Basis (AN1&2)

Potenzgesetze

$a^r \times a^s = a^{r+s}$

$a^r \div a^s = a^{r-s}$

$a^r \times b^r = (ab)^r$

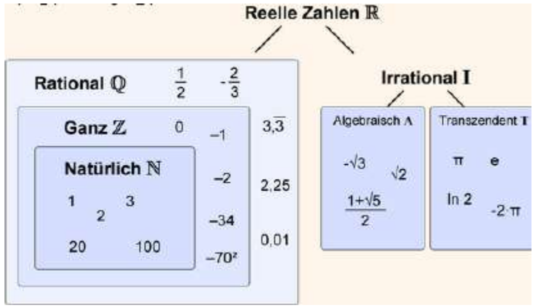
$a^r \div b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$(a^r)^8 = a^{r\times 8}$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$

$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$

Mengen



Intervalle

Es gilt [=) und] = (

Abgeschlossen: [1,3] =1,2,3

Offen: (1,3) = 2 gleich wie]1,3[

Halboffen: [1,3) =1,2

Unendlich: [a,∞)

Ableitung

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$5\,;\,1\,;\,10$	0
e^{ax}	$a\cdot e^{ax}$	e^{7x}	$7e^{7x}$
ax^p	$p\cdot ax^{p-1}$	$5x^3\,;3x^2\,;3x$	$15x^2\,;6x;3$
a^x	$a^x\cdot\ln(a)$	$3a^{7x}$	$21a^{7x}\cdot\ln(a)$
$\mathrm{c}\cdot\ln(ax+b)$	$ac\div(ax+b)$	$\ln 4x\,;\ln x$	$1\div x$
$\mathrm{b}\cdot\cos(ax)$	$-\mathrm{ab}\cdot\sin(ax)$	$\mathrm{b}\cdot\sin(ax)$	$\mathrm{ab}\cdot\cos(ax)$
$b\cdot\tan(ax)$	$\frac{a\cdot b}{((\cos(ax))^2)}$	$b\cdot\sin^{-1}ax$	$\frac{a\cdot b}{\sqrt{1-a^2\cdot x^2}}$
$b\cdot\tan^{-1}ax$	$\frac{a\cdot b}{a^2\cdot x^2+1}$	$b\cdot\cos^{-1}ax$	$-\frac{a\cdot b}{\sqrt{1-a^2\cdot x^2}}$
$\sqrt[b]{ax}$	$\frac{\sqrt[b]{a}\cdot x^{\frac{1}{b}-1}}{b}$	$\sqrt[5]{3x}$	$\frac{\sqrt[5]{3}\cdot x^{\frac{1}{5}-1}}{5}$
$\sqrt{ax}$	$1\div(2\cdot\sqrt{ax})$	$\sqrt{3x}$	$1\div(2\cdot\sqrt{3x})$
$\log_b ax$	$\frac{1}{x\cdot\log_{10}b}$	$\log_2 4x$	$1\div(x\cdot\log 2)$
x^x	$x^x\cdot(\ln x+1)$	$(ax)^{bx}$	$b(ax)^{bx}\cdot(\ln(ax)+1)$
$a*\sec^c(bx)$	$abc*\sec^c(bx)*\tan(bx)$	$a*cosec^c(bx$	$-abc*\cot(bx)*\csc^c(bx)$
$b*\tan(ax)$	$ab*sec^2(ax)$		
$\frac{a}{b}*\sqrt{cx^d\pm fx^h}$	$\frac{a(cdx^d-fhx^h)}{2bx\sqrt{cx^d-fx^h}}=\frac{a(cdx^{d-1}-fhx^h-1)}{2b\sqrt{cx^d-fx^h}}$		

Umkehrfunktion: $(f^{-1})(x) = \frac{1}{f\prime(f^{-1}(x))}$

$$f(x) = \cot(x) \Rightarrow f'(x) = -1-(\cot x)^2 = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

$$\sin(x) => \cos(x) => -\sin(x) => -\cos(x) => \sin(x)$$

tan(x)=>sec^2(x)

