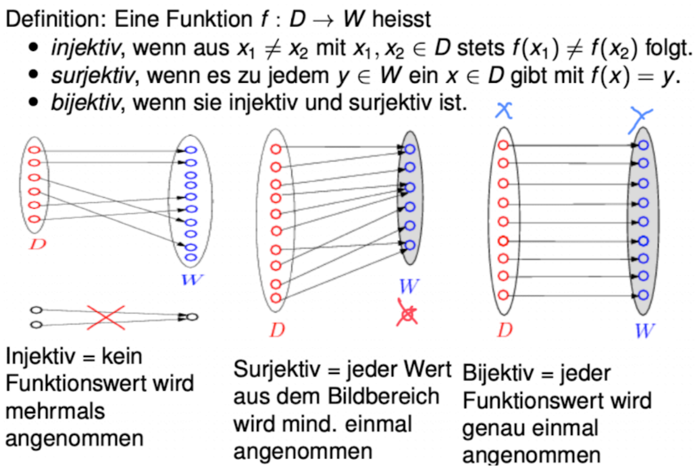
1 Funktionen

1.1 Begriffe

1. Symmetrie: Ungerade Funktionen sind dem Ursprung symmetrisch.
2. Grad eines Polynoms: höchste Potenz
3. Koeffizienten eines Polynoms: Multiplikationen mit x
4. Leitkoeffizient: Koeffizient des x mit höchster Potenz
5. Funktionen Bijektiv machen: Falls nicht surjektiv: Bildmenge verkleinern. Falls nicht injektiv: Definitionsbereich verkleinern



1.2 Nullstellen

1. Einfache Nullstellen: $x \to$ schneidend
2. Doppelte Nullstellen: $x^2 \to$ Berührungspunkt
3. Dreifache Nullstellen: $x^3 \to$ Sattelpunkt
4. Mitternachtsformel: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac}$

1.3 Polynomdivision

1. Polynom durch erste Nullstelle teilen, dann das Ergebniss mal die geteilte Klammer rechnen und vom Polynom abziehen.

$p(x): 2x^3 + 11x^2 - 12x + 63 : (x+7) = 2x^2 - 3x + 9$
$-(2x^3 + 14x^2)$
$0 - 3x^2 - 12x + 63$
$-(-3x^2 - 21x)$
$0 + 9x + 63$
$-9x - 63$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \{x_{1,2} \notin \mathbb{R}\}$

1.4 Gebrochenrationale Funktionen

Fette Zeilen in Formel einsetzen, auf Klammerausdrücke kommen: $(x-1)(x+2)$ etc. und herausstreichen

1. Definition $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
2. Echt gebrochen $= \frac{x^2}{x^3}$
3. unecht gebrochen $= \frac{x^3}{x^2}$
4. Nullstelle falls $\mathbf{p(x_0) = 0}$ $\quad q(x_0) \neq 0$
5. Polstelle falls $p(x_0) \neq 0$ $\quad \mathbf{q(x_0) = 0}$ oder $\frac{\text{Zahl}}{0}$
6. Hebbare Definitionslücke: $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) = 0$
7. Asymptotisches Verhalten echt gebrochen: x $= \infty$ und y $= 0$
8. Asymptotisches Verhalten unecht gebrochen: Funktion als Summe eines Polynoms schreiben und Polynomdivision anwenden, $f(x) = g(x) + r(x)$
$g(x) =$ Asymptode y in ∞ r(x) = Rest der Polynomdivision. Nur Gerade vor Rest Polydiv.

