

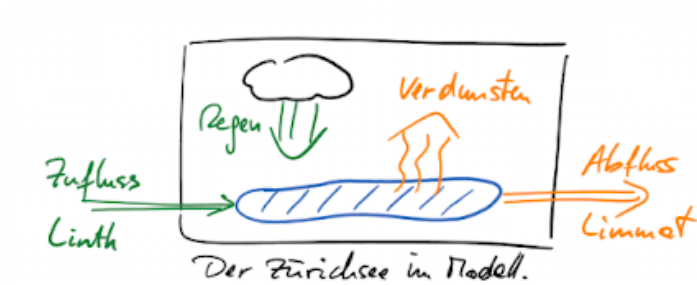
# 1 Bilanzieren

## 1.1 Bilanzierbarkeit

1. Extensive Grösse: Grösse die beim Zusammenführen von Systemen addiert werden  
Beispiel: Masse, Volumen
2. Intensive Grösse: nicht bilanzierbar  
Beispiel: Temperatur

## 1.2 Bilanzgleichung integrieren

$$\Delta V_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(t) dt \quad (1)$$



# 2 Mechanik

## 2.1 Dynamik

### 2.1.1 Impuls

1. Falls keine Kräfte von aussen:  
 $\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1} = -\frac{m_1}{m_2}$
2. Impuls:  
 $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
3. Impuls ist eine Vektorielle Grösse:  
$$\begin{pmatrix} \vec{p}_x \\ \vec{p}_y \\ \vec{p}_z \end{pmatrix} = m \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} m \cdot \vec{v}_x \\ m \cdot \vec{v}_y \\ m \cdot \vec{v}_z \end{pmatrix}$$
4. 2. Newtonsche Gesetz:  
 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{res}$
5. resultierende Kraft:  
 $\vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$

## 2.2 Energie, Arbeit und Leistung einer Kraft

### 2.2.1 Energie

1. Kinetische Energie  
 $E_{kin}(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2$
2. Energieänderung zwischen zwei Zuständen eines Zweikörpersystems bei Impulsübertragung  
 $\Delta E_{kin,t_1 \rightarrow t_2} = \Delta p_{t_1 \rightarrow t_2} \cdot \frac{1}{2} (\Delta v_{t_1} + \Delta v_{t_2})$

### 2.2.2 Arbeit

Bei schiefer Ebene immer Vektoren:  $x = \sin / y = \cos$

1. Arbeit einer Kraft  
 $W_F = F \cdot \Delta s = F_1 \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot \Delta h$

2. Arbeit von  $F(s)$  entlang Strecke  $s$

$$W_{F,s_1 \rightarrow s_2} = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds \quad (2)$$

3. Bei mehreren Arbeiten:  
 $W_{tot} = W_1 + W_2 \rightarrow (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2)$

### 2.2.3 Leistung

Leistung ist die Kraft pro Zeit

1. Leistung einer zeitabhängigen Kraft  
 $P_F(t) = F(t) \cdot v(t)$
2. Zusammenhang Leistung und Arbeit einer Kraft

$$W_{F,t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P_f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot v(t) dt \quad (3)$$

3. Ortsabhängigkeit  $F(s)$  der Kraft bekannt

$$W_{f,s_1 \rightarrow s_2} = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds \quad (4)$$

4. Zeitabhängigkeit  $F(t)$  der Kraft bekannt

$$W_{F,t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot v(t) dt \quad (5)$$

## 2.3 Auftrieb und Luftwiderstand

### 2.3.1 statischer Auftrieb

1. Statische Auftriebskraft auf einen Körper in einem Fluid:

$$\vec{F}_A = -\rho_{F1} \cdot v \cdot \vec{g} = -m_{F1} \cdot \vec{g} \quad (6)$$

