 100$ Perzentil, wenn Anteil der Stichprobenwerte $\leq R$ mindestens q und Anteil der Stichprobenwerte $\geq R$ mindestens $1-q$
(x Quantil * 4 = y Quartil)

$$R_q = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{[z]} + x_{[z+1]}) & z = n \cdot q \in \mathbb{Z} \\ (R_q = x_{[z]} & \text{sonst nächst grösssere } \mathbb{Z}: \ z = n \cdot q \end{cases}$$

klassierte Stichproben: $F(R_q) = q$

Bsp. 4,4,0,3,5,3,1 (1. Ordnen, 2. Ablesen)

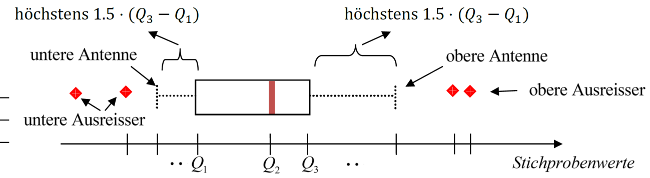
$0, \underbrace{1}_{R_{0.25}}, 3, \underbrace{3}_{Median}, 4, \underbrace{4}_{R_{0.75}}, 5$

$n \cdot q = 7 \cdot 0.25 = 1.75 = 2$ *Stichprobenwert* $x_{[n \cdot 1} = R_{0.25} = 1$

Interquartilsabstand IQR: Q3-Q1

1.2.2 Boxplot

Immer Zahlen aus Stichprobe und nicht aus dem Taschenrechner!
Box: erste Quartil Q_1, den Median Q_2, dritte Quartil Q_3.
Breite der Box: Quartilsabstand: $Q_3 - Q_1$
Untere Antenne: min. Stichprobenwerte $\geq Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$.
Obere Antenne: max. Stichprobenwerte $\leq Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$.



1.3 Streumasse

1.3.1 Varianz $\tilde{s}^2$

Abweichung vom Mittelwert

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} h_i(a_i) - \bar{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \cdot f_i\right) - \bar{x}^2$$

1.3.2 Standartabweichung $\tilde{s}$

mittlere Abweichung von allen gemessenen Werten von $\bar{x}$

$$\tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

1.3.3 korrigierte Varianz s^2

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{s}^2$$

1.3.4 korrigierte Standartabweichung s

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot \tilde{s}^2}$$

1.4 Korrelation = linearer Zusammenhang

1.4.1 Bravais Pearson

i	1	2	3	4	5	6	Mittelwert
x_i	3	4	6	5	9	15	5.4
y_i	2	4	1	2	6	45	3
x_i^2	9	16	36	25	81	225	33.4
y_i^2	4	16	1	4	36	2025	12.2
$x_i y_i$	6	16	6	10	54	675	18.4

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{Mittelwert=Lagemasse}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \qquad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \tilde{s}_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \qquad \tilde{s}_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$$

$$\tilde{s}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) \text{ Kovarianz}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{Kov}{Var(x) - Var(y)}$$

$$r_{xy} = \frac{\tilde{s}_{xy}}{\tilde{s}_x \cdot \tilde{s}_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}} \text{ Korrelationskoeffizient}$$

1.4.2 Spearman (monotone Beziehung)

falls 2 gleiche $\frac{a|b|b|c}{1|2.5|2.5|4}$

i	1	2	3	4	5	Mittelwert
x_i	3	4	6	5	9	5.4
y_i	2	4	1	2	6	3
$rang(x_i)$	1	2	4	3	5	3
$rang(y_i)$	2.5	4	1	2.5	5	3
$rg(x_i) - \overline{rg(x)}$	-2	-1	1	0	2	
$rg(y_i) - \overline{rg(y)}$	-0.5	1	-2	-0.5	2	

Korrelationskoeffizient vereinfacht
für ungebundene Ränge (wenn jeder nur 1x vorkommt)

$$r_{Sp} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n}(rg(x_i) - rg(y_i))^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

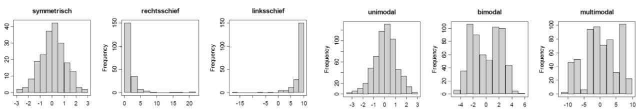
Korrelationskoeffizient

$$r_{Sp} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(rg(x_i) - \overline{rg(x)})(rg(y_i) - \overline{rg(y)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(rg(x_i) - \overline{rg(x)})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(rg(y_i) - \overline{rg(y)})^2}}$$

$$\tilde{s}_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$r_{xy} > 1$ positive Korrelation
$r_{xy} = 1$ linear positiv