Wurzelgesetze

Wenn a und b > 0:

$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[s\times r]{a}$

$(\sqrt[r]{a})^s = \sqrt[r]{a^s}$

Logarithmusgesetze

$\log_a P = \frac{\log P}{\log a}$

$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

$\log_b(P\times Q) = \log_b P + \log_b Q$

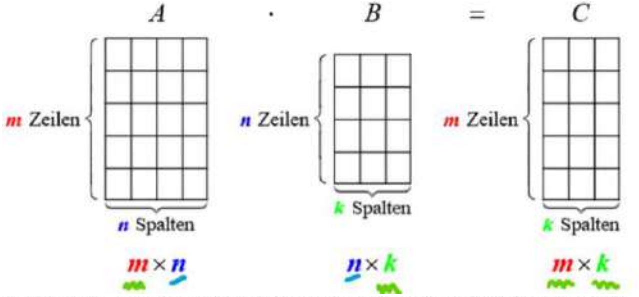
$\log_b\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_b P - \log_b Q$

$\log_b P^n = n\times\log_b P$

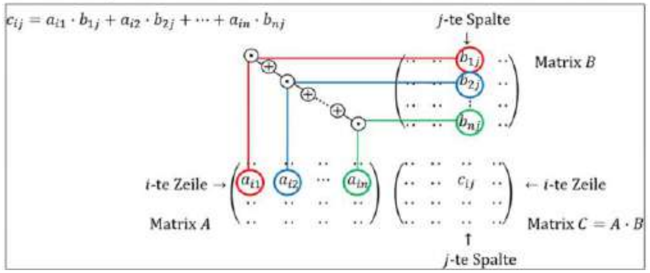
$\log_b\sqrt[n]{P} = \frac{\log_b P}{n}$

Multiplikation von Matrizen

Damit die Multiplikation möglich ist, muss Spalte von A gleich wie Zeilen von B sein.



Das Element c_{ij} in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Ergebnismatrix C wird so berechnet:



$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}7 & 8\\9 & 10\\11 & 12\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1*7+2*9+3*11 & 1*8+2*10+3*12\\4*7+5*9+6*11 & 4*8+5*10+6*12\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}58 & 64\\139 & 154\end{pmatrix}$$

Besonderheiten:

- Wenn A*B = A*C, heisst das nicht immer das B = C
- Wenn A*C = 0, heisst das nicht immer das eine Matrix 0 ist

Rechenregeln:

Assoziativ-Gesetz: $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

Distributiv-Gesetze: $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ und $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

Funktionen

Komposition: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Symmetrie:

- Gerade $\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$
- Ungerade $f(-x) \neq f(x)$

Monoton:

- wachsend $f(x_1) \leq f(x_2)$, $streng\ <$
- fallend $f(x_1) \geq f(x_2)$, $streng\ >$

Konvergent: Grenzwert existiert

Divergent: Kein Grenzwert oder Unendlich

Umkehrfunktion Nur wenn streng monoton und bijektiv

Bsp: $y = 3x-5 \Rightarrow y-5 = 3x \Longrightarrow x = \frac{y}{3}+\frac{5}{3} \Longrightarrow y = \frac{x}{3}+\frac{5}{3}$

Nat. Log

$\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

$\ln x^n = n\cdot\ln x$

$\ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ln x$

$a^{\frac{b}{c}} = e^{\frac{\ln(a)}{c}\cdot b}$

Binomische Formeln

(a+b)² = a² + 2ab + b²

(a-b)² = a² - 2ab + b²

(a+b)·(a-b) = a² - b²

$a^x = b$

$x = \log_a b$

Tan = sin/cos, cot = cos/sin Sec = 1/cos, csc = 1/sin

Rechenregeln

Produktregel: $f(x) = u(x)\times v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v\prime(x)}{v(x)^2}$