1.5 Stetigkeit

Um die Stetigkeit einer Funktion nachzuweisen müssen obere und unterer Grenzwert gleich $f(x_0)$ sein

1. linksseitiger Grenzwert: $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$
2. rechtsseitiger Grenzwert: $\overline{x_n} = x_0 + \frac{1}{n}$
3. Schreibweise: $\lim_{x \to x_0} = x_n == \overline{x_n}$
4. Folgende Funktionen sind stetig: Polynome, gebrochenrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Logarythmusfunktionen, Trigonometrische Funktionen
5. Jede differenzierbare Funktion ist stetig, nicht umgekehrt

1.6 Differenzierbarkeit

1. Eine Funktion ist differenzierbar, falls der Graph keine Sprüng und keine Knicke aufweist.
2. Eine Funktion ist an der stelle x_0 differenzierbar wenn: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

1.7 Extremalwertaufgaben

1. Die zu Optimierende Grösse als Funktion darstellen
2. Lösen von $f'(x) = 0$
3. Argumentieren wiso Minimum oder Max mit Kurvendisskussion

2 Ableitungen

2.1 Ableitungsregeln

1. Differentialquotient:
   $f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$
2. Produktregel
   $y = u(x) \cdot v(x) \to y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
3. Quotientenregel: $y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - v'(x)\cdot u(x)}{[v(x)]^2}$
4. Kettenregel: $f'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$ |aussen * innen|
5. Logarithmisch: $ln(x) = f'(x) = \frac{1}{x}$ Achtung Kettenregel
6. Reziproke Regel $-\frac{h'(x)}{h^2(x)}$
7. e-Funktion: $f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$
8. Inversenregel $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
9. Wurzelregel wenn $f(x) = \sqrt{h(x)}$ dann $\frac{h'(X)}{2\cdot\sqrt{h(x)}}$
10. Exponentialfunktionen $a^{x\prime} = ln(a) \cdot a^x$
11. veralg. Expo. Funktion $f'(x) = \frac{ln(a)}{\Sigma} \cdot f(x)$

2.2 Wichtige Ableitungen

$exp'(x) = exp(x)$
$ln'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x \to f'(x) = ln(a) \cdot a^x$
$f(x) = \frac{1}{x} \to f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = y_0 \cdot a^{\frac{x-x_o}{\Sigma}} \to f'(x) = \frac{ln(a)}{\Sigma} \cdot f(x)$
$sin'(\alpha) = cos(\alpha)$
$cos'(\alpha) = -sin(\alpha)$
$tan'(\alpha) = 1 + tan^2(\alpha)$
$cot'(\alpha) = -1 - cot^2(\alpha)$
$arcsin'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$
$arccos'(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$
$arctan'(\alpha) = +\frac{1}{1+\alpha^2}$
$arccot'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$
$arsinh'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$
$arcosh'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$
$artanh'(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha^2}$
$arcoth'(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha^2}$
$abs'(x) = sgn(x)$
$sgn'(x) = 0$

3 Integral

1. Definition Integral
   $I = \int_{x0}^{xE} f(x)dx$
2. Negativer Int. und vertauschen der start und Zielwerte bei fallender Steigung!!

3.0.1 Werte

1. Wert des Integrals I
2. Integral-Haken $\int$
3. Integrand $f(x)$
4. untere Integrationsgrenze x_0
5. obere Inegrationsgrenze x_E
6. Mass / Differentialsymbol dx

3.0.2 Newton-Leibniz-Formel

1. Definition Integral
   $\int_{x0}^{xE} f(x)dx = F(x_E) - F(x_0)$

3.0.3 Rechenregeln

1. Faktorregel
   $\int a \cdot g(x)dx = a \cdot \int g(x)dx$
2. Summenregel
   $\int (g(x) + h(x))dx = \int g(x)dx + \int h(x)dx$
3. Linearität
   $\int (a \cdot g(x) + b(x))dx = a \cdot \int g(x)dx + b \cdot \int h(x)dx$
4. Exponentialglg. $f(x) = x^p \to F(x) = \frac{1}{1+p} \cdot x^{p+1} + C$
5. Exponentialglg: $\int a^x dx = \frac{1}{ln(a)} + c$
6. Euler: $\int e^x dx = e^x + c$
7. Bruch: $\int \frac{1}{x} = ln(|x|) + c$
8. Vorgehen: Multiplikation erneut schreiben, exponent um 1 erhöhen und mal 1 / erhöhter Exponent

3.0.4 Stammfunktionen

$\int xdx = sinx$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
$\int \cosh(x)dx = \sinh(x)$
$\int \sinh(x)dx = cosh(x)$