$r_{xy} < 1$ negative Korrelation
nahe bei 1 = stark



1.4.3 Bivariate Daten

2-Dim Plot → Kontingenztabellen oder Mosaikplot, Boxplots oder Stripcharts, Streudiagramm
Zusammenhänge wie: Form, Richtung, Stärke

2 Kombinatorik

2.1 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.1.1 Rechenregeln

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \textit{Pascal'sches Dreieck-Rekursion}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-1} + \binom{n}{n}a^nb^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

2.2 n= Anzahl Möglichkeiten = Anzahl Sorten k=Auswahlmöglichkeiten=Grösse der Box

Variation (mit Reihenfolge)		Kombination (ohne Reihenfolge)	
mit W	ohne W.	mit W.	ohne W.
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_n!}$	$n!$	alle Plätze belegt	
Fussball tippen	3 stellige Zahl aus 5 Zahlen	K. aus Urne (6K.) ziehen mit Zl. ohne Rf	Lottoziehen / Anstossen an Silvester
3^{11}	$\frac{5!}{2!}$	$\binom{6+3-1}{3}$	$\frac{\binom{49}{6}}{\binom{n}{2}} = \frac{n(n-1)}{2}$

weitere Beispiele:
4 Geschwister, mindestens zwei im gleichen Monat geboren?

$$100\% - \frac{12 * 11 * 10 * 9}{12^4} \cdot 100\%$$

a) 12 Personen in drei gleich grosse Mannschaften aufteilen.
b) Sie und ihr Freund in die gleiche Mannschaft.

$$\frac{1}{3!}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = 5775 \qquad \frac{\binom{10}{2}\binom{8}{4}\binom{4}{4}}{2} = 1574 \Rightarrow \frac{1575}{5775} \approx 27.27\%$$

3 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

3.1.1 Definitionen

Ergebnisraum: Ω (alle möglichen Ergebnisse)
Zähldichte (PDF): $\rho : \Omega \to [0,1]$, es gilt $1 = \sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega)$

Ereignis: A={zahl1,zahl2,...}
Elementarereignis: {} (genau 1 Ergebnis)
Ereignisraum: 2^{Ω} (Menge aller Teilmengen von Ω)
Wahrscheinlichkeits $P : 2^{\Omega} \to [0,1]$
Wahrscheinlichkeitsraum: (Ω, P)

3.1.2 Laplace Wahrscheinlichkeit

$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$ alle gleichwahrscheinlich

3.1.3 Beispiel

P von 0.9 wenigstens 4 Kunden & P von 0.7 höchstens 6 Kunden. Wahrscheinlichkeit, dass 4, 5, 6 Kunden passieren?

$$\begin{aligned} P(4 \le X \le 6) &= P(X \le 6) - P(X \le 3) \\ &= P(X \le 6) - (1 - P(X \ge 4)) = 0.7 - (1 - 0.9) \end{aligned}$$

a) Wie viele Komponenten mit einer Zuverlässigkeit von je 35% müssen mindestens parallel geschaltet werden, damit die Zuverlässigkeit $\ge$ 99% beträgt?
b) 10 unabhängigen Komponenten mit P von 35%. Es funktioniert solange mindestens zwei Komponenten funktionieren. Zuverlässigkeit?

$$P(funktioniert) = 1 - P(kaputt) = 1 - 0.65^n \ge 0.99$$
$$\Leftrightarrow 0.65^2 \le 0.01 \Rightarrow n \ge \frac{ln(0.01)}{ln(0.65)} \approx 10.69$$

$$P(funktioniert) = 1 - P(10kaputt) - P(9kaputt)$$
$$= 1 - 0.65^10 - \binom{10}{9} \cdot 0.65^9 \cdot 0.35 \approx 0.9149$$

wichtige Eigenschaften:

$P() = 0$ *Unmögliches Ereignis* $P(\Omega) = 1$ *Sicheres Ereignis*
$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$ *Kompl.* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A1 \cup A2 \cup \ldots) = P(A1) + P(A2) + \ldots$ *disjunktiv* *Vereinigung*