Kettenregel: $f(x) = (u\circ v)(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x))\times v'(x)$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

wenn $ax^2+bx+c=0$

Matrizen (LA)

Rechenregeln Addition von Matrizen

Kommutativ-Gesetz: $A + B = B + A$

Assoziativ-Gesetz: $A + (B + C) = (A + B) + C$

Distributiv-Gesetze: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ und $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

Matrizen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= 5 \\ 4y &= 8 \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Inverse

$$A * A^{-1} = E(Einheitsmatrix)$$

Nur möglich bei 2x2, wenn: $ad - bc \neq 0$ oder Det(A) $\neq 0$

Bestimmen für 2x2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Für LGs mit 1 LösungS: $A^{-1} * A * \vec{x} = A^{-1} * \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} * \vec{b}$

Bei NxN invertierbar wenn det(A) nicht 0.

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

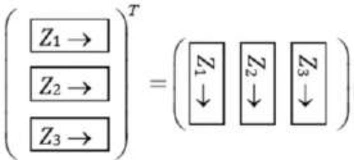
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

Transponieren von Matrix

Matrix mit m*n wird zu n*m transponiert.



$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0.2 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 0.2 & 3 \\ -1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$3x2^T$ $2x3$

Dabei gilt immer:

$$(A * B)^T = A^T * B^T$$

LGS in reduzierter Zeilenstufenform lösen

Frei unbekannte: x_3 = a

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_4 &= 5 \end{aligned} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a * \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Determinante

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(AB) = \det(A) * \det(B) \textit{ nicht mit } \pm$$

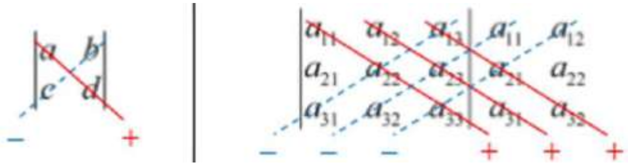
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(E) = \det(A * A^{-1}) = 1$$

$$\det(\gamma * A) = \gamma^n * \det(A)$$

Für 2x2: $A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ $\det(A) = a * d - b * c$

Für 3x3: $A = \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$ $\det(A) = a * e * i + b * f * g + c * d * h - c * e * g - a * f * h - b * d * i$



Für nxn:

Entwicklung nach der i-ten Zeile: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

Entwicklung nach der j-ten Spalte: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

$$\begin{pmatrix} 1^+ & 5 & 9 & 13 \\ 2^- & 6 & 10 & 14 \\ 3^+ & 7 & 11 & 15 \\ 4^- & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = +6 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} = 6 \cdot -4 - 7 \cdot -8 + 8 \cdot -4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = +5 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} = +5 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \cdots$$

Für oberer Dreiecksmatrix: Produkt der Diagonalen

Linear unabhängig:

Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ sind *linear unabhängig*, wenn gilt:

- $0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_k}$ ist die einzige Linearkombination, die $\vec{0}$ ergibt
- $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a_k} \neq \vec{0}$ $(\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R})$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von A sind *linear unabhängig*
- Zeilen von A sind *linear unabhängig*
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Definition Quadratische Matrix

Quadratisch: Gleich viele Zeilen wie Spalten

Hauptdiagonale: $a_{11}, a_{22}, \ldots$

Diagonalmatrix: Alle Elemente ausserhalb diagonale = 0

Einheitsmatrix: Diagonalmatrix und alle Elemente = 1

Obere Dreiecksmatrix: Alle Elemente unter diagonale = 0

Untere Dreiecksmatrix: Alle Elemente über diagonale = 0

Symmetrische Matrix: Elemente über und unter diagonale sym.