3.1 Standard-Integrale

$\int m\ dx = m \cdot x + q$
$\int x^p\ dx = \frac{1}{1+p} \cdot x^{p+1} + C$
$\int a^x\ dx = \frac{1}{ln(a)} \cdot a^x + C$
$\int e^x\ dx = e^x + C$
$\int \frac{1}{x}\ dx = ln(\mid x \mid) + C = ln\frac{x_E}{x_0}$
$\int \frac{1}{x^n} = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$
$\int cos(x)\ dx = sin(x)$
$\int sin(x)\ dx = -cos(x)$
$\int cosh(x)\ dx = sinh(x)$
$\int sinh(x)\ dx = cosh(x)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctan(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = arsinh(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsin(x)$
$\int \frac{1}{cos^2(x)}\ dx = tan(x)$
$\int \frac{1}{sin^2(x)}\ dx = -cot(x)$

4 Folgen und Reihen

Bei Folgen werden einzelne Glieder aufgezählt, bei Reihen die Summe der Glieder.

4.1 Arithmetische Folgen und Reihen

1. Definition: $a_k - a_{k-1} = d$ d = konstant
2. Rekursives Bildungsgesetz: $a_k = a_{k-1} + d$
3. Explizites Bildungsgesetz: $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$
4. Explizites Bildungsgesetz der arithmetischen Reihe: $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n \cdot a_1 + \frac{(n-1) \cdot n \cdot d}{2}$
5. Gausssche Summenformel: 1+2+...+$n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

4.2 Geometrische Folge und Reihe

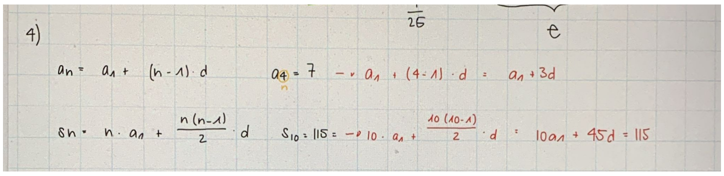
1. Definition: $\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \rightarrow$ q = konstant
2. Rekursives Bildungsgesetz: $a_k = a_{k-1} \cdot q$
3. explizites Bildungsgesetz: $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$
4. Explizites Bildungsgesetz der geometrischen Reihe: $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$
5. Wert der geometrischen Reihe: falls$|q| < 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{1-q}$

4.3 Beschränkte Folgen

Besitzt eine Folge einen Grenzwert ist sie beschränkt

1. Falls $\frac{n^3}{n^2} \rightarrow$ unbeschränkt (3>2) und divergent
2. nach oben Beschränkt: $a_n \leq a_o$
3. nach unten beschränkt: $a_n \geq a_U$
4. Grenzwert berechnen: n aus Zähler bringen $\frac{12n}{1+4n} = \frac{n(12)}{n(\frac{1}{n}+4} = \frac{12}{\frac{1}{n}+4} = \frac{12}{3} = 3$
5. Falls a_n einen Grenzwert a besitzt, $\rightarrow a_n$ konvergiert gegen a
6. Falls a_n keinen Grenzwert besitzt, $\rightarrow a_n$ heisst divergent

   $\rightarrow$ eine Konstante Folge ist konvergent
   $\rightarrow$ jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt
   $\rightarrow$ eine monotone reelle Zahlenfolge konvergiert, wenn sie beschränkt ist
7. Monotonie nachweisen: $a_{n+1} - a_n \leq 0 \rightarrow$ Monoton wachsend. ODER: falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $a_n \geq 0 \rightarrow$ monoton wachsend



Beispiel	Trick
$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6 - n^3}{7n^6 + n^5 - 3}$	erweitern mit $\frac{1}{n^k}$ wobei k der grösste Exponent ist
$\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n-1} + 2^{n+1}}{7^n + 5}$	erweitern mit $\frac{1}{a^k}$, wobei a die grösste Basis und k der kleinste Exponent ist
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$	erweitern mit $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$
$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n}$	umformen zu $\lim_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a = e^a$