### 2.3.2 Aerodynamic forces

$\vec{F}_L$  = dynamische Auftriebskraft  $\rightarrow$  lift

$\vec{F}_D$  = Luftwiderstandskraft  $\rightarrow$  drag

$v$  = Anströmungsgeschwindigkeit

$c_L$  = Auftriebsbeiwert  $c_D$  = Widerstandsbeiwert

$$\vec{F}_{Aero} = \vec{F}_L + \vec{F}_D \quad \vec{F}_L \perp \vec{v}_\infty \quad \vec{F}_d \parallel \vec{v}_\infty$$

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot c_L \cdot A \quad (7)$$

$$F_D = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot c_D \cdot A \quad (8)$$

## 2.4 Schwingungen

### 2.4.1 Freier harmonisches Federpendel

1. Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0 \quad (9)$$

2. Allgemeine Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0 \quad (10)$$

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \delta) \quad (11)$$

3. Ableitungen der Bewegung

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\hat{x} \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \delta) \quad (12)$$

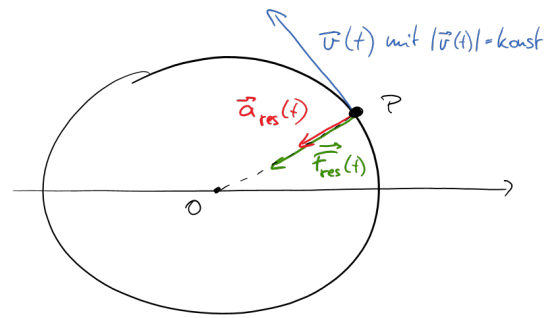
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\hat{x} \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \delta) \quad (13)$$

4. Wichtige Formeln:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \omega_0 = 2\pi \cdot f \quad (14)$$

5. Energie und Arbeit im Pendel

$$E_{Sys} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 \quad F_{max} = k \cdot x_0 \quad (15)$$



## 2.6 Gravitation und Trägheitsfeld

1. Newtonsches Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_{G,12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (22)$$

2. Gravitationsfeld einer Kugel

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (23)$$

3. Trägheitsfeld im Innern des Systems

$$\vec{g}_{\text{träg}} = -\vec{a}_S \quad (24)$$

4. Lokales Gravitationsfeld

$$\vec{g}_{\text{lokal}} = \vec{g} + \vec{g}_{\text{träg}} \quad (25)$$

5. Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{ZF} = m \omega^2 r \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad F_{ZF} = m \omega^2 r \quad (26)$$

6. Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (27)$$

7. Betrag der Corioliskraft

$$F_C = 2m \cdot \omega v \cdot \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{v}) \quad (28)$$

## 2.5 Kreisbewegungen

Radialbeschleunigung und  $F_{res}$  zeigt immer zum Mittelpunkt.

1. Bahn- und Winkelgeschwindigkeit:

$$v(t) = \omega(t) \cdot r \quad (16)$$

2. Bogenlänge auf Kreis

$$s(t) = \theta(t) \cdot r \quad (17)$$

3. Periode bei gleichförmiger Kreisbewegung

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (18)$$

4. Beschleunigungsvektor

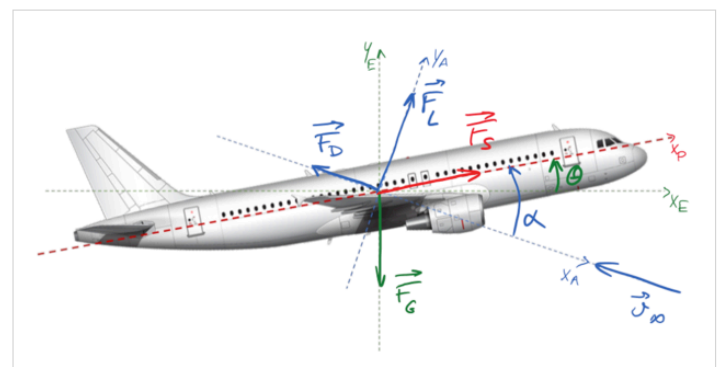
$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t) \quad (19)$$

5. Radialbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad a_r = \omega^2 r \quad (20)$$

6. Resultierende zentripetale Kraft

$$\vec{F}_{res}(t) = m \cdot \vec{a}_r(t) \quad (21)$$



Vereinfachte Darstellung der auf ein Flugzeug wirkenden Kräfte. Der dynamische Auftrieb  $\vec{F}_L$  steht senkrecht auf der Anströmrichtung, der Luftwiderstand  $\vec{F}_D$  ist parallel zur Anströmrichtung. Die Gravitationskraft  $\vec{F}_G$  zeigt vertikal nach unten und die Schubkraft  $\vec{F}_S$  ist parallel zur Flugzeugachse (falls die Triebwerke so ausgerichtet sind). Der Winkel zwischen der Anströmrichtung und der Flugzeugachse ist der Anstellwinkel  $\alpha$  (angle of attack). Der Winkel  $\theta$  zwischen der Horizontalen und der Flugzeuglängsachse ist der Längsneigungswinkel (pitch).

## 2.7 Bernoulli

For horizontal flow an increase in velocity must be accompanied by a decrease in pressure (Druck[P] = Energie/Vol.)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const} \quad (29)$$

1. Term = Statischer Druck
2. Term = Dynamischer Druck
3. Term = Hydrostatischer Druck

Falls zwischen 2 Punkten verglichen wird, Gleichung an beiden Punkten aufstellen und gleichstellen.

$\rho_2$        $\rho_3$   
 $\swarrow$  Volumenstrom ( $\frac{m^3}{s}$ )  
 Massenfluss:  $I_m = \rho \cdot v \cdot A = \rho \cdot I_V$   
 $\uparrow$        $\uparrow$        $\uparrow$        $\uparrow$   
 ( $\frac{kg}{s}$ )      Dichte Fluid ( $\frac{kg}{m^3}$ )      mittlere Strömungsgeschwindigkeit ( $\frac{m}{s}$ )      Strömungsquerschnitt ( $m^2$ )

### 2.7.1 Umformungen der Bernoulli-Gleichung

$$1. p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

$$2. v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}$$

$$3. I_V = v_1 \cdot A_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}$$

## 2.8 Impulsbilanz für offene Systeme

$$i_m = \frac{kg}{s}$$

### 1. Impulsbilanz offenes System

$$\sum_i \vec{F}_{ob,i} + \sum_i \vec{F}_{K,i} + \sum_i \vec{I}_{p,konv,i} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (30)$$

### 2. Konvektiver Impulsstrom und Massestrom

$$\vec{I}_{p,konv} = I_m \cdot \vec{v}_m \quad I_m(t) = \rho \cdot I_V(t) \quad (31)$$

### 3. Massenbilanz offenes System

$$\dot{m}(t) = \sum_i I_{m,i}(t) \quad (32)$$

### 4. Raketengleichung

$$v_z(m) = c \cdot \ln \frac{m_0}{m} \quad (33)$$

### 5. Schubkraft Strahltriebwerk

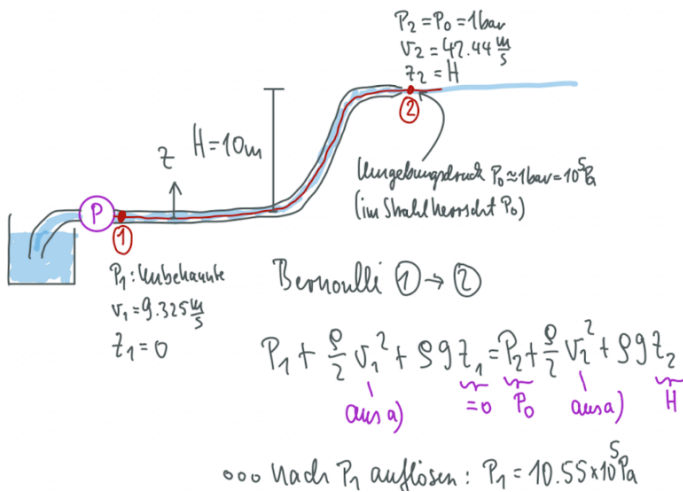
$$F_{Schub} = i_m \cdot (v_{out} - v_{in}) \quad (34)$$