Potenzen sind nicht kommunikativ: $(AB)^2 \neq A^2 * B^2$

Zeilenstufenform

- Alle Zeilen, die nur 0 enthalten, stehen zuunterst
- Wenn nicht nur null = vorderste Zahl die 1
- Einsen sind nach unten rechts geordnet
- Reduziert = Alle Spalten mit führenden 1, haben sonst nur 0

Matrix Rang und Lösbarkeit

$$rg(A) = Anzahl\ Zeilen - Anzahl\ Nullzeilen$$

$$n = Anzahl\ Unbekannte$$

- Lösbar: $rg(A) = rg(A|\vec{c})$
- Genau eine: $rg(a) = n$
- Unendlich: $rg(A) < n$

$$\vec{c} = Erweiterte\ Koeff.Matrix$$

Matrizengleichung	erweiterte Koeff.matrix
$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 16 \end{array}\right)$

Für eine $(m \times n)$ −Matrix A gilt $rg(A) \leq min(m, n)$.

Freie Unbekannte in LGS

1 = führende 1 => führende unbekannte => kann nicht frei gewählt werden

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Normiert

Vektor v ist nach x normiert = v/x

bezüglich der 2-Norm auf die Länge 1 normiert sein sollen:

Länge $||v|| = 1$ normiert, d. h.:

$$v_{\text{normiert}} = \frac{v}{||v||},$$

Rechnerarithmetik

Maschinenzahlen

$$x = m * B^e$$

m = Mantisse, B = Basis

$M = \{x \in \mathbb{R} | x = \pm 0.m_1 m_2 m_3 \ldots m_n \cdot B^{\pm e_1 e_2 \ldots e_l}\} \cup \{0\}$

Dezimalsystem: $x_1 = 0.2345 * 10^3 = 234.5$

Der **Wert** $\hat{\omega}$ einer solchen Zahl ist definiert als

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^{n} m_i B^{\hat{e}-i}, \qquad \hat{e} = \sum_{l=1}^{l} e_i B^{l-i}$$

x wird als n-stellige Gleitpunktzahl zur Basis B bezeichnet.

Beispiel: $\underbrace{0.3211}_{n=4} \cdot 4^{\overbrace{12}^{l=2}}$

1. $\hat{e} = 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 6$
2. $\hat{\omega} = 3 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 = 3664$

Maschinengenauigkeit 2^n-1

$$eps = \frac{B}{2} * B^{-n}$$

$\tilde{x}$ *ist näherung zu* x

Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$

Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|} = |\frac{\tilde{x}-x}{x}|$

Max Fehler: $|rd(x) - x| \leq \frac{B}{2} B^{e-n-1}$

Sei $x = 180.1234567$, auf $n = 7$ gerundet:

$rd(x) = 180.1235, \quad |rd(x) - x| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$

Fehlerfortpflanzung und Konditionierung

$$\underbrace{|f(\tilde{x}) - f(x)|}_{absoluter\ Fehler\ von\ f(x)} \approx |f'(x)| \cdot \underbrace{|\tilde{x} - x|}_{absoluter\ Fehler\ von\ x}$$

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{relativer\ Fehler\ von\ f(x)} \approx \underbrace{\frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}}_{Konditionszahl\ K} \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{relativer\ Fehler\ von\ x}$$

Konditionszahl: $\frac{|f'(x)|*|x|}{|f(x)|}$ x0=x ~x= falsch

Gut konditioniert: K≪1 schlecht: K≫1 |x|= +x / -(x)

Normierung nach Skript

$M = \{x \epsilon \mathbb{R} | x = \pm 0.m_1 m_2 m_3 \ldots m_n \cdot B^{\pm e_1 e_2 \ldots e_l}\} \cup \{0\}$

Wobei $m_1 \neq 0$ (falls $x \neq 0$)

Approximations- und Rundungsfehler

Maschinenzahlen sind nicht gleichmäßig verteilt, da größere Exponenten größere Abstände zwischen Zahlen erzeugen.

$$x_{\max} = (1 - B^{-n}) B^{e_{\max}}, \quad x_{\min} = B^{e_{\min}-1}$$

Skalarprodukt

$< \vec{a}, \vec{b} > \vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\varphi)$

0 wenn, Zwischenwinkel φ 90 Grad/ $\frac{2}{\pi}$

Orthogonal zu $\vec{a}$ => $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Winkelberechnung:

$$\cos(\varphi) = \left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right) \text{mit arccos} = \varphi$$

$$\frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} \cdot \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}}$$

(1) $\varphi < \frac{\pi}{2}$, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ist.

