Formelsammlung

Partielle Integration

- Unbestimmtes Integral:

$$\int u(x) \cdot v(x)\, dx = \left[U(x) \cdot v(x) \right] - \int U(x) \cdot v'(x) \quad + C$$

Bei unbestimmte Integrale

- Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x) \cdot dx = U(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b U(x) \cdot v'(x)$$

LIATE
- L: Logarithmische Funktion $(\ln(x))$
- I: Inverse Winkelfunktion $(\arctan(x))$
- A: Algebraische Funktionen $(x, 3x^2, 4x^7)$
- T: Trigonometrische Funktionen $(\sin(x), \cos(x))$
- E: Exponentialfunktion (e^x)

1. $u(x)$, $v(x)$ definieren
2. $u(x) \to U(x) \Rightarrow$ Integrieren
   $v(x) \to v'(x) \Rightarrow$ Ableiten
3. Formel anwenden: $U \cdot v - \int U \cdot v'\, dx$
4. Integral auflösen

Substitution

- Unbestimmtes Integral:

$$\int f(g(x))\, g'(x) = F(g(x)) + C$$

- Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

1. Mögliche Substitution finden:
   $\int \frac{6}{(2-3x)^2}\, dx \qquad t = 2-3x$
2. Substitution ableiten.
   $\frac{dt}{dx} = -3$
3. Ableitung nach dx lösen:
   $dx = -\frac{1}{3}\, dt$
4. Integral mit Substitution:
   $-\int \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{t^2}\, dt$
5. Integrieren:
   $= -2 \int t^{-2}\, dt = +2t^{-1}$
6. Substitution einsetzen:
   $= \frac{2}{(2-3x)}$

Partialbruchzerlegung

$P(x)$, $q(x)$ ⇒ Polynome

$\frac{x^4}{x^5}$ ⇒ echt gebrochen $\frac{x^3}{x^1}$ ⇒ unecht gebrochen

1. Faktor falls unecht gebrochen mittels Polynomdivision in echt gebrochen Faktor bringen

2. Nenner auf Nullstellen bringen:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x-21} = \int \frac{2x+4}{(x-3)(x+7)}$$

Mitternachtsformel:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3. Unbestimmte Koeffizienten über zerteilte Nenner:

$$\int \frac{2x+4}{(x-3)(x+7)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+7)}$$

4. Mit dem Nenner multiplizieren:

$$2x+4 = A(x+7) + B(x-3)$$

5. X-Wählen und einsetzen von A, B, C zu berechnen:

Nullstellen vom Nenner

$x = -7$: $-10 = -10B$

$1 = B$

$x = 3$: $10 = 10A$

$1 = A$

6. Integral mit berrechnetem Koeffizienten ausrechnen.

$$\int \frac{1}{x-3} + \int \frac{1}{x+7} = \underline{\underline{\ln(|x-3|) + \ln(|x+7|) + C}}$$

Grenzwerte -> Bernoullie & L'hopital

$$\lim\left(\frac{0}{0}\right) \text{ oder } \lim\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1. Der Grenzwert einsetzen 2. Schauen ob $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ oder $\left(\frac{0}{0}\right)$ oder "$0\cdot\infty$" entsteht

Die Regel kann mehrmals angewendet werden

Bei Integralen:
Zuerst Integral lösen!
Bsp: $\int_a^\infty f(x)dx \Rightarrow \left[f(x)dx\right]_a^t$

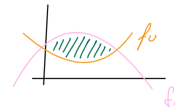
Bsp

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] ↯ \xrightarrow{\text{1. Anwendung}} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{x'} = \lim \frac{e^x}{1} = e^x = \underline{1}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2}{1-\cos(x)} = \left[\frac{0}{(1-1)}\right] ↯ \xrightarrow{\text{1. Anwendung}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{\sin(x)}\cdot\cos(x)}{\cancel{\sin(x)}} = 2\cdot\cos(x) = \underline{\underline{2}}$
- $\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x) = [0\cdot(-\infty)] ↯ \underset{\text{1. Anwendung}}{\longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{2. Anwendung}}{\longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^2} = \lim_{x\to 0} (-x) = \underline{\underline{0}}$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