### 6. Leistung Strahltriebwerk

$$P = \frac{v_{out} + v_{in}}{2} \cdot F_{Schub} \quad (35)$$

### 7. Schubkraft Mantelstromtriebwerk

$$F_{Schub} = \underbrace{I_{m,K} \cdot (v_{out,K} - v_{in})}_{\text{Schub Triebwerk allein}} + \underbrace{I_{m,K} \cdot (v_{out,M} - v_{in})}_{\text{Zusatzschub Mantel}} \quad (36)$$



### 3 Mechanik - Rotation

#### 3.1 Kinematik des starren Körpers - Der Massenmittelpunkt

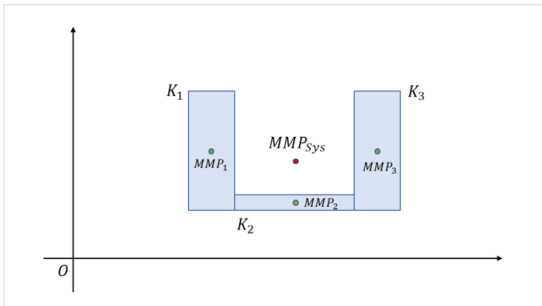
Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich so, wie wenn die externen Kräfte direkt an ihm angreifen würden, und die gesamte Systemmasse in ihm vereinigt wäre!

1. Massenmittelpunkt eines Mehrteilchensystems

$$\vec{r}_{mmp} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \quad (37)$$

2. Massenmittelpunkt einer kontinuierlichen Massenverteilung mit Dichte  $\rho(\vec{r})$

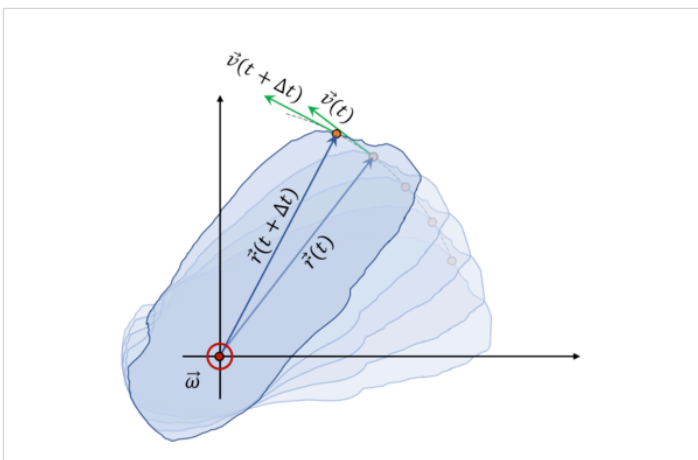
$$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) dV \quad (38)$$



Um den Massenmittelpunkt des Systems zu finden, bestimmen wir zuerst die Massenmittelpunkte der einzelnen Bestandteile und dann den «Massenmittelpunkt der gewichteten Massenmittelpunkte».

$$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_{MMP,i} \quad \text{Massenmittelpunkt eines Systems starrer Körper mit Massen } m_i \text{ und mit Massenmittelpunkten } \vec{r}_{MMP,i}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{MMP}) = m \cdot \vec{a}_{MMP} \quad \text{Dynamik des Massenmittelpunkts}$$



Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$ , hier eingezeichnet zu zwei Zeitpunkten  $t$  und  $t + \Delta t$ , steht zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf dem Ortsvektor:  $\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$ .