(2) $\varphi > \frac{\pi}{2}$, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ist.

(3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist.

Negative Zahlen

Beispiel: Für Exponenten stehen 3 Stellen mit Vorzeichen zur Verfügung im Dualsystem:

Vorzeichen-Betrag-Kodierung (sign-magnitude)

- Ein einzelnes Bit legt fest, ob der Exponent positiv oder negativ ist.
- Die übrigen 3 Bits geben den Betragswert des Exponenten von 0 bis 7 an.
- Da man für Exponent $+0$ und -0 eigentlich dieselbe Bedeutung hätte, „verschenkt" man einen Code.
- Das führt typischerweise zur **Exponent-Spanne von** -7 **bis** $+7$ (insgesamt 15 nutzbare Stufen).

Zweierkomplement-Darstellung (two's complement)

- Man verwendet alle 4 Bits direkt als ganzzahliges Zweierkomplement.
- Das ergibt einen Wertebereich von -8 bis $+7$ (insgesamt 16 Stufen).

IEEE

Erste Ziffer in der Mantisse darf nie 0 sein.

Bei Binär:

Da beim Binärsystem nicht 0 gleich 1 ist, wird dies als hidden Bit bezeichnet, und wird z.B. bei IEEE **nicht gespeichert**, somit hat man die vollen Mantissen Länge nach dem führenden 1

$$x = (-1)^V \cdot (\underbrace{\underbrace{1}_{\text{hidden bit}} . \underbrace{MMM \ldots MMM}_{\text{fraction}}}_{\text{Mantisse}}) \cdot 2^{(E \ldots E) - bias}$$

Spezialfall führende 0:

Normalisierte Zahl im IEEE 754:

- Exponent ≠ 0 ⇒ implizite führende 1 in der Mantisse.

Subnormale Zahl (Exponent = 0) ⇒ implizite führende 0.

Genauigkeit vergleichen

Beispiel Binär und Hex; Mantisse hat zwar mehr «Bits» in der Hex variante jedoch ist es zwischen 1 und 16 anstatt 1 und 2.

- **System 1:**
  - $n = 5$ Bits in der Mantisse $\Longrightarrow$ ca. $2^5 = 32$ diskrete Stufen zwischen 1.0 (binär) und 2.0.
  - Die Größe der „letzten Stelle" (ULP) unmittelbar oberhalb von 1 ist also $1/32$.
- **System 2:**
  - $n = 2$ Hex-Ziffern in der Mantisse $\Longrightarrow$ $2 \cdot 4 = 8$ Bits; also ebenfalls $2^8 = 256$ Stufen zwischen 1.0 (hex) und 16.0 (hex).
  - Umgerechnet auf den Bereich $[1, 2)$ sind das ebenfalls 32 Abstufungen.

Runden

- Regeln für allgemeines Runden und gerader Basis: Wird eine Gleitpunktzahl mit $n+1$ stelliger Mantisse und gerader Basis B auf n Stellen gerundet, so wird aufgerundet, falls $m_{n+1} \geq \frac{B}{2}$, und abgerundet, falls $m_{n+1} < \frac{B}{2}$.