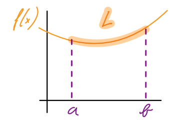
$$F = \int_a^b \left(f_o(x) - f_u(x)\right) dx$$

a, b = Schnittpunkt
f_o = Obere Kurve
f_u = Untere Kurve



Bogenlänge einer Kurve

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$



Rotationskörper

- Mantelfläche:

$$A = 2\cdot\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx \quad \text{x-Achse}$$

- Volumen.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \quad \text{x-Achse}$$

$$V = \pi \int_a^b g^2(y)\, dy = 2\pi \int_a^b x\cdot f(x)\, dx \quad \text{y-Achse}$$

- Schwerpunkt einer Fläche:

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x\cdot f(x)\, dx \quad \text{x-Koordinate}$$

Fläche

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx \quad \text{y-Koordinate}$$

- Schwerpunkt einer Fläche zwischen 2 Kurven:

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x\cdot\left(f_o(x) - f_u(x)\right) dx \quad \text{x-Koordinate}$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b \left(f_o^2(x) - f_u^2(x)\right) dx \quad \text{Y-Koordinate}$$

- Schwerpunkt eines Rotationskörper:

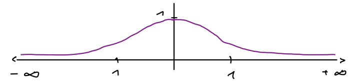
$$x_s = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x\cdot f^2(x)\, dx \qquad y_s = 0 \quad \text{Rotation x-Achse}$$

$$y_s = \frac{\pi}{V_y} \int_c^d y\, g^2(y)\, dy \qquad x_s = 0 \quad \text{Rotation y-Achse}$$

Uneigentliche Integrale

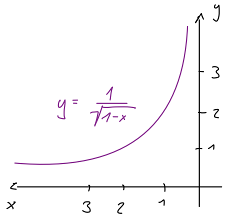
· 1: Unbeschränktes Integral.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$



·2: Unbeschränkte Integrand (Pol-Stelle)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$



Bsp

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^4$$

Kann nicht berechnet werden, weil $x=1$ nicht definiert ist.
⇒ Deshalb von 0–1 & 1–4 Integrieren

$$\Rightarrow \lim_{b\to1}\left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^b + \lim_{a\to1}\left[\frac{-1}{x-1}\right]_a^4 = \infty + \infty = \underline{\underline{\infty}} \to \text{Divergent}$$

Falls der Grenzwert des Intervall existiert, heisst das uneigentliche Integral Konvergent, andernfalls heisst es divergent.

Reihen und Konvergenz

	Arithmetisch	Geometrisch
Folge	$a_n = A + (n-1)\cdot d$	$a_n = A\cdot q^{n-1}$
Reihe	$S_n = n\cdot\left(A + \frac{(n-1)}{2}\cdot d\right)$	$S_n = A\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$

Wurzelkriterium

$a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und die Folge der Quotienten $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ Konvergiert dann gilt:

1. $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1 \to \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent

$$\sum\left(\frac{2}{k}\right)^k : \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{2}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{k}\right) = 0 < 1 = \text{konvergiert}$$

2. $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} > 1 \to \sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent

$$\sum 2^{(-1)^k - k} : \lim\sqrt[k]{2^{(-1)^k - k}} = \lim\left(2^{\frac{(-1)^k - k}{k}}\right) = \frac{1}{2} > 1 = \text{Divergiert}$$

Leibnitzkriterium

Alternierende Reihe einer Monotone Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\cdot(-1)^{k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \to \text{alternierende Reihe} = \text{konvergent}$$

$$\sum \frac{1}{k} \to \text{Divergent}$$

Majorantenkriterium (Abschätzung nach oben mit konvergente Reihe)

$$\sum_{k=1}^\infty b_k = \text{konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty b_k = \text{absolut konvergent}$$

$$0 \leq a_k \leq b_k$$

Bsp

$$\sum_{k=1}^\infty \overbrace{\frac{k}{k^3+1}}^{\text{kleiner}} < \sum_{k=1}^\infty \overbrace{\frac{k}{k^3}}^{\text{grösser}} = \sum_{k=-1}^\infty \frac{1}{k^2} \to \text{konvergiert}$$