3.2 Zufallsvariablen

3.2.1 Definition

Diskrete Zufallsvariable: endlich, unendlich abzählbarer Wert
stetige Zufallsvariabel: x-beliebiger Wert von Intervall

diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P)
Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$

PMF: $f : \mathbb{R} \to [0,1], f(x) = P(X = x)$ CDF $F(x) = P(X \le x)$

wichtige Eigenschaften von PMF und CDF

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \text{ und } F(z) = \sum_{x=-\infty}^{z} f(x)$$
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \text{ und } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$
$$\text{Monotonie: } x \le y \Rightarrow F(x) \le F(y) \qquad f(x) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$$
$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \text{ und } P(a \le X \le b) = F(b) - \lim_{x \to a^-} F(x)$$
$$P(X > b) = 1 - F(b) \text{ und } P(X \ge b) = 1 - \lim_{x \to b^-} F(x)$$

3.2.2 Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x = \sum_{x \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$$

3.2.3 Varianz:

$$\begin{aligned} Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 &= \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot [x - E(X)]^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot [X(\omega) - E(X)]^2 \end{aligned}$$

3.2.4 Standardabweichung:

$$S(X) = \sqrt{Var(X)}$$

3.2.5 Beispiel Rechnung

X	-2	-1	1	3	4
P(X=x)	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3
X^2	4	1		9	16
$P(X^2)$	0.1	0.3		0.3	0.3

$E(X) = -2 \cdot 0.1 + -1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.33 + 4 \cdot 0.3 = 2$
$E(X^2) = 4 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.3 = 8.2$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8.2 - 2^2 = 4.2$
$S(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{4.2} = 2.05$

wichtige Eigenschaften

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ *und* $E(\alpha X) = \alpha E(X)$ *Linearität*
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = [\sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x^2] - E(X)^2$

$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X)$ *mit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Bsp. $E(Y) = E(2X + 1) = E(2X) + E(1) = 2E(X) + 1$

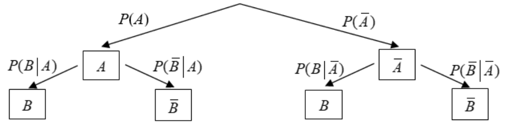
Tschebyscheff'schen Ungleichung:
mind 75% der Werte in $E(X) \pm 2 \cdot S(X)$ *Gauss'schen Normalverteilung:*

68% der Werte im Bereich $E(X) \pm S(X)$ *und bereits etwa 95% im Bereich* $E(X) \pm 2 \cdot S(X)$

3.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten $\cap$ = und; $\cup$ = oder

3.3.1 Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



3.3.2 Multiplikationssatz – Pfadwahrscheinlichkeit

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

3.3.3 Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B}) \text{ mit} \bar{B} = \Omega \backslash B$$

Bsp.

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \overline{B})$$
$$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$$
$$P(A \cup \overline{B} = 1 - P(B \cap \overline{A}) = P(A) + P(\overline{B} - P(A \cap \overline{B})$$

A=entlassen; B) Führungsverantwortlich

	A	$\overline{A}$	Summe
B	5	4	9
$\overline{B}$	8	3	11
Summe	13	7	20

$P(A \cap \overline{B}) = \frac{8}{20}$
$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B} - P(A \cap \overline{B}) = \frac{13}{20} + \frac{11}{20} - \frac{8}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$
bzw. $P(A \cup \overline{B} = 1 - P(B \cap \overline{A}) = 1 - \frac{4}{20} = \frac{4}{5}$
$P(\overline{B}|A) = \frac{P(A \cap \overline{B}}{P(A)} = \frac{8/20}{13/30} = \frac{8}{13}$ Arbeiter ohne Führung wird entlassen
$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{5/20}{9/20} = \frac{5}{9}$
Das eine Person, die ein positiven Test hat, tatsächlich gesund ist: $P(gesund \cap T^+|T^+) = P(g|T)$

3.3.4 Stochastische Unabhängigkeit

stochastisch unabhängig =Das Eintreten des einen Ereignisses beeinflusst das Eintreten des anderen Ereignisses nicht.:
$P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A|B) = P(A)$ und $P(A) \neq 0 \Rightarrow P(B|A) = P(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

