Komplexe Zahlen

- $i^2 = -1$
- $z = x + i \cdot y$

$x =$ Realteil

$y =$ Imaginärteil

Rechenregel

- **Addition:**

$$(\text{Realteil}_1 + \text{Realteil}_2) + i(\text{Imaginärteil}_1 + \text{Imaginärteil}_2)$$

- **Subtraktion:**

$$(\text{Realteil}_1 - \text{Realteil}_2) + i(\text{Imaginärteil}_1 - \text{Imaginärteil}_2)$$

- **Multiplikation**

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (\text{Realteil}_1 \arrow[rrrr, bend right] \arrow[rrrrrr, bend right] & + i & \text{Imaginärteil}_1) \arrow[rr, bend left] \arrow[rrrr, bend left] & \cdot & (\text{Realteil}_2 & + i \cdot & \text{Imaginärteil}_2) \end{tikzcd}$$

- **Division**

$$\frac{(\text{Realteil}_1 + i\,\text{Imaginärteil}_1) \cdot (\text{Realteil}_2 - i\,\text{Imaginärteil}_2)}{(\text{Realteil}_2 + i\,\text{Imaginärteil}_2) \cdot (\text{Realteil}_2 - i\,\text{Imaginärteil}_2)}$$

- **Quotient**

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \cdot \overline{z_2}$$

- **Potenzen**

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$(x - iy) = x^2 - 2xyi - y^2$$

$$(x - i \cdot y)(x + iy) = x^2 + y^2$$

$$(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

$$(x - iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + (-3x^2y + y^2)i$$

Komplexe Konjukation

$z = x + i \cdot y$

$\bar{z}$ $\Downarrow$ Konjugieren

$\bar{z} = x + i\,(-y)$

$y \cdot (-1)$

- **Rechenregeln**

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Polarform

kartesische: $z = x + i \cdot y$

$$z = \underbrace{r \cdot \cos(\theta)}_{x} + \underbrace{i \cdot r \cdot \sin(\theta)}_{y}$$

$$z^n = r^n \cdot \cos(\theta) + r^n \cdot \sin(\theta) \cdot i$$

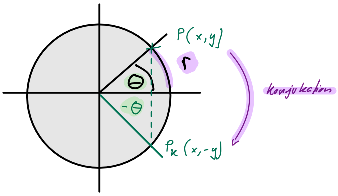
θ = Winkel

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{|z|} \qquad x = r \cdot \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{|z|} \qquad y = r \cdot \sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

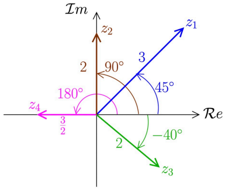
- konjugiert



$$\bar{z} = r \cdot \cos(-\theta) + i \cdot r \cdot \sin(-\theta)$$

$$\bar{z} = r \cdot e^{i \cdot (-\theta)}$$

$r = |z|$



$z_1 = 3\,(\cos(45°) + i\,\sin(45°))$

$z_2 = 2\,(\cos(90°) + i\,\sin(90°))$

$z_3 = 2(\cos(-40°) + i\,\sin(-40°))$

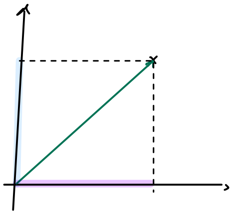
und $z_4 = \frac{3}{2}\,(\cos(180°) + i\,\sin(180°))$

Betrag

z = Realteil + $i \cdot$ Imaginärteil

$$|z| = \sqrt{(\text{Realteil})^2 + (\text{Imaginärteil})^2} = |z|$$

Phytagoras $\Rightarrow$



- **Allgemein**

$$|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z| \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2 \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

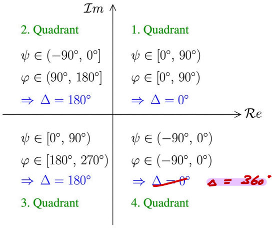
Inverse

$z = x + i \cdot y$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\,(a \boxed{-} i \cdot y)$$

[Betrag]^2

Quadranten



2. Quadrant	1. Quadrant
$\psi \in (-90°,\, 0°]$	$\psi \in [0°,\, 90°)$
$\varphi \in (90°,\, 180°]$	$\varphi \in [0°,\, 90°)$
$\Rightarrow\ \Delta = 180°$	$\Rightarrow\ \Delta = 0°$
$\psi \in [0°,\, 90°)$	$\psi \in (-90°,\, 0°)$
$\varphi \in [180°,\, 270°)$	$\varphi \in (-90°,\, 0°)$
$\Rightarrow\ \Delta = 180°$	$\Rightarrow$ ~~$\Delta = 0°$~~ $\Delta = 360°$
3. Quadrant	4. Quadrant

kartesische Form	**Polarform**	**Eulersche Form**
$z = a + b\,i$	$z = r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,i)$	$z = r\,e^{i\,\varphi}$
$a = r\,\cos(\varphi)$ $b = r\,\sin(\varphi)$	$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$ mit $\Delta = \begin{cases} 0°, & z \text{ in 1. oder 4. Quadrant} \\ 180°, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \end{cases}$	

Gaussche Zahlenebene

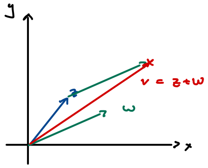
-> graphisch Darstellung

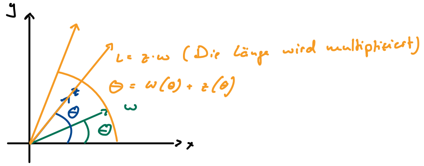
-> $z = x + i \cdot y$

-> x-Achse: Realteil

-> y-Achse: Imaginärteil

Berechung





Eulerische Form

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

- **Addition / Subtraktion**

  ⇒ kann nur in der karthesischen Form durchgeführt werden

- **Multiplikation**

$$(r_1 \cdot \cos(\varphi_1) + r_1 \cdot \sin(\varphi_1)\, i) \cdot (r_2 \cdot \cos(\varphi_2) + r_2 \sin(\varphi_2) \cdot i)$$

$$= (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- **Division**

$$\frac{(r_1 \cdot \cos(\varphi_1) + r_1 \cdot \sin(\varphi_1)\, i)}{(r_2 \cdot \cos(\varphi_2) + r_2 \sin(\varphi_2) \cdot i)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