Konvergiert auch

Minorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| = \infty \Rightarrow \sum_{k=1} b_k = \infty$$

Bsp

$$\sum_{k=1}^\infty \overbrace{\frac{2k+1}{3k^2+4k-1}}^{\text{grösser}} > \sum_{k=1}^\infty \overbrace{\frac{2k}{3k^2+4k}}^{\text{kleiner}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{3k+4} > \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{4k+4} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1} \to \text{Divergiert}$$

divergiert auch

Quotientenkriterium

Grenzwert des Verhältnis nach folgender Reihen $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und die Folgen der Quotienten $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ konvergiert dann gilt

1. $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \to \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent

2. $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \to \sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent

Integralkriterium

- Vergleich mit einem uneigentlichen Integral ist $f(x) > 0$ und monoton fallend auf $[m, \infty]$ dann haben die Reihen $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ und das eigentliche Integral $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ das gleiche Konvergenz verhalten.

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(x) = \int_m^{\infty} f(x)\,dx = \text{konvergiert}$$

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|)\Big|_1^{\infty} = \infty \to$ divergiert

2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \ln(k)^2} \longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(2)^2}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln(2)}^{\infty} = \frac{1}{\ln(2)} =$ konvergent

Absolute konvergenz

Konvergenz der Reihe mit Absolutbeträgen der Folgeglieder

Die Reihe $\sum a_n$ heisst konvergent $= \sum |a_n|$ auch konvergiert

Ergänzung zu Majer- und Minorantenkriterium

Beispiele:

$\sum \frac{1}{n}$: Divergiert

$\sum \frac{1}{n^2}$: konvergiert

$\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$: $\alpha \leq 1$: Divergiert; $\alpha > 1$: konvertiert

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$: konvertiert

$\sum \frac{1}{n!}$: konvertiert

$\sum \frac{1}{n!} \cdot x^n$: Divergiert

$x = 1 \Rightarrow$ konvertiert

$\sum \frac{x^n}{n}$: Divergiert

$x = 0$ oder $x = 1 \Rightarrow$ konvertiert

Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_n + a_n (x - x_0)^1 + a_n (x - x_0)^n$$

x_0 = Entwicklungspunkt der Reihe

Bsp

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^n}{n!} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{n!} \text{ alles ohne } x \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} = \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-3)^3}{3} \quad \begin{cases} a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Konvergenzradius

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

1. a_n herausfinden
2. Formel einsetzen
3. radius in x_0 einsetzen um Ränder zu bekommen
4. Schauen ob die Ränder konvergieren oder divigieren
5. LSG aufschreiben

Bsp

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x_0 - 1)^n = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \pm \dots \quad \begin{cases} a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{a_n} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{(-1)^{n+2}}}_{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

↳ Kehrwert !

$r = 1 \quad x_0 = 1$

$x_1 = x_0 - r = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \sum -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\sum \frac{1}{n} \to$ Divergiert

$x_2 = x_0 + r = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \sum 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \pm = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow$ konvergiert

Divergiert oder konvertiert:

divergiert : $<$

konvergiert : $\leq$

LSG:

$0 < x \leq 2$

Potenzreihe definitiv konvergiert:

$(x_0 - r, x_0 + r)$

Geometrische Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{(1-x)^1}, \quad |x| < 1 = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

Ableitung : $0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

Ableitung : $0 + 2 + 6x + 12x^2$

$y' = (1-x)^{-2}$

$y'' = -2(1-x)^{-3}$

Allg. Ableitung

Produkteregel

$$f''(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \left(2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x \dots \right)$$

Rechnen mit Potenzen

Bsp

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots \qquad g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots$

- Addition:

$$f(x) + g(x) = (1+1) + (x-x) + (x^2+x^2) + (x^3-x^3) + (x^4+x^4)$$
$$= 2 + 2x^2 + 2x^4$$

- Subtraktion:

$$f(x) - g(x) = (1-1) + (x+x) + (x^2-x^2) + (x^3+x^3) + (x^4-x^4)$$
$$= 2x + 2x^3 \ldots$$