4.4 Elementare Grenzwerte

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$
2. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 0 \rightarrow a = 0, 1 \rightarrow a > 0$
4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
5. $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

5 Summezeichen

5.1 Eigenschaften

1. Homogenität

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1}$$

2. Additivität:

$$\sum_{i=1}^{m} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{2}$$

3. Konstanter Summand

$$\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a \tag{3}$$

4. Teleskopsumme

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1 \tag{4}$$

5. Spezielle Reihen

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{6}$$

6 Kurvendisskussion

in 1. Ableitung Nullstellen berechnen und in 2. Einsetzen. Für y- Koordinate Nullstelle in Grundfunktion einsetzen
1. Ableitung ist eine Tangente an Funktion.

1. Krümmungsverhalten: Falls $f''(x_0) < 0 \to$ Graf macht eine Rechtskurve
2. Lokales Maximum: falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$
3. Lokales Minimum: falls: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
4. Wendepunkt: falls: $f''(x_0)$ und $f'''(x_0) \neq 0$
5. Sattelpunkt: falls: Wendepunkt und $f'(x_0) = 0$

6.1 Newton-Verfahren

1. $f(x) = g(x) \to$ Funktionen gleichsetzen
2. $h(x) = g(x) - f(x) \to$ Funktionen auf eine Seite
3. Nullstellen von $h(x)$ finden
4. $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x)}{h'(x)} \to$ Aufstellen x_n sind Nullstellen
5. $x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} \quad x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)}$

6.2 Beispiel Kurvendisskussion

Beispiel: $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

3. **Kurvendiskussion eines Polynoms**

a) Alle Punkte, deren Ableitung null ist, sind Kandidaten für lokale Extrema. Die 1. und 2. Ableitung sind:

$$p'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$
$$p''(x) = 6x + 2$$

Die Nullstellen der 1. Ableitung sind

$$3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{3}.$$

Wir berechnen zuerst die y-Koordinaten dieser Punkte:

$$p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0,$$
$$p\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{32}{27}.$$

Wir setzen diese Kandidaten in der 2. Ableitung ein:

$$p''(-1) = 6 \cdot (-1) + 2 = -4 < 0,$$
$$p''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 4 > 0.$$

Das heisst, der Punkt $M_1(-1|0)$ ist ein lokales Maximum und der Punkt $M_2\left(\frac{1}{3}|-\frac{32}{27}\right)$ ein lokales Minimum.

b) Kandidaten für Wendepunkte sind die Nullstellen der 2. Ableitung:

$$P''(x) = 6x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = -\frac{1}{3}$$

Die y-Koordinate dieses Wendepunktes ist

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{16}{27},$$

also $W\left(-\frac{1}{3}|-\frac{16}{27}\right)$. Um ganz save zu sein, dass W wirklich ein Wendepunkt ist, muss man noch verifizieren, dass

$$p'''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 \neq 0 \checkmark$$

c) Wir haben bereits mit $M_1(-1|0)$ eine doppelte Nullstelle, d.h. wir machen die Polynomdivision

$$p(x) : (x+1)^2 =$$

$$\begin{array}{l}
(\ x^3 + x^2 - x - 1) : (x^2 + 2x + 1) = x - 1 \text{und somit} \\
\underline{-x^3 - 2x^2 - x} \\
\quad -x^2 - 2x - 1 \\
\quad \underline{\ \ x^2 + 2x + 1} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$p(x) = (x+1)^2(x-1).$$

d) Es bleibt, den Graphen des Polynoms $p(x)$ schön zu zeichnen, wie in Abb. 1 dargestellt.

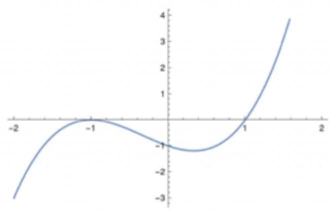


Abbildung 1: Graph des Polynoms $p(x)$.

6.3 Notizen

6.4 Notizen

6.5 Notizen

6.6 Notizen

6.7 Notizen

6.8 Notizen

6.9 Notizen