- $\overline{r \cdot e^{i \cdot \varphi}} = r \cdot e^{-i \cdot \varphi}$

- $z^n = r^n \cdot e^{n i \cdot \varphi}$

Imaginäre Zahlen

$i^2 = -1$

Wurzel

$$\underbrace{\sqrt{-9}}_{\downarrow} = \sqrt{i^2 \cdot 9} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{9}$$

$$= \underline{\underline{i \cdot 3}}$$

Nur mit Reelen zahlen kann man keine neg Zahlen Wurzeln ziehen

Addition

$z = i \cdot 9 \quad w = i \cdot 4$

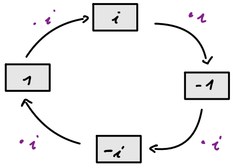
$z + w = 9 + 4 = i \cdot 13$

Multiplikation

$z = i \cdot 9 \quad w = i \cdot 4$

$$z \cdot w = i \cdot i = i^2 \cdot (9 \cdot 4) = \overbrace{i^2 \cdot (36) =}^{i^2 = -1} -36$$

Potenzen



Division

$$\frac{z}{w} = \frac{\cancel{i} \cdot 9}{\cancel{i} \cdot 4} = \frac{9}{4}$$

Wurzeln

Eigenwert & Eigenvektoren

Eigenwert Matrix

① Bilde $A - \lambda I$, diagonale!

② Berechne $\det(A - \lambda I)$

③ Nullstellen von $\det(A - \lambda I)$

Bsp

① $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

② $\det(A - \lambda I) = \left(\begin{array}{ccc} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{array}\right) \begin{array}{cc} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \\ -1 & 2 \end{array}$

$$= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - (-1)\cdot(3-\lambda)(-1)$$

$$= (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (3-\lambda)\ (1-2\lambda+\lambda^2-1)$$

$$= (3-\lambda)\cdot\lambda\cdot(-2+\lambda)$$

③ $(3-\lambda)\cdot\lambda(-2+\lambda) = 0$

$\underline{\lambda_1 = 0}$

$\underline{\lambda_2 = +2}$

$\underline{\lambda_3 = 3}$

} Das sind Eigenwerte

Eigenvektor Matrix

① Finde die Eigenwerte λ

② Berechne $A - \lambda \cdot I$

③ Löse $(A - \lambda \cdot I)\cdot \vec{x} = 0$

① $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

② $A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda_1 & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 0$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ Ziel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & x & x & y \\ 0 & x & x & y \\ 0 & 0 & x & y \end{array}\right)$$

$$(A - \lambda I)\cdot\vec{x} = 0 \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \right.$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + 2y - z = 0$

$\Rightarrow \underline{x = z}$

$\Rightarrow 3y = 0$

$\underline{y = 0}$

↳ $z \Rightarrow$ frei wählbar

$$= \vec{x} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow z = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ y_1 = 0$$

Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Die Eigenwerte sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

   Man erhält die Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

2. Einen zum Eigenwert λ_i gehörigen Eigenvektor $\vec{x}_i$ erhält man als nicht trivialen Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystems:

$$(A - \lambda_i I_n)\vec{x}_i = \vec{0}.$$

   Die Lösungsmenge dieses Systems ist der Eigenraum zum λ_i: V_{λ_i}.

Definition 4.3.1. Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$ Matrix A und V_λ der Eigenraum zum λ.

- Die Dimension von V_λ wird **geometrische Vielfachheit** von λ genannt und γ geschrieben, also: $\gamma = \dim(V_\lambda)$.
- Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ wird **algebraische Vielfachheit** von λ genannt und μ geschrieben.

Satz 4.3.1. Die geometrische Vielfachheit von λ ist stets mindestens 1 und höchstens gleich der algebraischen Vielfachheit von λ: $1 \le \gamma \le \mu$

Definition 4.3.2. Die Menge der Eigenwerte einer $n \times n$ Matrix wird **Spektrum** genannt und $\sigma(A)$ geschrieben, also:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{ es existiert } \vec{x} \ne \vec{0} \text{ mit } A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

Als **Spektralradius**, $\rho(A)$, bezeichnet man den grössten Betrag aller Eigenwerte.

Satz 4.3.2. Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenvektoren
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte der $n \times n$ Matrix A mit ihren algebraischen Vielfachheiten $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Dann gilt:

- die Anzahl k der verschiedenen Eigenwerte ist stets mindestens 1 und höchstens n:

$$1 \le k \le n$$

- die Summe der algebraischen Vielfachheit ist gleich n: $\mu_1 + \ldots + \mu_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j = n$
- Die **Spur** der Matrix A ist die Summe der Hauptdiagonalelemente von A, d.h.:

$$\text{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

  Es gilt: $\text{Spur}(A) = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \ldots + \mu_k\lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j\lambda_j$.

- Die Determinante der Matrix A ist gleich dem Produkt: $\det(A) = \lambda_1^{\mu_1}\lambda_2^{\mu_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_k^{\mu_k}$

Satz 4.5.1. Seien A und B ähnliche $n \times n$ Matrizen. Dann gilt:

1. Ihre Determinante stimmen überein: $\det(A) = \det(B)$.
2. A ist genau dann invertierbar, wenn B invertierbar ist.
3. A und B haben das gleiche charakteristische Polynom.
4. A und B haben die gleichen Eigenwerte.