- Multiplikation:

$$f(x) \cdot g(x) = 1 + (1-1)x + (1+1-1)x^2 + \ldots$$
$$= 1 + x^2 + \ldots$$

Differentation und Integration von Potenzen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

Konstante

Ableitung

Ableitung: $$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \cdot (k+1)\, x^k$$

Konstante

Index verschieben

Integration: $$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} \cdot x^{k+1} + C$$

- Potenzreihen:
  - Dürfen summandweise differenziert & integriert werden
- Korvegenzradius:
  - Bleibt unverändert
- Integrationskonstante:
  - C bestimmt man durch einsetzen von x

Taylorreihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{\text{Vorfaktor}} (x-x_0)^k$$

Bsp

$f(x) = \ln(x), \quad x_0 = 1$

(1) Funktion Ableiten

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$

$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} = -6x^{-4}$

(2) x_0 in Ableitung einsetzen

$f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f''(1) = -1$

$f'''(1) = 2$

$f^{(4)}(1) = -6$

$\left.\begin{array}{l} f''(1) \\ f'''(1) \\ f^{(4)}(1) \end{array}\right\} (k-1)!$

$$T(x) = \frac{f(1)}{\underbrace{0!}_{\frac{0}{1}}} \cdot (x-1)^0 + \frac{f'(1)}{\underbrace{1!}_{\frac{1}{1}=1}} \cdot (x-1)^1 + \frac{f''(1)\,(x-1)^2}{\underbrace{2!}_{-\frac{1}{2}}} + \frac{f'''(1)}{\underbrace{3!}_{\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}} (x-1)^3$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n!} (k-1)! \cdot (k-1)^k = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (x-1)^k$$

Bsp

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{3^k \cdot k^2}$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{3^k \cdot k^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1} \cdot (k+1)^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left| \frac{\cancel{(-1)^k}}{\cancel{3^k} \cdot k^2} \cdot \frac{\cancel{3^k} \cdot 3 \cdot (k+1)^2}{\cancel{(-1)^k} \cdot (-1)} \right|$$

Umkehrfunktion

$$= \left| \frac{3(k+1)^2}{-k^2} \right| = \frac{3(k+1)^2}{k^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3\left(1+\frac{1}{k}\right)^2}{1} = \underline{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{(k+1)\cdot 3^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k+1)\cdot 3^k}$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+2)\cdot 3^{k+1}}$$

Notiz:

Restgliedabschätzung

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Bsp

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Wie gross ist der Fehler, wenn wir die Reihe bei n-ter Stelle abbrechen?

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\varepsilon}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$x=1$: $R_n(1) = \frac{e^1}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{3}{(n+1)!}$

$n=5$: $R_5(1) \approx \frac{3}{6!} \approx \frac{1}{240} \approx \underline{0.5 \cdot 10^{-2}}$

In der zweiten Nachkommastell ist der Fehler kleiner als 0.5

das heisst: $e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.71667$

Differentialgleichung Überblick

Ordnung

$2y' - 4y = 5x$ DGL 1. Ordnung

$2''' - 4y = e^x$ DGL 3. Ordnung

" Je nach Ordnung wird ein anderes Losungsverfahren angewendet "

Störfaktor

$3y'' + 2y' - 4y = 0$ Homogenes DGL

$3y'' + 2y' - 4y = 5x$ Inhomogenes DGL

$\hookrightarrow g(x)$

Darstellung

$5y'' - y = \sin(x)$ expliziten Darstellung

$5y'' - \sin(x) = y$ impliziten Darstellung

Vor lösen des DGL die explizite Darstellung

Linearitat

$2y'' - 3y' + 5y = e^x$ Linearen DGL

$3y' \cdot y^2 + x = 5y$ nicht linearen DGL

Bsp

Art	Gleichung	Lösungsatz
Allg. explizite DGL	$y' = f(x,y)$	-
Unbestimmtes Integral	$y' = f(x)$	Integrieren $y = \int f(x)\,dx$
Separierbare DGL	$y' = f(x) \cdot g(x)$	Trennung der Variabeln
Autonome DGL	$y' = g(y)$	Trennung der Variabeln
Lineare DGL inhomogen	$y' + y \cdot f(x) = g(x)$	Variation der Konstanten
Lineare DGL homogen	$y' + y \cdot f(x) = 0$	Trennung der Variabeln