1. Ortsvektor eines Punktes des 2-Dimensionalen starren Körpers

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix} \quad (39)$$

2. Geschwindigkeitsvektor eines Punktes des 2-dimensionalen starren Körpers

$$\vec{v}(t) = r \cdot \omega(t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix} \quad (40)$$

3. Momentane Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) \quad (41)$$

4. Betrag des Geschwindigkeitsvektors

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = r \cdot |\omega(t)| \quad (42)$$

5. Rechte Hand-Regel: Finger in Drehsinn, Daumen zeigt den Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\omega}(t)$

6. Geschwindigkeit eines Punktes auf dem rotierenden starren Körper

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \quad (43)$$

7. Beschleunigungvektor eines Punktes des 2-dimensionalen starren Körpers,  $\omega = \text{const}$

$$\vec{a}(t) = -r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix} \quad (44)$$

8. Betrag des Beschleunigungsvektors eines Punktes des 2-dimensionalen starren Körpers,  $\omega = \text{const}$

$$a(t) = \|\vec{a}(t)\| = r \cdot \omega^2 \quad (45)$$

9. Zerlegung des Beschleunigungsvektors in einen radialen und tangentialen Anteil

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_r(t) \quad (46)$$

10. Tangentialbeschleunigung

$$a_t(t) = \|\vec{a}_t(t)\| = r \cdot |\dot{\omega}(t)| \quad (47)$$

11. Radialbeschleunigung

$$a_r(t) = \|\vec{a}_r(t)\| = r \cdot \omega^2(t) \quad (48)$$

12. Kreuzprodukt-Darstellung der Beschleunigung eines Punktes auf einem starren Körper

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}(t)}_{=\vec{a}_t(t)} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t))}_{=\vec{a}_r(t)} \quad (49)$$

### 3.2 Kinematik des starren Körpers - Allgemeine ebene Bewegung

1. Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes B:

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PB}(t) \quad (50)$$

2. Beschleunigung eines beliebigen Punktes B falls  $\vec{a}_P(t)$  und  $\vec{\omega}(t)$  bekannt

$$\vec{a}_B(t) = \vec{a}_P(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}_{PB}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PB}(t)) \quad (51)$$

3. Ort des Momentanpols M relativ zu P

$$\vec{r}_{PM}(t) = \frac{\vec{\omega}(t) \times \vec{v}_P(t)}{\omega^2(t)} \quad (52)$$

### 3.3 Drehmoment

1. Drehmoment der einer Kraft bezüglich einem Punkt

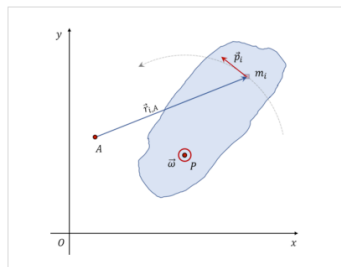
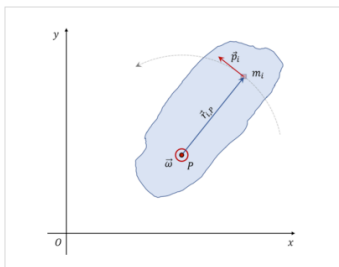
$$M = r \cdot F \quad (53)$$

2. Betrag des Drehmoments von F bezüglich Punkt P

$$M = r_{PQ} \cdot F_Q \cdot \sin \angle(\vec{r}_{PQ}, \vec{F}_Q) = F_Q \cdot r_{PQ,\perp} \quad (54)$$

3. Resultierendes Drehmoment bezüglich eines Punktes P

$$M = \sum_i \vec{M}_{i,P} \quad (55)$$



Links: Bei der Berechnung des Drehimpulses  $L_P$  bezüglich Punkt  $P$  haben die Abstandsvektoren ihren Ursprung im Punkt  $P$ . Rechts: Wird der Drehimpuls des gleichen Körpers, welcher die gleiche Rotation vollzieht gegenüber einem anderen Punkt  $A$  berechnet, dann wird das Ergebnis im Allgemeinen unterschiedlich sein  $L_A \neq L_P$ .