(a) $rd\left(0.110100 \cdot 2^2\right) = 0.1101 \cdot 2^2$ mit $| rd(x) - x | = | 3.25 - 3.25 | = 0 \leq 1 \cdot 2^{2-4-1} = 2^{-3} = 0.125$

(b) $rd\left(0.110110 \cdot 2^2\right) = 0.1110 \cdot 2^2$ mit $| rd(x) - x | = | 3.5 - 3.375 | = 0.125 \leq 1 \cdot 2^{2-4-1} = 2^{-3} = 0.125$

(c) $rd\left(0.11111 \cdot 2^2\right) = 0.1000 \cdot 2^3$ mit $| rd(x) - x | = | 4 - 3.875 | = 0.125 \leq 1 \cdot 2^{2-4-1} = 2^{-3} = 0.125$

(d) $rd\left(0.120212 \cdot 3^3\right) = 0.1202 \cdot 3^3$ mit $| rd(x) - x | = | 15,6\overline{66} - 15,\overline{851} | = 0.\overline{185} \overset{?}{\leq} 1.5 \cdot 3^{3-4-1} = 1.5 \cdot 3^{-2} = 0.1\overline{66}$. Die Abschätzung gilt nicht. Für ungerade Basen müssten entweder die Abschätzung oder die Rundungsregeln angepasst werden.

(e) $rd\left(0.120222 \cdot 3^3\right) = 0.1210 \cdot 3^3$ mit $| rd(x) - x | = | 16 - 15,\overline{962} | = 0.\overline{037} \leq 1.5 \cdot 3^{3-4-1} = 1.5 \cdot 3^{-2} = 0.1\overline{66}$

(f) $rd\left(0.FFFFF \cdot 16^0\right) = 0.1000 \cdot 16^1$ mit $| rd(x) - x | = | 1 - 0,99999046325683\ldots | = 9.5367 \cdot 10^{-7} < 8 \cdot 16^{0-4-1} = 8 \cdot 16^{-5} = 7.6294 \cdot 10^{-6}$

Definition Vektor

Hat Betrag und Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2}$

- $\vec{0} = Nullvektor = Betrag\ ist\ 0$
- $\vec{e} = Einheitsvektor = Betrag\ ist\ 1$

$$\vec{a} * \frac{1}{|\vec{a}|} = \vec{e_a}$$

- $-\vec{a} = Gegenvektor\ von\ \vec{a}$

Kollinear

Vektoren sind parallel, heisst einer ist ein Vielfaches des anderen.

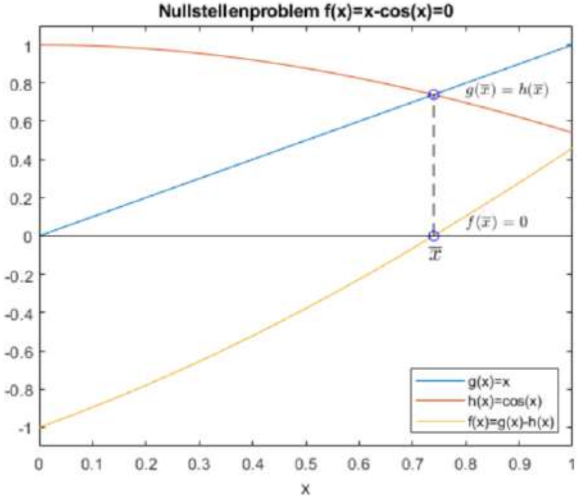
Max Nummern

Wenn mit Vorzeichen wir das addiert zu Mantisse und Exponent, da -1 Weil 0 doppelt gezählt. Am Schluss noch +1 für 0