Separierbare DGL

- Separierbar DGL: $y' = f(x) \cdot g(y)$
- Autonom: $y' = g(y)$

Bsp

$y' = x \cdot y$

mit $f(x) = x$

$g(y) = y$

$y' = y(1-y)$

mit $f(x) = 1$

$g(y) = y(1-y)$

Lösungsansatz: Trennung der Variabeln

Vorraussetzung:

A) Separierbar DGL

B) Autonome DGL

C) Lineare, homogen DGL

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad \Big| \; y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad \Big| \cdot dx \; \Big| : g(y)$$

$$\frac{1}{g(y)} \cdot dy = f(x)\,dx \qquad \Big| \int$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

$$G_1(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

$$\Downarrow$$

nach $y(x)$ auflösen

Bsp

$y' = -\frac{x}{y}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad | \cdot y \; | dx$

$y\,dy = -x\,dx \qquad | \int$

$\int y\,dy = -\int x\,dx$

$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = -\frac{1}{2}x^2 + C_2 \qquad | -C$

$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{C_2 - C_1}_{C} \qquad | \cdot 2$

$y^2 = -x^2 + 2C \qquad | \sqrt{\;}$

$y = \pm\sqrt{x^2 + C_3}$

- Die Nullstellen von $g(y)$ sind seperat zu betrachten

y_0, y_1, y_2 seien Nullstellen von $g(y)$.

Dann sind $y = y_0$, $y = y_1$, $y = y_2$ spezielle Lösung der DGL

Bsp Freier Fall mit Luftwiderstand

$y' = 1 - y^2 \longrightarrow$ autonome DGL $\begin{cases} f(x) = 1 \\ g(y) = 1 - y^2 \end{cases}$

Spezielle Lösungen

$1 - y^2 = (1-y)(1+y) = 0 \longrightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

Allg Lösungen

$\frac{1}{(1-y)^2} \cdot dy = dx \qquad | \int$

$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{1-y} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y} = x + C$

$-\ln(1-y) + \ln(1+y) = 2x + C$

$\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = 2x + C \qquad | e^{\square}$

$\frac{1+y}{1-y} \quad e^{2x+C} = e^{2x} \cdot C$

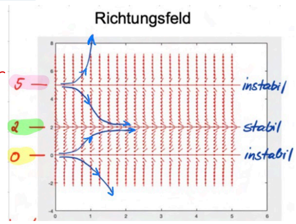
$$\boxed{y = \frac{C \cdot e^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}}$$

Stabilitätsverhalten

Bsp

$y' = y(y-2)(y-5)$

Spez. LSG (Nullstellen)



- Stabil:
  Die spezifischen Lösungen streben zu den spezifischen Lösungen.
- Instabil:
  Die spezifischen Lösungen streben weg von den Lösungen.

Lineare DGL 1. Ordnung

Die DGL heisst linear falls gilt:

$$y' + f(x) \cdot y = \underbrace{g(x)}_{\text{Störfunktion}}$$

Homogen:
falls $g(x) = 0$ ist $\Rightarrow$ Trennung der Variablen

Inhomogen:
falls $g(x) \neq 0$ ist $\Rightarrow$ Trennung der konstanten

---

Lösungsansatz Homogene DGL

- Die homogene Lineare DGL lautet:

$$y' + f(x) \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -f(x) \cdot y$$

- Die allgemeine Lösung ergibt sich durch trennung der Variabeln mit:

$$y(x) = c \cdot e^{-F(x)} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int f(x)\, dx$$

Bsp

$\frac{dy}{y} = -f(x)\, dx \qquad | \int$

$\ln(y) = -F(x) + C \qquad | e^{\square}$

$y = e^{-F(x)} \cdot \underbrace{e^{c}}_{k}$

$y = ce^{-F(x)}$

Lösungsansatz inhomogene DGL

- Die inhomogene DGL lautet:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

- Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Variation der konstanten

$$y(x) = \left[\int g(x) \cdot e^{F(x)}\, dx + C\right] \cdot e^{-F(x)}$$

$$\text{mit} \quad F(x) = \int f(x)\, dx$$

1. Integration der homogene DGL durch Trennung der Variabeln — $y' + f(x) \cdot y = 0$; $y(x) = c \cdot e^{-F(x)}$
2. Variation der konstanten, Einsetzen in inhomogene DGL — $y(x) = c(x) \cdot e^{-F(x)}$; $c'(x) = g(x) \cdot e^{F(x)}$
3. Integration von $C'(x)$ und Einsetzen in die Gleichung für $y(x)$ liefert — $y(x) = \left[\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C\right] \cdot e^{-F(x)}$

Bsp (Lineare DGL 1. Ordnung)

$$y' = \frac{y}{x} + \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\text{Störfunktion}} \quad \text{mit } y(1) = 0$$

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$y' - \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x^2}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln(x) \\ g(x) = \frac{1}{x^4} \end{cases}$

Homogene

$$y_H = c \cdot e^{-F(x)} = c \cdot e^{-(\ln(x))} = c \cdot x$$

Störfaktor

$$y_S = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)}\, dx$$

Stammfunktion

$$= x \cdot \int x^{-4} \cdot e^{-\ln(x)}\, dx$$

$$= x \cdot \int \frac{1}{x^4} \cdot e^{\ln(\frac{1}{x})}\, dx = x \int \frac{1}{x^4} \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \int \frac{1}{x^5} = x \cdot \left(-\frac{1}{4x^4}\right) = \frac{-1}{4x^3}$$

$$y = y_h + y_s = cx - \frac{1}{4x^3}$$

x einsetzen

mit $y(1) = 0$

$0 = C - \frac{1}{4}$

$C = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$

Beispiel DGL fitten

$$\boxed{y' = x - y}$$

1 Schauen ob linear ?

$$y' + y = x$$

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

$$\underbrace{dy + y\,dx = x\,dx}_{\text{Nicht linear}}$$

2 In normal form fitten: $y' + f(x)\cdot y = g(x)$

$$y' + y = x \qquad f(x) = 1 \xrightarrow{\text{Integriert}} F(x) = x$$

normale Form:

$$y' + f(x)\cdot y = g(x) \qquad g(x) = x$$

3 Kochrezept anwenden:

$$y = \left[\int g(x)\cdot e^{F(x)}\,dx + C\right]\cdot e^{-F(x)}$$

$$= \left[\int x\cdot e^{x}\,dx + C\right]\cdot e^{-x}$$

4 Partielle Integration

$$v = x \qquad dv = 1$$
$$u = e^x \qquad U = e^x$$

$$\left[e^x\cdot x\right] - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

5 Alles auf 3 & 4 zusammensetzen

$$y = \left[x\cdot e^x - e^x + C\right]\cdot e^{-x}$$

6 Ausmultiplizieren

$$y = x - 1 + Ce^{-x}$$

7 Anfangswert einsetzen & C bestimmen

$$y(0) = 1 \qquad 1 = 0 - 1 + Ce^{-0}$$

$$1 = -1 + C \quad |+1$$

$$2 = C$$

8 C in Funktion einsetzen

$$\underline{y = x - 1 + 2e^{-x}}$$

Beispiele DGL

$$\boxed{y' = 1 - y}$$

- Autonom, es taucht keine Funktion von "x" auf.
  - ↳ Somit auch separierbar

$$\Rightarrow y' = \underbrace{1}_{f(x)}\cdot\underbrace{(1-y)}_{g(y)} \;\to\; \frac{1}{(1-y)}\,dy = dx$$

- ebenfalls linear, weil das y linear ist ⇒ inhomogen

$$\boxed{y = x - y^2}$$

- nicht separierbar
- nicht autonom
- nicht linear ⇒ $y' + y^{2} = x$
  - ↳ somit nichts davon

$$\dot N(t) = k\cdot N(t)\cdot(A - N(t)) \to y' = y(1-y) \to \frac{1}{y(1-y)}\,dy = dx$$