W\X	0	1	2	3	P(W=w)
0	1/8	0	0	1/8	2/8
1	0	2/8	2/8	0	4/8
2	0	1/8	1/8	0	2/8
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Stochastisch abhängig, denn es gilt z.B.
$P(X = 1, W = 0) = 0, aber P(X = 1) \cdot P(W = 0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{3}{32} \neq 0$
$P(X = 2|W = 1) = \frac{P(X=2,W=1)}{P(W=1)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$

4 Spezielle Verteilung

PDF einer stetigen Zufallsvariablen X: Finde a für f=PDF, $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$, $E(X)$ und $E(X^2)$

$f(x) = \begin{cases} A(2x - x^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$

$\int_0^2 a(2x - x^2)dx = \left[a(x^2 - \frac{x^3}{3})\right]_0^2 = a \cdot \frac{x^3}{3} \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow a = \frac{3}{4}$

$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^u \frac{3}{4}(2u - u^2)du = \frac{3}{4} \cdot (x^2 - \frac{x^3}{3})$

$\Rightarrow P(0.5 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(0.5)$
$= \frac{3}{4} \cdot \left(1.5^2 - \frac{1.5^3}{2}\right) - \frac{3}{4} \cdot \left(0.5^2 - \frac{0.5^3}{3}\right)$

$E(X) = \int_0^2 \frac{3}{4}(2x^2 - x^3)dx = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2x^2}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$

$E(X^2) = \int_0^2 \frac{3}{4}(2x^3 - x^4)dx = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$

4.0.1 Hypergeometrische Verteilung $X \sim H(N, M, n)$ mit

$p = \left(\frac{M}{N}\right)$

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$
$$\mu = E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$
$$\sigma^2 = \mathrm{V}(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N - n}{N - 1}$$
$$\sigma = S(X) = \sqrt{V(X)}$$

Bsp. 300 Passagiere, 5 Schwarzfahrer, 30P. kontrolliert.
$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{300-5}{30-k}}{\binom{300}{30}}$

4.0.2 Bernoulli Verteilung $X \approx Bernoulli(p)$

0 oder 1 $\Rightarrow \Omega = 0, 1$

$$P(X = 1) = p$$
$$P(X = 0) = 1 - p$$
$$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$
$$E(X^2) = 1^2 \cdot P(X = 1) = 1 \cdot p = p$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$$

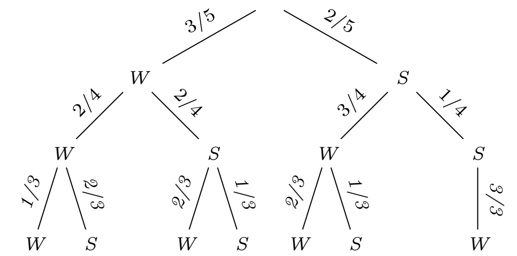
4.0.3 Binomialverteilung $X \sim B(n; p)$

0 oder 1 $\Rightarrow \Omega = 0, 1$ mit n Ziehungen

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \qquad \text{Zähldichte}$$
$$\mu = E(X) = np$$
$$\sigma^2 = \mathrm{V}(X) = n \cdot (1 - p) = npq$$
$$\sigma = S(X) = \sqrt{npq}$$

Approximation: wenn $n \leq \frac{N}{20}$ dann gilt $H(N, M, n) \approx B(n, \frac{M}{N})$

Beispiel: 3 weisse Kugeln, 2 schwarze Kugeln. 3 Kugeln werden gezogen ohne zurücklegen.



Ω	w,w,w	w,w,s	w,s,w	s,w,w	w,s,s	s,w,s	s,s,w
$P(\{w\})$	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

schwarze Kugeln:

	k	0	1	2	3
CDF	P(X=k)	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$	$3 \cdot (\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}) = \frac{3}{5}$	$3 \cdot (\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{3}{10}$	0
PMF	$P(X \leq k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$	$\frac{1}{10} + \frac{3}{5} + \frac{3}{10} = 1$	1

CDF $F(x) = P(X \leq x)$
$P(X = 2) = F(2) - F(1); P(X > 2) = 1 - F(2); P(X > 0) = 1 - F(0);$
$P(1 \leq X < 3) = F(2) - F(0); P(1 \leq X \leq 3 = F(3) - F(0);$
$P(1 < X < 4) = F(3) - F(1); P(1 < X < 4) = F(3) - F(1)$