Nullstellenprobleme

Problemstellung

$$f(x) = g(x) - h(x) = 0 \; wenn \; g(x) = h(x)$$



1. Gibt es eine Nullstelle von f(x)?
   In welchem Bereich?
2. Gibt es mehrere? Welche sind gesucht?

Fehlerabschätzung

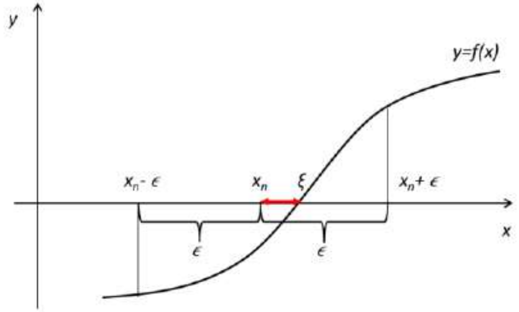
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ oder $f(a) \geq 0 \geq f(b)$. Dann muss f in $[a,b]$ eine Nullstelle besitzen.

Sei x_n also ein iterativ bestimmter Näherungswert einer exakten Nullstelle ξ der stetigen Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und es gelte für ein vorgegebene Fehlerschranke / Fehlertolerant $\epsilon > 0$

$$f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$$

Dann muss gemäss dem Nullstellensatz im offenen Intervall $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$ eine Nullstelle ξ liegen und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \xi| < \epsilon$$



$$f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0 \Rightarrow | x_n - \xi | < \epsilon$$

Banachscher Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $M \subseteq X$ eine abgeschlossene nicht-leere Teilmenge. Sei $\varphi : M \to M$ eine Kontraktion mit Kontraktionszahl $k \in [0,1)$, d.h. es gilt

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

Dann gilt:

1. **Existenz eines Fixpunkts:** Es existiert genau ein $x^* \in X$ mit $F(x^*) = x^*$.
2. **Eindeutigkeit des Fixpunkts:** Kein anderes $x \in X$ erfüllt $F(x) = x$.
3. **Konvergenz der Fixpunktiteration:** Für jeden Startwert $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $x_{n+1} = F(x_n)$ gegen den Fixpunkt x^*, und zwar nach der Abschätzung:

$$d(x_{n+1}, x^*) \leq \alpha \cdot d(x_n, x^*).$$

$$| x_n - \overline{x} | \quad \leq \quad \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \, | x_1 - x_0 | \qquad \text{a-priori Abschätzung}$$

$$| x_n - \overline{x} | \quad \leq \quad \frac{\alpha}{1-\alpha} \, | x_n - x_{n-1} | \qquad \text{a-posteriori Abschätzung}$$

Berechnung von a:

$$\alpha = \sup_{x \in [0,1]} |F'(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |-\sin(x)| = \sin(1) \approx 0.841.$$

oder:

$$\alpha = \sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \frac{|\cos(x) - \cos(y)|}{|x - y|} \approx \sup_{x \in [0,1]} |-\sin(x)| = \sin(1) \approx 0.841$$

Überprüfung, ob Satz angewendet werden kann:
Tiefster und Höchster wird vom Intervall M, muss im Intervall M bleiben nach Anwendung von φ und Überprüfung von k unter 1

Fixpunkiteration

Fixpunktgleichung: $F(x) = x$
Fixpunkte: Lösungen $\bar{x}$, für die $F(\bar{x}) = \bar{x}$ erfüllt ist
Eine Iteration: $x_{n+1} = F(x_n)$ mit Startwert x_0
Anziehend: $|F'(\bar{x})| < 1$ **Abstossend**: $|F'(\bar{x})| > 1$

Newton Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Startwert möglichst nahe bei der Lösung, überprüfen mit: $|\frac{f(x)*f''(x)}{(f'(x))^2}| < 1$ $E_{\text{abs}} \approx |x_{n+1} - x_n|$

Vereinfachtes Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$

Sekantenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} * f(x_n)$$

Nur lineare Konvergenz

Konvergenzgeschwindigkeit

Lineare Konvergenz: $|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|$.

Quadratische Konvergenz: $|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$.