Formelsammlung

Vektorräume

- Definition:
  Ein reeler Vektorraum besteht aus einer nicht leeren Menge V von Elemente die wir Vektoren nennen

- Bedingung:
  - **Addition**: Für beliebige Vektoren $\vec{a}$ & $\vec{b}$ in U ist $\vec{a}+\vec{b}$ ebenfalls in V
  - **Skalare Multiplikation**: Für beliebige Vektoren $\vec{a} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \vec{a} \in V$

- Rechengesetze:

① $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ $\quad \vec{a}, \vec{b} \in V$

② $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$

③ $\vec{a}+0=\vec{a}$

④ $\vec{a} \in V$ gibt genau $1 - \vec{a} \in V$

⑤ $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

⑥ $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

⑦ $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

⑧ $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Spaltenvektor

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n \right\} = R^n$$

Matrizenvektor

$$R^{i \times j} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, j = 1 \dots n \right\}$$

Polynome

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

wobei x = Variabel und a_i $i = 0, 1, 2 = \mathbb{R}$ max ² grades

- Addition:
  $p(x)+q(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+(a_2+b_2)x^2$

- Skalare Multiplikation:
  $\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2$

- Nullpolynom = Nullvektor: $o(x) = 0 + 0x + 0x^2$
  ↳ gilt für jedes Polynom

- Gegenvektor: $-p(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2$

$\cap$ = Durchschnitt
⇒ Erzeugt weiteren Vektorraum

$\cup$ = „und"
⇒ zwei Unterräume zusammen

Unterraum

- Teilmenge $\{\vec{0}\}$ → nur Neutralelement aus Vektorraum V

- Jeder Vektorraum hat min. zwei Triviale Unterräume:
  → Ganzer Raum $\{V\}$ und Nullvektor-Raum $\{0\}$

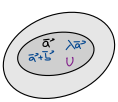
- Das Gleichungssystem muss homogen sein

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

- Wenn die Lösungsmenge eine Gerade darstellt:
  ⇒ geht diese durch den Ursprung.

Unterraum kriterium:

- Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in U so sind $\vec{a}+\vec{b} \in U$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{a} \in U$ ⇒ $\lambda\vec{a} \in U$
- Ist der 0-Vektor / Matrix im U'raum?



Falls "U" ein U'raum:
↳ U'raum kriterium mit a_1, b_1 etc...

Falls "U" kein U'raum:
↳ spezifische Gegenbeispiel

⇒ Falls Teilmenge gesucht die nicht im U'raum ist:
$a_0 + a_1 + a_2 = 1$ Neutralelement <u>nicht</u> enthalten.

Besondere Unterebene

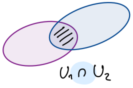
- Eine Ebene ist genau dann ein U'raum von $\mathbb{R}^3$ wenn diese den Ursprung enthält.
- Eine Gerade ist genau dann ein U'raum, wenn diese durch den Ursprung geht.
- Neutralelement gehört zu jedem Unterraum.

Der Durchschnitt als U'raum

- Seien $U_1 \dots U_n$ U'raum von V dann ist der Durchschnitt wieder ein U'raum:

$$U = \bigcap_{k=1}^{U} U_k = U_1 \cap U_2$$

und



Dimension $\dim(V)$

- Die Anzahl Vektoren einer Basis ist die Dimension vom Vektorraum.
  - Vektoren: $\dim(R^3) = 3$
  - Matrizen: $\dim(R^{3 \times 3}) = 9$ ⇒ $m \cdot n = \dim(\;)$
  - Polynom: $\dim(P_3) = 3$ ⇒ $(P_n) = \dim(n)$
  - Lin Hülle: $\dim\left(\mathrm{Lin}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$ → Alle führende 1

- Vorgehen:

① Erweiterte Matrix

② Gauss-Jordan Verfahren

③ Führende 1
↳ Anzahl bestimmt die dim ( )

Lineare Un- und Abhängigkeit von Vektoren

- Linear abhängig: nicht alle $\lambda = 0$
- Linear unabhängig: alle $\lambda = 0$:
  $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 = 0$

- Die Vektoren sind dann lin. abhängig, wenn sich einer als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

- Vektoren:
  ① Koeffizientenmatrix aufstellen
  ② Gauss-Jordan Verfahren
  ③ Falls $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$ ⇒ Unabhängig

- Polynome:
  ① Linearkombination aufstellen
  ② Polynom einfügen, λ ausmultiplizieren
  ③ LGS aufstellen mit λ auflösen
  ④ Falls alle $\lambda_1 \dots \lambda_3 = 0$ ⇒ lin. Unabhängig

- Matrizen:
  ① Linearkombination aus Matrizen
  ② λ-mal aus Matrizen rausmultiplizieren
  ③ gleiche m×n Matrizen = Nullmatrizen
  ④ LGS aufstellen und lösen
  ⑤ $\lambda_1 = 0$ ⇒ lin. unabhängig

Lineare Hülle als U'raum / Erzeugenden system

Sei V ein Vektorraum und seien $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \in V$.
Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren:

$$\mathrm{Lin}(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) = \left\{ \vec{x} \in V \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \cdot \vec{V}_1 \dots \lambda_n \cdot \vec{V}_n \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

⇒ Andere Notation: $\mathrm{span}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_n)$ oder $\langle \vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \rangle$

Sei V ein Vektorraum und seien $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_2 \in V$.
Die Menge $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_2)$ ist ein U'raum von V.

$$\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right.$$

$$= xz\text{-Ebene}$$

↳ Immer Ebene

- Lin. Hülle von Matrizen

$$\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \,\middle|\, A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ A \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Basis & Dimension

- Die Vektoren $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \in V$ bilden eine Basis $B = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$ des V'raum wenn:
  - Die Vektoren $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ lin unabhängig sind
  - $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) = V$, d.h. jeder Vektor lässt sich af Linearkombination von $\vec{v}_1$ & $\vec{v}_2$ darstellen

$\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ = Basisvektor, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ = Koordinaten

koordinatenvektor:

- Sei V ein reeler Vektorraum und $B = (v \dots \vec{v_n})$ eine Basis von V. Sei $\vec{v}$ ein beliebiger Vektor aus V'raum mit der Darstellung: $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \cdot \vec{v_2} \dots \lambda_n \cdot \vec{v_n}$, wobei die eindeutig bestimmte skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ die koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich B.

$$\vec{V_B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{(koordinatenvektor von B)}$$

- Vorgehen:

① Vektorgleichung aufstellen

② Gauss-Jordan Verfahren

③ Auflösen für λ

④ In Vektorgleichung einsetzen

Lin Abbildungen

Sind natürliche Abbildungen zwischen Vektorräume.