4.0.4 Poisson Verteilung $X \sim Poi(\lambda)$ mit $\lambda = n \cdot p$

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\mu = E(X) = \lambda \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Approximation: wenn $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$ dann gilt $B(n, p) \approx Poi(n \cdot p)$

	diskrete Zufallsvariablen	stetige Zufallsvariablen
PDF f(x)=	$f(x) = P(X = x)$	$f(x) = F'(x) \neq P(X = x)$
CDF/PMF F(X)=	$P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$	$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$
P	$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x \leq b} f(x)$ $P(a < X \leq b) = \sum_{a < x \leq b} f(x)$ $P(a < X < b) = \sum_{a < x < b} f(x)$ $P(a < X) = 1 - F(a)$	$\left.\begin{matrix} P(a \leq X \leq b) \\ P(a < X \leq b) \\ P(a < X < b) \end{matrix}\right\} = \int_a^b f(x)dx$ $P(a < X) = 1 - F(a)$
Graph.	Stabdiagramm	Graph
E(X)	$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x\, dx$
Var(X)	$\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot (x - E(X))^2$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - E(X))^2\, dx$

4.1 Gauss'sche Normalverteilung $X \sim N(\mu; \sigma)$

$$\text{PDF: } \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$\text{CDF: } \phi_{\mu,\sigma}(x) = P(X \leq x)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$
$$E(x) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Standardnormalverteilung wenn $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Bei einer Zufallsvariable X, die der Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$ folgt, liegen
ca. 68% der beobachteten Werte zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$,
ca. 95% der beobachteten Werte zwischen $\mu - 2\sigma$ und $\mu + 2\sigma$,
ca. 99.7% der beobachteten Werte zwischen $\mu - 3\sigma$ und $\mu + 3\sigma$.

4.1.1 Tabelle 1 Anwendung

$$N(\mu,\sigma)(x) = N(0.1)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Bsp.1) $N(\overbrace{2}^{Mittelwert};\overbrace{0.5}^{Standardabweichung})$ *Verteilt*

$$P(1.12 \le X \le 3.14) = P\left(\frac{1.12-2}{0.5} \le U \le \frac{3.13-2}{0.5}\right)$$

$$= \phi(2.28) - (1-\phi(2.18)) = 1 - 0.0774 - (1-0.9854) = 0.2150$$

Bsp.2) $N(2;0.5)$ *Verteilt*

$$P(|X-2| \le 1) = P(|U| \le 2) = 2\phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

Exponentialverteilung: $\mu = \frac{1}{t}$
PDF$=f(t)=\mu e^{-\mu t}$ *CDF*$=F(t)=1-e^{-\mu t}$

4.2 Zentraler Grenzwertsatz $N(n\mu;\sqrt{n}\sigma)$

Verteilung des Mittelwerts einer Stichprobe konvergiert gegen eine normalverteilung unabhängig von den ursprünglichen Werten, solange Stichprobengrösse gross genug ist.

4.2.1 Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad N(n\mu;\sqrt{n}\sigma)$$

$$E(X) = n\mu \qquad V(X) = n\sigma^2$$

4.2.2 arithmetische Mittel

$$\bar{X}_n = S_n/n \qquad N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$E(X) = n\mu \qquad V(X) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$U_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

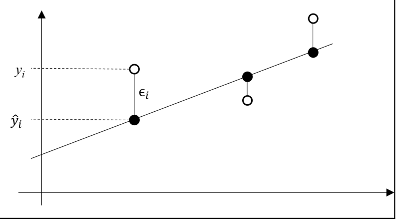
$$\lim_{n\to\infty} F_n(u) = \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

5 Regression

5.1 Lineare Regression

Regressionsgerade g(x)**prognostizierte Werte** $\hat{y}_i = g(x_i)$

Regressionsgerade:
$g(x) = m{\cdot}x+d = ax+b$
Steigung:
$m = \frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2}-\overline{x}^2} = \frac{\tilde{s}_{xy}}{\tilde{s}_x^2}$
Residualvarianz:
$\tilde{s}_\epsilon^2 = \tilde{s}_y^2 - \underbrace{\frac{\tilde{s}_{xy}^2}{\tilde{s}_x^2}}_{=\tilde{s}_{\hat{y}}^2}$