- Autonom
  - ↳ separierbar
- Nicht linear, denn wenn man es ausmultipliziert gibt es $N^2(t)$

$$\boxed{y' + y^2 = (xy)^2}$$

$$y' + y^2 = x^2y^2 \quad |-y^2$$

$$y' = x^2y^2 - y^2$$

$$y' = y^2(x^2-1)$$

$$f(x) = (x^2-1)$$

$$g(y) = y^2$$

→ Separierbar

Eulerisches Verfahren

$x_1 = x_0 + 1\Delta x$ | $y_1 = y_0 + \Delta x \cdot f(x_0, y_0)$
$x_2 = x_0 + 2\Delta x$ | $y_2 = y_1 + \Delta x \cdot f(x_1, y_1)$
$x_3 = x_0 + 3\Delta x$ | $y_3 = y_2 + \Delta x \cdot f(x_2, y_2)$

Bsp

Anfangswert Problem:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{t + x} & \rightarrow y' = \sqrt{t + y} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

- $x(1.2)$ → an $t = 1.2$ annähern
- 4 Schritte
- Schrittweite $h = 0.05$

① x_0 & y_0 aus Anfangswert übernehmen

$x(1) = 1$

$x_0 = 1$

$y_0 = 1$

② x_1 bis x_4 berechnen

$x_1 = x_0 + 1\Delta x = 1 + 1 \cdot 0.05 = \underline{1.05}$
$x_2 = x_0 + 2\Delta x = 1 + 2 \cdot 0.05 = \underline{1.1}$
$x_3 = x_0 + 3\Delta x = 1 + 3 \cdot 0.05 = \underline{1.15}$
$x_4 = x_0 + 4\Delta x = 1 + 4 \cdot 0.05 = \underline{1.2}$

③ y_1 bis y_4 berechnen → $x_1 - x_4$ einsetzen

$f(x) = \sqrt{x + y}$

$y_1 = y_0 + \Delta x\, f(x) = 1 + 0.05(\sqrt{1+1}) = \underline{1.07}$
$y_2 = y_1 + \Delta x\, f(x_1, y_1) = 1 + 0.05(\sqrt{1.1 + 1.07}) = \underline{1.14}$
$y_3 = y_2 + \Delta x\, f(x_2, y_2) = 1 + 0.05(\sqrt{1.15 + 1.14}) = \underline{1.21}$
$y_4 = y_3 + \Delta x\, f(x_3, y_3) = 1 + 0.05(\sqrt{1.2 + 1.21}) = \underline{1.295}$

Fehler

$$\text{Fehler} = |y_{Exakt} - y_{nummerisch}|$$

Allgemeine Info

- Liste von elementaren Grenzwerte:

1. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$
3. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$
4. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
5. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

- Tricks

1. $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^6 - n^3}{7n^6 + n^5 - 3}$ ⇒ Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$
   k: grösste Exponent
2. $\lim_{n \to \infty} \frac{7^{n-1} + 2^{n+2}}{7^n + 5}$ ⇒ Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$
   a = grösste Basis
   k = kleinster exponent
3. $\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$ ⇒ Erweitern mit $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$
4. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n}$ ⇒ Umformen zu:
   $\lim_{x \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^a = e^a$

- e-Zahl

- 2.71828
- $e^0 = 1$
- $f^{-1}(x) = \ln(x)$
- $\ln(e^x) = x$
- $\ln(e^{ax}) = ax$

- Grenzverhalten:

$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

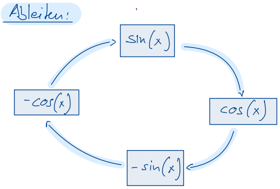
- ln Funktion

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$$
$$\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \ln(x$$

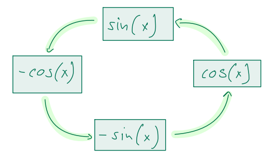
Ableitung & Integration

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	$c \quad c \in \mathbb{R}$	cx
c	cx	$\frac{c}{2}x^2$
$r\,x^{r-1}$	$x^r \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln(x)$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	$e^{c \cdot x}$	$\frac{1}{c}e^{c \cdot x}$
$\ln(a) \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x(\ln(x)-1)$
$\frac{1}{\ln a \; x}$	$\log_a(x)$	$\frac{x}{\ln a}(\ln\lvert x\rvert - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$(-5) \cdot \frac{1}{(1-5x)}$	$(\ln(1-5x))'$	