Bedingungen Linear:

① $f(x+y) = f(x) + f(y) \ \forall x, y \in V$

② $f(\lambda x) = \lambda f(x) \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \& \ v \in V$

③ $f(0) = 0$

1. & 2. kombiniert:

$$f(\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2}) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

⇒ Jede Lin Abbildung lässt sich durch eine Matrix schreiben

Darstellungsmatrix

Ist $\vec{e_1} \dots \vec{e_n}$ die kartoische Basis des $\mathbb{R}^n$ und ist eine beliebige Lin. Abbildung $f: R^n \to R^m$ gegeben, so bilden die Vektoren: $\vec{a_j} \cdot f(e_j) \in \mathbb{R}$ für alle $j = 1 \dots n$ die Spalten einer Matrix $A := (\vec{a_1} \dots a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft: $A \cdot \vec{x} = f(\vec{x})$

- Vorgehen um die Darstellungsmatrix zu finden:

① Einheitsvektor in $f(x)$ einsetzen

② Die Spaltenvektoren von 1 auseinander reihen ⇒ Darstellungsmatrix ablesen

- Polynome:

① Basen einsetzen

② koordinatenvektor erstellen

③ A = aneinander gereiht koordinatenvektor

Kern

Die Menge aller Vektoren, welche auf null abgebildet werden, heissen kern der Funktion f.

- ker(f) ist die Lösungsmenge des LGS $A \cdot \vec{x} = 0$
- ker(f) ist ein U'raum von V.

Vorgehen um ker(f):

① Darstellungsmatrix A von f bestimmen

② Homogenes LGS $A \cdot \vec{x} = 0$

③ Gauss Jordan anwenden

④ ker(f) als Lösungsmenge LGS

als Lin(( )) angeben

⑤ dim(ker(f)) = Anzahl freie Variabeln

Bild

- Die Menge aller Bildvektoren $y \in V$ heisst Bild der Matrix A
- $\vec{b}$ liegt im Bild wenn LGS: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$
- Vorgehen um Im(f):

① Darstellungsmatrix A von f bestimmen

② Homogenes LGS $A\vec{x} = 0$ oder $A\vec{x} = \vec{b}$

③ Gauss-Jordan anwenden

④ Im(f) alle Spaltenvektoren von der Ursprungs-Darstellungsmatrix A, welche nach Gauss eine Führende 1 haben. LSG als Lin(( )) angeben.

⑤ dim(Im(f)) = rang(A) Anzahl führende 1

- Vorgehen um Bild einer Matrix;

① koordinatenvektor bestimmen

↳ Anhand der Basen

② (Darstellungsmatrix) · (koordinatenmatrix)

③ $Im(M) = A \cdot \vec{v}'_{B,M} = \vec{b}$

- Eigenschaften:

Zuerst die Darstellungsmatrix berechnen!

A = Darstellungsmatrix von f(x)
C = Darstellungsmatrix von g(x)

$$f(x) = \begin{pmatrix} x + 4y \\ -2y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Addition:

$$f(x) + g(x) = A + C \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Verkettung:

$$\underbrace{f(x) \circ g(x)}_{} = A \circ B$$

↳ Nur gültig wenn: Definitionsbereich = Wertebereich

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 5 \\ & & 1 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 6 & 13 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array} = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- Invertiert.

$$f(x)^{-1} = A^{-1} \quad \frac{1}{\underbrace{\text{Det } A}_{=(a \cdot d)-(c \cdot b)}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

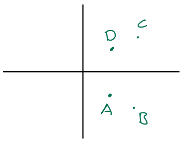
Bijektiv n×n

- $Ker(f) = 0$
- $Rang(A) = n$
- A ist invertierbar
- $\det \neq 0$

} A ist bijektiv sobald einer zutrifft

$$m \left\{ \overbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}}^{n} \right.$$

Projektion, Spiegelung & Transformation



Berechnung der neuen P:

- Separat

$OA' = Ax \cdot \vec{OA}$

- Alle Punkte zusammen:

$$E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \end{array}$$

$$E' = \underbrace{\overset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}}_{} \cdot \overset{2 \times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Zentrische Streckung um Faktor 2

$$= \overset{2 \times 4}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix}$$

Wichtig!

Bei zwei Operationen die beiden Matrizen multiplizieren

(zweite Matrizen) · (erste Matrizen)

Orthogonalprojektion

x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

xz-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

yz-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

xy-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Orthogonalprojektion auf Vektor A:

Formel:

$$f_a(\vec{b}) = \vec{b}'_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Matrix:

$$A_p = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \cdot \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_x a_y \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \cdot a^T$$

Spiegelung

y-Achse: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$

X-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$

Am Nullpunkt von einer Ebene $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Spiegelung an Gerade

$\mathbb{R}^2$: Koordinatengleichung der Gerade: $a\cdot x + b\cdot y = 0$

Normalenvektor von g $\rightarrow$ $n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \cdot \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & |\vec{n}|-{}^{2}2b^2 \end{pmatrix}$$

Bsp

- Drehung. $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

- $|\vec{n}| = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$A_g = \frac{1}{(\sqrt{13})^2} \begin{pmatrix} 13 - 2\cdot 3^2 & -2\cdot 3(-2) \\ -2\cdot 3\cdot(-2) & 13 - 2(-2)^2 \end{pmatrix} =$$

$$A = A_g \cdot A_\alpha$$

$\mathbb{R}^3$: Koordinatengleichung: $ax + by + cz = 0$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$A_E = \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