Beispiel:

x	5	10	20	8	7	$\bar{x} = 10$
y	27	46	73	40	30	$\bar{y} = 43.2$
$x-\bar{x}$	-5	0	10	-2	-3	
$y-\bar{y}$	-16.2	2.8	29.8	-3.2	-13.2	*Summe*
$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	82	0	298	3.4	39.6	387.36
$(x-\bar{x})^2$	25	0	100	4	9	138

$m = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{387.36}{138} = 2.8 \qquad d = \bar{y} - m\bar{x} = 43.2 - 2.8 * 10 = 15.2 y = 2.8x + 15.2$

5.2 Bestimmtheitsmass

Varianzzerlegung: $\underbrace{\tilde{s}_y^2}_{Var_{prog.}} = \tilde{s}_\epsilon^2 + \underbrace{\tilde{s}_{\hat{y}}^2}_{Var_{total}}$ mit $\tilde{s}_{\hat{y}}^2 = \frac{\tilde{s}_{xy}^2}{\tilde{s}_x^2}$

Bestimmtheitsmass: $R^2 = \frac{\tilde{s}_{\hat{y}}^2}{\tilde{s}_y^2}$ bzw. $R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$

nach Bravais Pearson (Quadrat der Korrelationskoef.):
$R^2 = \frac{\tilde{s}_{xy}^2}{\tilde{s}_y^2 \cdot \tilde{s}_y^2} = r_{xy}^2$ bzw. $R^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_y^2 \cdot s_y^2} = r_{xy}^2$

Matrizenproblem: $A^T \cdot A \cdot \binom{m}{q} = A^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

5.2.1 Methode der kleinsten Quadrate

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 + \epsilon_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 + \epsilon_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & y_m + \epsilon_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{=\vec{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{pmatrix}}_{=\vec{\epsilon}}$$

$A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{y} \Rightarrow \vec{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \vec{y}$
Für die Lösungen x gilt immer: $A \cdot \vec{x}$ und der Residuenvektor $\vec{\epsilon} = \vec{y} - A \cdot \vec{x}$ sind orthogonal zueinander. Es gilt der Satz von Pythagoras (Quadratsummenzerlegung): $|\vec{y}|^2 = |A \cdot \vec{x}|^2 + \underbrace{|\vec{y} - A \cdot \vec{x}|^2}_{=|\vec{\epsilon}|^2}$

5.3 optimale Schätzfunktion

$E(\Theta) = \theta \Rightarrow$ erwartungstreu
$V(\Theta_1) < V(\Theta_2)$ Θ_1 effizienter
$E(\Theta) \to \theta \& V(\Theta) \to 0$ für $n \to \infty \Rightarrow$ konsistent
$\overline{X}$ und S^2 sind erwartungstreu und konsistent. S ist konsistent, aber nicht erwartungstreu.

	Schätzfunktion	Schätzwert
E(X)	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\text{Anzahl 1en}}{n}$
Var(X)	$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$	$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
Std. abw. S	$S = \sqrt{S^2}$	$\hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

6 Anhänge

6.0.1 Logarithmusregeln

$$\frac{b_1}{b_2}^x = a \Rightarrow x = \log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b_1) - \ln(b_2)}$$

6.1 Vertrauensintervalle

Standardabweichung ist ein ein Mass für die Streuung der Messwerte

Vertrauensintervall hängt von der Standardabweichung der Stichprobe ab.