Ableiten:



Integration



Ableitungsregeln

- Summenregel:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- Faktorregel:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

- Produktregel:

$$(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

- Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Auch innere Ableitung genannt

Bestimmtes Integral

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \Big[\ln(f(x))\Big]_a^b$$

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

KLASSIFIKATION

Gewöhnliche DGL (ODE)

Wir betrachten die (gewöhnliche) DGL (1. Ordnung)

$$y' = F(x, y)$$

Es kommen nur Ableitungen nach einer Variablen vor.

Beispiel:

$$y' = -\frac{y}{x}$$

Partielle DGL (ODE)

Es treten Ableitungen nach mehreren Variablen auf.

Beispiel:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

Ordnung einer DGL

Höchste Ableitung, welche in der DGL vorkommt.

Beispiel 1. Ordnung:

$$y' = y$$

Lineare DGL (ODE)

Die Funktion und ihre Ableitungen kommen nur linear vor, also keine Ausdrücke wie $\sqrt{y(x)}, (y'(x))^2, e^{\,y(x)}$ etc.

Beispiel:

linear $\quad y'' + y' = e^x$

nicht linear $\quad y'' + \sqrt{y} = e^x$

Homogene DGL (ODE)

Wenn man alle Terme, welche die gesuchte Funktion (und deren Ableitungen) enthalten, auf die linke Seite der DGL schreibt, erhält man auf der rechten Seite Null.

Beispiel:

homogen $\quad y' + xy = 0$

inhomogen $\quad y' + xy = \cos(x)$

Separierbare DGL (ODE)

Die DGL heisst separierbar, falls die DGL von der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

ist.

Beispiel:

$$y' = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{y}_{h(y)}$$

Autonome DGL (ODE)

Die DGL heisst autonom, falls die DGL von der Form

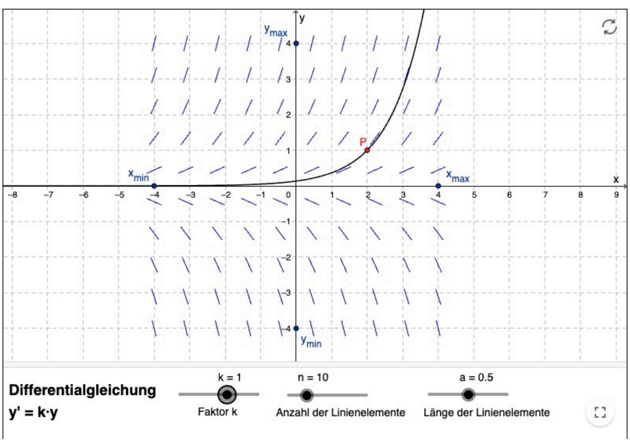
$$y' = f(y)$$

ist. Autonome DGL sind separierbar! Keine x-Terme!

Beispiel:

$$y' = y = \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{y}_{h(y)}$$

Notiz:

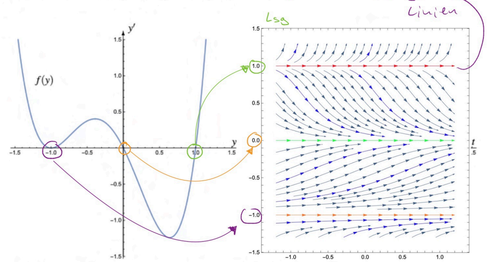


a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(y(t))$$

mit f wie unten links dargestellt. (ganzzahlige Nullstellen)

Nullstellen als gerade Linien



Man skizziere die Gleichgewichts–Lösungen und eine repräsentative Schar von Integralkurven in das Koordinatensystem rechts. (3 Punkte)

Klassifizieren Sie sodann die Gleichgewichts–Lösungen. (3 Punkte)

$y(t) = 1$: instabil

$y(t) = 0$: (asymptotisch) stabil

$y(t) = -1$: semistabil