Streckung

k= Streckungsfaktor

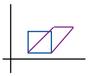
- Längs der x-Achse: $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Umkehr}} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Längs der y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$
- Zentrische Streckung. $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$

Scherung

Die Punkte auf der Achse bleiben gleich, der rest wird Parallel verschoben

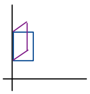
- Längs der X-Achse:

$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

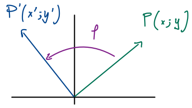


- Längs der y-Achse:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$



Drehungen



Gegenuhrzeigersinn:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die Determinante einer Drehmatrix ist immer 1. Somit bijektiv und umkehrbar

Uhrzeigersinn:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Drehung um die Koordinatenachse

X-Achse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

y-Achse

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

z-Achse

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel

Seien $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n)$ und $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2 \dots \vec{c}_n)$ zwei Basen des Vektorraums V und $P_{B\to C}$ die Basistransformationsmatrix von $B \to C$ gilt:

- $P_{B\to C} \cdot \vec{V}_B = \vec{V}_C$
- $P_{B\to C}$ ist eindeutig bestimmt
- $P_{B\to C}$ ist invertierbar mit $P_{B\to C}^{-1} = P_{C\to B}$

Verfahren für Basistransformationsmatrix: $\mathbb{R}^n$

① $(\underbrace{\vec{c}_1\ \vec{c}_2}_{\text{neue Basis}} \mid \underbrace{\vec{b}_1\ \vec{b}_2}_{\text{Alte Basis}}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$P_{B\to C}$

② Gauss-Jordan $= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$

③ Ablesen und Einsetzen

$$P_{B\to C} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Kartesische Basis ε:

$P_{\varepsilon\to B} = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$ $P_{B\to\varepsilon} = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$

Kern & Bild

- Herausfinden ob ein Vektor im Kern liegt:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Ist $\vec{a}$ im Kern f?

$A \cdot \vec{a} = 0$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 5 \\ & & & 3 \\ & & & 2 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \; \underbrace{}_{\neq 0}$$

$\vec{a}$ ist nicht im Ker(f)

$A \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & & & -1 \\ & & & 1 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$\vec{b}$ liegt im Ker(f)

- Herausfinden ob ein Vektor im Bild liegt?

Ist $\vec{a}$ im Im(f)?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)}$$

System ist lösbar

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ im Im(f)

Ist $\vec{b}$ im Im(f)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

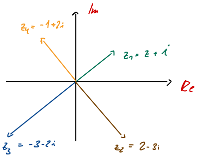
$$= \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

System nicht lösbar

$\Rightarrow$ $\vec{b}$ nich im Im(f)

Komplexe Zahlen

- Imaginäre Einheit: i $i^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{-1} = i$
- Komplexe Zahl kartesisch: $z = a + bi$, $a = Re(z)$
  $b = Im(z)$
- Menge: $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$



Rechenregel

- Betrag: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Addition: $z_1 + z_2 = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{Re} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{Im} \cdot i$
- Differenz. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
- Produkt: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$
  $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ keine Multiplikation
- Inverse Element: $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot (a - bi)$
- Konjugierte Zahl:

$\bar{z} = a - bi$

$z = a + bi$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|$

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$z_1 \cdot z_2 = \overline{z_1} \cdot z_2$

$\overline{\overline{z}} = z$

$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ &

$Im(z) \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

- Quotient:

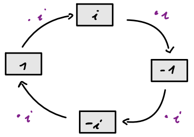
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \cdot \overline{z_2}$$

- Potenzen:

Bsp

$i^{48} = (i^{4})^{12}$

$i^{103} = i^{4 \cdot 25 + 3}$

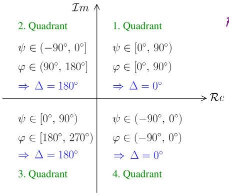


Polarform

$r \cdot \cos(\varphi) + r\sin(\varphi) \cdot i \qquad r = |z|$

$\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) + \psi + \Delta$

$z = a + bi = \underbrace{r \cdot \cos(\varphi)}_{Re} + \underbrace{r \cdot \sin(\varphi) i}_{Im}$



Für Zahlen die auf den Im-Achsen liegen nicht anwendbar

$\Rightarrow a \neq 0$

Konjugierte Version Polarform:

$\overline{z} = r \cdot \cos(-\varphi) + r \sin(-\varphi) i$

Rechenregeln: Polarformen

- Addition & Subtraktion nur in kartesische Form
- Multiplikation:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) i\right)$

- Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) i\right)$$

Eulerische Form

$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$

- Eulerische Form in Polarform

kartesische Form	Polarform	Eulersche Form
$z = a + b\,i$	$z = r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,i)$	$z = r\,e^{i\,\varphi}$
$a = r\,\cos(\varphi)$ $b = r\,\sin(\varphi)$	$r = \|z\| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$ mit $\Delta = \begin{cases} 0°, & z \text{ in 1. oder 4. Quadrant} \\ 180°, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \end{cases}$	

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$$

Konjugierte: Eulerische Form

$\overline{z} = \overline{r \cdot e^{i\varphi}} = r \cdot e^{-i\varphi}$

$-i = e^{-i\,90} \Rightarrow i = e^{i\,90}$

Potenzen

- Eulerische Form: $z^{n} = r^{n} \cdot e^{i \cdot \varphi \cdot n}$
- Polarform: $z^{n} = r^{n}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi) i)$
- karthesische Form: Umwandeln in eulerische Form

Wurzeln

$a_n \cdot z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots = 0 \qquad$ mit $a_i \in \mathbb{C}, i = 0 \dots n$

Wurzel = Lösung ⇒ Polynom mittels bekannten Wurzeln/Lösungen und Polynomdivision auf 2. Grades bringen ⇒ Mitternachtsformel:

Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

Bsp

$x^3 - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) \rightarrow x_1 = 1$