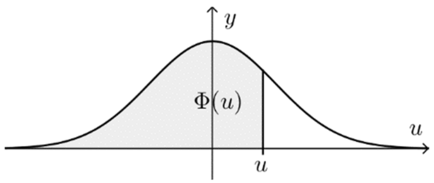
Vertrauensniveau = Konfidenzniveau = γ

Verteilung der Grundgesamtheit	zu schätzender Parameter	Schätzfunktionen	zugehörige standardisierte Zufallsvariable	Verteilung und benötigte Quantile	Zufallsvariablen für Intervallgrenzen
Normalverteilung Varianz σ^2 bekannt	μ	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	Standardnormalverteilung Tabelle 2 $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{X} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\Theta_o = \bar{X} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung Varianz σ^2 unbekannt und $n \leq 30$: sonst Fall 1 mit s als Schätzwert für σ	μ	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	t-Verteilung mit $f = n-1$ Tabelle 4 $c = t_{(p;f)}$ mit $P = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{X} - c \cdot S/\sqrt{n}$ $\Theta_o = \bar{X} + c \cdot S/\sqrt{n}$
Normalverteilung	σ^2	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$	$Z = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$	Chi-Quadrat-Verteilung mit $f = n-1$ Tabelle 3 $c_1 = z_{(p_1;f)}$ mit $p_1 = \frac{1-\gamma}{2}$ $c_2 = z_{(p_2;f)}$ mit $p_2 = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \frac{(n-1) \cdot S^2}{c_2}$ $\Theta_o = \frac{(n-1) \cdot S^2}{c_1}$
Bernoulli Verteilung $\overline{x} = \hat{p}$ mit $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 9$	p	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ $P(X_i = 1) = p$	$U = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$	Standardnormalverteilung (≈ Tabelle 2) $c = u_q$ mit $q = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{X} - c \cdot \sqrt{\frac{\bar{X} \cdot (1-\bar{X})}{n}}$ $\Theta_o = \bar{X} + c \cdot \sqrt{\frac{\bar{X} \cdot (1-\bar{X})}{n}}$
beliebig mit $n > 30$	μ, σ^2	wie im Fall 1 (gegebenenfalls mit s als Schätzwert für σ bzw. wie im Fall 3			

Bsp 1. Standardabweichung $\sigma = 0.5°C$, *Anzahl Messungen Anzahl n=10, Mittel* $\overline{x} = 10°C$
In welchem Intervall liegen 68.26% *von den Messungen?* $p = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0.6826}{2} = 0.8413 \Rightarrow$ *Tabelle mit* $0.08413 \rightarrow 1.00 = c \Rightarrow$ *Intervall* $[10 - 1 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{10}}; 10 + 0.16]$
P, dass Sp.mittel um mehr als $0.095°C$ *abweicht?* $X_i \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) \Rightarrow P(-0.095 \leq X - \mu \leq 0.095) = P(-\frac{0.095}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{0.095}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(-0.60 \leq Z \leq 0.60) = 2 \cdot \phi(0.60) - 1 = 2 \cdot 0.7257 - 1 = 0.45 \Rightarrow 55\%$

Bsp 2. 95%− *Konfidenzintervall für den Erwartungswert: n=20,* $\overline{x} = 170cm$ *empirische Standardabweichung von* $s = 7cm$.
$\Rightarrow$ *Tabelle Zeile 2: Vertrauensniveau* $\gamma = 95\%, \Rightarrow P = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \Rightarrow f = n - 1 = 19$ *Freiheitsgrade (Tabelle 4)* $p = 0.975 \Rightarrow c = 2.093 \Rightarrow [\overline{x} - c \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + c \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}]$

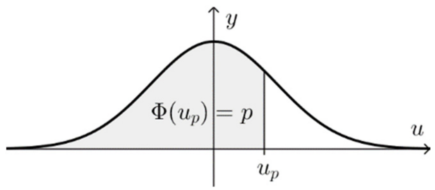
Tabelle 1: CDF $\Phi(u)$ der Standardnormalverteilung



$$P(U \le u) = \Phi(u)$$
$$P(U \ge u) = 1 - \Phi(u)$$
$$P(-u \le U \le u) = 2 \cdot \Phi(u) - 1$$
$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung

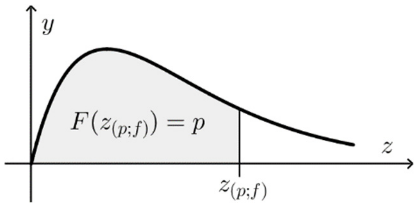


p : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

u_p : zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil

p	u_p	p	u_p
0.90	1.282	0.10	−1.282
0.95	1.645	0.05	−1.645
0.975	1.960	0.025	−1.960
0.99	2.326	0.01	−2.326
0.995	2.576	0.005	−2.576
0.999	3.090	0.001	−3.090

Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung

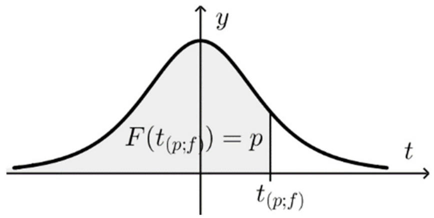


p : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$z_{(p;f)}$: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden

	p									
f	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
22	8.6	9.5	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
24	9.9	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von «Student»



p : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$t_{(p;f)}$: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden

	p				
f	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
500	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

$$\boxed{t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}}$$