### 3.4 Drehimpuls

$r_{i,\perp}$  = Abstand Massenelement zur Drehachse

1. Drehimpuls einer Punktmasse an Ort Q mit Impuls  $\vec{p}$  bez. P

$$\vec{L}_P = \vec{r}_{PQ} \times \vec{p} \quad (56)$$

2. Drehimpulskomponente bezüglich Drehachse entlang  $\vec{\omega}$

$$L_{\vec{\omega}} = J_{\vec{\omega}} \cdot \omega \quad (57)$$

3. Massenträgheitsmoment des starren Körpers bezüglich einer Drehachse entlang  $\vec{\omega}$

$$J_{\vec{\omega}} = \sum_i m_i \cdot r_{i,\perp}^2 \quad (58)$$

4. Drehimpuls des starren Körpers bei Rotation um Hauptträgheitsmomente

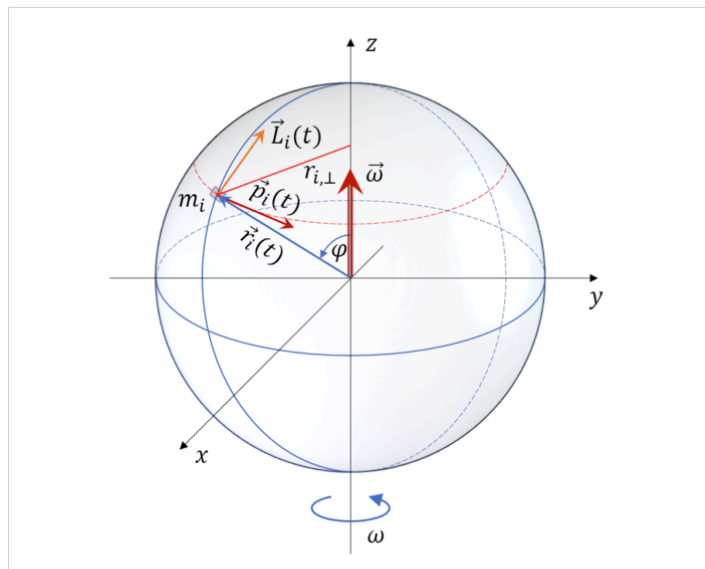
$$\vec{L}_{HTA} = J_{HTA} \cdot \vec{\omega} \quad (59)$$

5. Eigendrehimpuls des starren Körpers bei Rotation durch Hauptträgheitsachse durch seinen Massenmittelpunkt

$$\vec{L} = J_{MMP} \cdot \vec{\omega} \quad (60)$$

6. Die Drehimpulsänderungsrate ist gleich der Summe aller externen Drehmomente, die auf ihn wirken

7. Ist die Summe der externen Drehmomente auf ein System gleich 0, dann bleibt der Drehimpuls des Systems erhalten



Der Drehimpulsvektor  $\vec{L}_i$  eines beliebigen Massenelements  $m_i$ , berechnet gegenüber dem Zentrum der Kugel, steht senkrecht zur Ebene die von  $\vec{r}_i$  und  $\vec{p}_i$  aufgespannt wird. Er ist im Allgemeinen nicht parallel zu  $\vec{\omega}$ .  $r_{i,\perp}$  ist der Abstand des Massenelements  $m_i$  zur Drehachse.