$(x^2 + x + 1)$

$a = 1$

$b = 1$

$c = 1$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2} \qquad \sqrt{-3} = i\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2} \qquad x_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$$

- n-te Wurzel aus a

$z^n = a = a_0 \cdot e^{i \cdot \pi} \qquad a \in \mathbb{C}$

$r = \sqrt[n]{a}$

$\varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 360}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$

Bsp $\quad z^4 = 8 + 8 \cdot \sqrt{3}\,i$

$a_0 = \sqrt{8^2 + (8 \cdot \sqrt{3}\,i)^2} = 16, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = 60°$

$z^4 = 16 e^{i60°}$

$r = \sqrt[4]{16} = 2$

$\varphi_{k_0} = \frac{60 + 0 \cdot 360}{4} = 15 \rightarrow z_0 = 2 \cdot e^{i15°}$

$\varphi_{k_1} = \frac{60 + 1 \cdot 360}{4} = 105 \rightarrow z_1 = 2 \cdot e^{i105°}$

$\varphi_{k_2} = \frac{60 + 2 \cdot 360}{4} = 195 \rightarrow z_2 = 2e^{i195°}$

$\varphi_{k_3} = \frac{60° + 3 \cdot 360°}{4} = 285 \rightarrow z_3 = 2e^{i285°}$

⇒ Es gibt immer gleichseitige n-Ecke!

Gleichung, karthesische Form

Bsp $\quad z^2 = 5 - 12i$

$(a + bi)^2 = 5 - 12i \quad /ta$

$a^2 + 2ab - b^2 = 5 - 12i$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = -12 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{6}{b}\right)^2 - b^2 = 5 \qquad 2ab = -12 \quad a = \left(-\frac{6}{b}\right)$$

$\frac{36}{b^2} - b^2 = 5 \quad | b^2$

$36 - b^4 = 5b^2$

$c = b^2$

$b^4 + 5b^2 - 36 = 0$

$c^2 + 5c - 36 = 0 \qquad \Rightarrow$ Mitternachtsformel

$c_1 = \frac{-5 + 13}{2} = 4$

$\underbrace{c_2 = \frac{-5 - 13}{2} = -9}$

c_2 = keine LSG da neg Zahl

$b_{1,2} = \sqrt{c} = \pm 2$

$a_1 + b_1 i = -3 + 2i$

$a_2 + b_2 i = -3 - 2i$

Eigenwert, Eigenvektor & Eigenraum

Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ heisst Eigenwert von f, falls es einen Vektor $\vec{x} \in V$ gibt mit:

1) $\vec{x} \neq 0 \qquad$ 2) $f(x) = \lambda \vec{x}$

Dabei heisst $\vec{x}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Hat der V'raum eine endliche Dimension, dim(V) = n, So kann jede lin Abb. $f: V \rightarrow U$ durch eine quadratische von Matrix A beschrieben werden.

Die Bedingung 2) heisst dann:

2) $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind lin. unabhängig.

Eigenwerte bestimmen

Bsp: $A \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Eigenwert: $(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$

$\text{Det}(A - \lambda E) = (-1-\lambda)\begin{pmatrix} (3-\lambda) & -4 \\ 2 & (-3-\lambda) \end{pmatrix}$

$= (-1-\lambda)\left((3-\lambda)(-3-\lambda) - (-8)\right) = (-1-\lambda)(-9+\lambda^2+8)$

$= -1(1+\lambda)(\lambda^2 - 1) = -1(1+\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$

$= (-1)(\lambda+1)^2(\lambda-1)$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 1$

Eigenraum bestimmen:

λ in A − λE einsetzen und mit Gauss nach 0 auflösen:

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow A + 1_n = \begin{pmatrix} 3+1 & 0 & -4 \\ 2 & -1+1 & -2 \\ 2 & 0 & -3+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

y: frei wählbar = s

z: frei wählbar = t

Eigenvektor: $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} +t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenraum

$$\underline{\underline{V_1 = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}}$$

⇒ Dieses Verfahren für jeden Eigenwert durchführen

Invertierbarkeit

- Eine Matrix ist invertierbar wenn die Eigenwerte $\neq 0$ sind.

Anwendung 1 Potenzen einer Matrix

$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}, k \geq 1$

Bsp

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^5 = P \cdot D^5 \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 617 & 416 \\ 615 & 409 \end{pmatrix}$$

- Vorgehen:

① Eigenwert bestimmen

② D= Erstellen : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

③ Eigenraum: $Lin_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Lin_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$P = (Lin_1(), Lin_2())$

④ $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

Spiegelung an der Ebene

- xy- Ebene. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- xz- Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- yz- Ebene: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lineare Differentialgleichungssysteme

- Mit konstanten koeffizienten

Bsp

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) = 4y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

Anfangswert.
$y_1(0) = 1$
$y_2(0) = 5$

① koeffizientenmatrix A aufstellen

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

② Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$

$V_{\lambda_1} = Lin\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $V_{\lambda_2} = Lin\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

③ Eigenwerte & Eigenvektoren in Allg. Lösung

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

$$= C_1 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ Einzelne Gleichung aufstellen

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{2} C_1 \cdot e^{3 \cdot t} - C_2 \cdot e^{-3 \cdot t} \\ y_2(t) = C_1 e^{3 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-3t} \end{cases}$$

⑤ Nach C_1 oder C_2 auflösen mit Anfangswerten

$y_2(0) = 5$ $y_2 = 5 = c_1 \cdot \underbrace{e^{3 \cdot 0}}_{1} + C_2 \cdot \underbrace{e^{-3 \cdot 0}}_{1}$

$5 = c_1 + c_2$

$c_1 = 5 - c_2$

y_1 : $1 = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \underbrace{e^{3 \cdot 0}}_{1} - 1 C_2 \underbrace{e^{-3 \cdot 0}}_{1}$

$1 = \frac{1}{2} C_1 - C_2$

$1 = \frac{1}{2}(5 - C_2) - C_2$

$1 = \frac{5}{2} - \frac{C_2}{2} - C_2$ $\quad / \cdot 2$

$2 = 5 - C_2 - 2C_2$

$3C_2 = 3$ $\quad /:3$

$C_2 = 1$

⑥ C_1 oder C_1 einsetzen

$5 - C_2 = C_1$

$5 - 1 = C_1$

$4 = C_1$

⑦ C_1, C_2 in die gleichung einsetzen

Die Partikuläre Lösung lautet:

$$\begin{cases} y_1(t) = 2e^{3t} - e^{-3t} \\ y_2(t) = 4e^{3t} + e^{-3t} \end{cases}$$

Bild & kern

dim (kern ()) = Anzahl freie Variabeln

dim (Bild ()) = Anzahl führende 1

dim () = Anzahl Spalten oder Anzahl Variabeln

Vorgehen

① Matrix auf Zeilenstufenform bringen

② Auf führende Variabeln bringen

Basis vom Bild

- Das Bild ist was es mit der Matrix aufspannt

- Vorgehen

① Dim (Bild ()) = bestimmen

↳ Dies gibt uns die Anzahl der Vektoren bekannt

② Die Vektoren müssen zwei linear unabhängige Vektoren sein

Bsp

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 17 & 11 \end{pmatrix}$ ← Das sind die Vektoren für das Bild

$\Rightarrow Im() = Lin\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1$ & $v_3 \Rightarrow$ lin unabhängig

Basis vom kern

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 17 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

freie Variabeln

Vorgehen

① Die freien Variabeln auf die Rechte Seite nehmen

② $Lin = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Rang

- Anzahl unabhängige Vektoren in einer Matrix
- Damit die Matrix invertierbar ist von einer $\mathbb{R}^{n \times m}$ Matrix muss der Rang( ) = n sein.

$$\Rightarrow \underbrace{\text{Zeilen} = \text{Rang}(\,)}_{\text{Invertierbar}}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang(A) = 3

⇒ ungleich an Zeilen

⇒ Nicht invertierbar

komplexe Zahlen

Bsp

$$z_1 = \underbrace{\frac{2-i}{1+i}}_{k} + \underbrace{e^{i150°}}_{L}$$

k. $\frac{(2-i)}{(1+i)} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1}{2}(1-3i)$

L: $e^{i150} = \cos(150) + \sin(150)\,i$

k,L: $\frac{1}{2} - \frac{3i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})i$

Potenzieren

⇒ In der eulerischen Form:

Bsp

$$z = \underbrace{\left(-3+\sqrt{3}\,i\right)}_{k}{}^{4} \cdot e^{i150°}$$

k: $-3+\sqrt{3}i = r$

$|r| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

arctan: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \Delta = -30 + 180° = 150$

$\Rightarrow \left(\sqrt{12} \cdot e^{i150}\right)^{4}$

$= \left(\sqrt{12}\right)^{4} \cdot e^{i150 \cdot 4} = 144e^{i240°}$

$= 144e^{i240} \cdot e^{i150}$

$= 144\left(\cos(240+150) + \sin(240+150)\,i\right)$

Eigenvektoren & Eigenwert ⇒ Matrix

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 , \vec{x}_2 \end{pmatrix}$$

Bsp

$\lambda_1 = 1 \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Laplace - Verfahren

Vorgehen

① Spalte oder Zeile auswählen

⇒ Möglichst viel 0

② Vorzeichen festlegen

$$A = \begin{pmatrix} \overset{+}{x} & \overset{-}{x} & \overset{+}{x} \\ \overset{-}{y} & \overset{+}{y} & \overset{-}{y} \\ \overset{+}{z} & \overset{-}{z} & \overset{+}{z} \end{pmatrix}$$

③ Spalte oder Zeile streichen

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2^{-} & 0 \\ 3 & 0^{+} & 4 \\ 2 & -1^{-} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 32$

2 × 2

Det: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)$

Invers: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Inverse einer Matrix

Rang (A) = n ⇒ Invertierbar

Eigenvektor, Eigenwert spezieller Matrix

- Der Eigenwert einer Dreiecksmatrizen sind demnach genau die Elemente in der Hauptdiagonalen.

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 3 \end{aligned}$$

⇒ Für obere & untere Dreiecksmatrizen !

Angle	Sinθ	cosθ	tanθ
0°	0	1	0
30°	1/2	√3/2	1/√3
45°	1/√2	1/√2	1
60°	√3/2	1/2	√3
90°	1	0	∞
120°	√3/2	-1/2	-√3
135°	1/√2	-1/√2	-1
150°	1/2	-√3/2	-1/√3
180°	0	-1	0
210°	-1/2	-√3/2	1/√3
225°	-1/√2	-1/√2	1
240°	-√3/2	-1/2	√3
270°	-1	0	∞
300°	-√3/2	1/2	-√3
315°	-1/√2	1/√2	-1
330°	-1/2	√3/2	-1/√3
360°	0	1	0

1. $U_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 0\}$
2. $U_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 1\}$
3. $U_3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 \neq 1\}$

1. Ja, U_1 ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Wir überprüfen das Unterraumkriterium:
   - Seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ in U_1, d.h. $u_1 + u_2 = 0$ und $v_1 + v_2 = 0$. Dann gilt für $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$:
   $$w_1 + w_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = 0 + 0 = 0,$$
   d.h. $\vec{w} \in U_1$.
   - Sei $\vec{v}$ in U_1. Dann gilt für $\vec{w} = \lambda\vec{v}$:
   $$w_1 + w_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) = \lambda \cdot 0 = 0,$$
   d.h. $\vec{w} \in U_1$.
2. Nein, U_2 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Das kann man z.B. daran sehen, dass $\vec{0} \notin U_2$.
3. Nein, U_3 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Gegenbeispiel:
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_3,\ \lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R},\ \text{aber } \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin U_3$$

---

1. Gegeben sei die Menge
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
   (a) Klären Sie ab, ob es sich bei U um einen Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ handelt.