### 3.5 Energie Drehimpuls

1. Kinetische Rotationsenergie des starren Körpers

$$W_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2} \cdot J_{\vec{\omega}} \cdot \omega^2 \quad (61)$$

2. Leistung eines Drehmoments

$$P_{\vec{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}_{\vec{F}} \cdot \omega \quad (62)$$

3. Arbeit eines Drehmoments für Drehung von  $\theta_1$  nach  $\theta_2$  bei fester Achse

$$W_{\vec{\mathcal{M}}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{M}_{\vec{F}}(\theta) \cdot d\theta \quad (63)$$

4. Arbeit des Drehmoments und kinetische Rotationsenergie bei fester Drehachse

$$W_{\vec{\mathcal{M}}} = \Delta W_{\text{kin,rot}} \quad (64)$$

5. Kinetische Energie des starren Körpers bei freier ebener Bewegung

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{kin,trans,MMP}} + W_{\text{kin,rot,MMP}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{MMP}}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{\text{MMP}} \cdot \omega^2 \quad (65)$$

### 3.6 Eigen- und Bahndrehimpuls

1. Zerlegung des Drehimpuls in Bahn- und Eigendrehimpuls bei freier ebener Bewegung

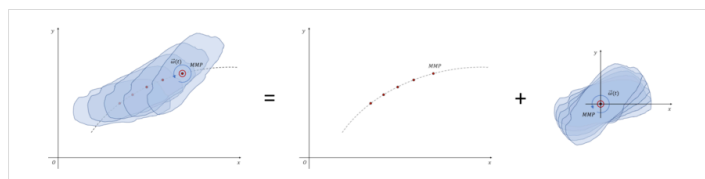
$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{\text{Bahn}} + \vec{L}_{\text{MMP}}^{\text{Eigen}} \quad (66)$$

2. Bahndrehimpuls eines starren Körpers der Masse  $m$  bezüglich  $O$

$$\vec{L}_O^{\text{Bahn}} = \vec{r}_{\text{MMP}} \times m \cdot \vec{v}_{\text{MMP}} \quad (67)$$

3. Eigendrehimpuls bezüglich Hauptträgheitsachse entlang  $\vec{\omega}$

$$\vec{L}_{\text{MMP}}^{\text{Eigen}} = J \cdot \vec{\omega} \quad (68)$$

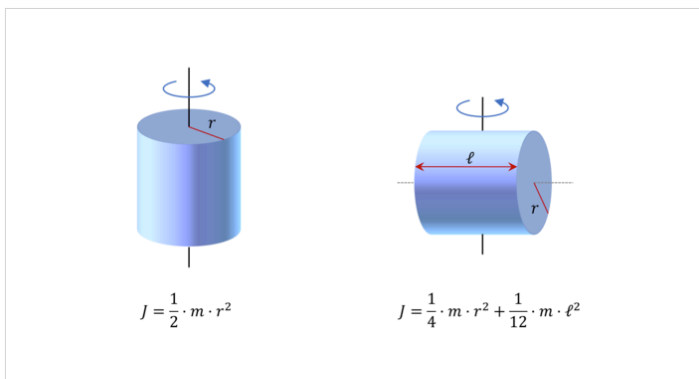


Der Drehimpuls eines starren Körpers, der eine freie ebene Bewegung vollzieht, lässt sich in einen Bahndrehimpuls und einen Eigendrehimpuls zerlegen.

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{\text{Bahn}} + \vec{L}_{\text{MMP}}^{\text{Eigen}}$$

$$= \vec{r}_{\text{MMP}} \times m \cdot \vec{v}_{\text{MMP}} + J \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{\text{Bahn}} + \vec{L}_{\text{MMP}}^{\text{Eigen}} \quad \text{Zerlegung des Drehimpuls in Bahn- und Eigendrehimpuls bei freier ebener Bewegung bezüglich } O$$



Rotation eines Vollzylinders, einmal um seine Längsachse, einmal um seine mittlere Querachse. Angegeben sind die entsprechenden Massenträgheitsmomente. In beiden Fällen ist die Rotationsachse eine Symmetrieachse des Körpers. Der Drehimpulsvektor ist also unabhängig von der Wahl des Referenzpunkts und ist parallel zu  $\omega$ .

### 3.7 Notizen

### 3.8 Notizen

### 3.9 Notizen