   (b) Gegeben sei weiter der Unterraum
$$V = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$
   Gilt $U = V$?

   Begründen Sie Ihre Antwort für jede Teilaufgabe.
2. Gegeben seien die Polynome:
$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x - 1 \qquad \text{und} \qquad p_2(x) = x\,(x-1)$$
   Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x))$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$ ist.

1. (a) U ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir überprüfen das Unterraumkriterium:
   - Seien $A_1, A_2 \in U$, d.h.: $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$.

     Dann gilt:
   $$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix},$$
     mit $a = a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$ und $b = b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$. Somit $A_1 + A_2 \in U$ für alle $A_1, A_2 \in U$. Die erste Bedingung ist erfüllt.
   - Sei $A_1 \in U$, d.h.: $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:
   $$\lambda A_1 = \lambda \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix},$$
     mit $a = \lambda a_1 \in \mathbb{R}$ und $b = \lambda b_1 \in \mathbb{R}$. Somit $\lambda A_1 \in U$ für alle $A_1 \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die zweite Bedingung ist erfüllt.

   Laut dem Unterraumkriterium ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (b) Nein, denn die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist in V, aber nicht in U (die Gegendiagonalelemente sind ungleich).
2. Da $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ enthält eine Basis von $\mathbb{P}_2$ drei linear unabhängige Polynome.

   Wir bestimmen, ob $p_0(x)$, $p_1(x)$ und $p_2(x)$ linear unabhängig sind. Aus
$$\begin{aligned} \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = 0 &\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 x - \lambda_1 + \lambda_2 x^2 - \lambda_2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_2 x^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\,x + \lambda_0 - \lambda_1 = 0,\ \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
   folgt das lineare Gleichungssystem:

---

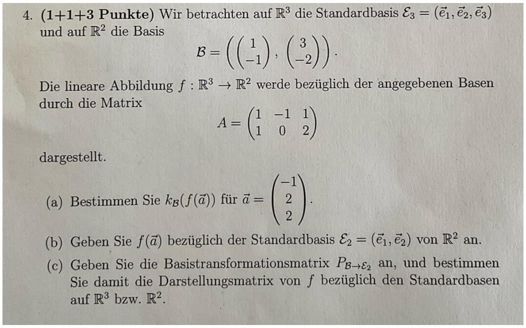
1. Bestimmen Sie zunächst die kartesische Form und anschliessend die Polarform der folgenden Zahl $z \in \mathbb{C}$:
$$z = \frac{-73 + 17\,i}{9 - 5\,i}$$
2. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen, welche die folgende quadratische Gleichung lösen:
$$z^2 - 6z + 130 = 0$$
3. Bestimmen Sie die drei Lösungen der Gleichung
$$z^3 = -i$$

1. Für die kartesische Form:
$$\begin{aligned} z = \frac{-73 + 17\,i}{9 - 5\,i} &= \frac{1}{|9 - 5\,i|^2}(-73 + 17\,i)(9 + 5\,i) \\ &= \frac{1}{9^2 + (-5)^2}(-657 - 85 + (-365 + 153)\,i) = \frac{1}{106}(-742 - 212\,i) = -7 - 2\,i \end{aligned}$$
   Für die Polarform:

   Der Betrag lautet: $r = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$. Da z im 3. Quadranten liegt, erhält man für φ:
$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{-7}\right) + \Delta = \arctan\left(\frac{2}{7}\right) + 180° = 15.94° + 180° = 195.94°.$$
   Daraus folgt: $z = \sqrt{53}\,(\cos(195.94°) + \sin(195.94°)\,i)$.
2. Aus der Mitternachtsformel folgt:
$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 130}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{-484}}{2} = 3 \pm \frac{22\,i}{2} = 3 \pm 11\,i.$$
   Somit lauten die Lösungen: $z_1 = 3 + 11\,i$ und $z_2 = 3 - 11\,i$
3. 1. Lösungsweg: Die Zahl $-i$ in der Eulerschen Form lautet $e^{-i\,90°}$. Es folgt: $z^3 = e^{-i\,90°}$.

   Der Betrag und das Argument der Wurzeln lauten:
$$r = \sqrt[3]{1} = 1, \qquad \varphi_k = \frac{-90° + k \cdot 360°}{3} = -30° + k\,120°,\ \text{mit } k = 0, 1, 2.$$
   Somit lauten die Wurzeln:
$$z_0 = e^{-i\,30°}\ (k = 0), \qquad z_1 = e^{i\,90°}\ (k = 1) \quad \text{und} \quad z_2 = e^{i\,210°} = -i\ (k = 2).$$
   2. Lösungsweg: Die Zahl $-i$ in der Eulerschen Form lautet $e^{i\,270°}$. Es folgt: $z^3 = e^{i\,270°}$.

   Der Betrag und das Argument der Wurzeln lauten:
$$r = \sqrt[3]{1} = 1, \qquad \varphi_k = \frac{270° + k \cdot 360°}{3} = 90° + k\,120°,\ \text{mit } k = 0, 1, 2.$$
   Somit lauten die Wurzeln:
$$z_0 = e^{i\,90°}\ (k = 0), \qquad z_1 = e^{i\,210°}\ (k = 1) \quad \text{und} \quad z_2 = e^{i\,330°} = -i\ (k = 2).$$



4. **(1+1+3 Punkte)** Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis $\mathcal{E}_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ und auf $\mathbb{R}^2$ die Basis
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$
   Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der angegebenen Basen durch die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   dargestellt.

   (a) Bestimmen Sie $k_{\mathcal{B}}(f(\vec{a}))$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Geben Sie $f(\vec{a})$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ von $\mathbb{R}^2$ an.

   (c) Geben Sie die Basistransformationsmatrix $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}_2}$ an, und bestimmen Sie damit die Darstellungsmatrix von f bezüglich den Standardbasen auf $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

4a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$