Gauss mit Unbekannten

We are in the process of eliminating the $r_{32} = 2$ entry in the matrix R after the first pivot point, the matrix looks like:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Elimination Formula

To eliminate the $r_{32} = 2$ entry (second column, third row), we subtract a multiple of the s (R_2) from the third row (R_3):

$$R_3 \to R_3 - l_{32} \cdot R_2.$$

Here:

$$l_{32} = \frac{r_{32}}{r_{22}} = \frac{2}{\varepsilon}.$$

Substitute $R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ and $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$. The updated third row becomes:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{\varepsilon} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Compute Row Update

Perform the subtraction component-wise:

1. First element: $0 - \frac{2}{\varepsilon} \cdot 0 = 0.$
2. Second element: $2 - \frac{2}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 2 - 2 = 0.$
3. Third element: $4 - \frac{2}{\varepsilon} \cdot 3 = 4 - \frac{6}{\varepsilon}.$

The resulting third row is:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 - \frac{6}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

LGS

Gauss

Ziel: Umformung von Matrix zu oberen Dreiecksform

Formel: Berechnen durch Rückwärtseinsetzen:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$$

Transformation der Matrix:

$$z_j := z_j - \lambda z_i, \quad \text{mit } \lambda = \frac{a_{ji}}{a_{ii}},\ i < j.$$

Die Determinante wird berechnet als:

$$\det(A) = (-1)^l \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii},$$

wobei l die Anzahl der Zeilenvertauschungen ist.

Beispiel: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 29 \\ 43 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

1. **Eliminationsschritte:**
   - Subtrahiere das 7-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile:
   $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -26 & -36 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 29 \\ -160 \\ 20 \end{pmatrix}$$
   - Subtrahiere 2-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile:
   $$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -26 & -36 \\ 0 & -7 & -8 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 29 \\ -160 \\ -38 \end{pmatrix}$$
   - Subtrahiere $\frac{7}{26}$-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile:
   $$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -26 & -36 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 29 \\ -160 \\ 66 \end{pmatrix}$$
2. **Rückwärtseinsetzen:**
   - $x_3 = \frac{66}{22} = 3,$
   - $x_2 = \frac{-160-(-36)\cdot 3}{-26} = 2,$
   - $x_1 = \frac{29-5\cdot 2-6\cdot 3}{1} = 1.$

Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Fehlerfortpflanzung Gauss

Rundungsfehler bei Gleitkomma-Arithmetik. Bei jedem Eliminationsschritt multipliziert man Zeilen mit einem Faktor λ, wodurch sich der absolute Fehler um den Faktor |λ| vergrößert.

Algorithmus mit Spaltenpivotisierung:

1. Für $i = 1, \ldots, n$:
   - Suche das betragsmäßig größte Element $|a_{ki}|$ in der Spalte i für $k = i, \ldots, n$.
   - Vertausche die i-te Zeile mit der k-ten Zeile, falls nötig.
2. Führe die Eliminationsschritte durch:
$$z_j := z_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \cdot z_i, \quad j = i+1, \ldots, n.$$

LR-Zeilenvertausch

$PA = LR\ ;\ Ly = Pb => \ y\ ; Rx = y => x$

Pk erhält man aus der Einheitsmatrix In durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile.

$$P_k = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ \hline &&& 0 &&&& 1 &&& \\ \hline &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ \hline &&& 1 &&&& 0 &&& \\ \hline &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ i-\text{te Zeile} \\ \\ \\ \\ j-\text{te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

LR-Zerlegung

$Ax = b => LRx = b => Ly = b\ und\ Rx = y$

Die Matrix A wird in L(Normierte untere Dreiecksmatrix) und R(Obere Dreiecksmatrix) zerlegt.

1. Vorwärts einsetzen $Ly = b$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j}{l_{ij}}$$

2. Rückwärtseinsetzen $Rx = y$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij}x_j}{r_{ii}}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = LR$$

$$i = 1, j = 2 \rightarrow z_2 = z_2 - \frac{1}{\underbrace{(-1)}_{l_{21}}} \cdot z_1 \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1-1 & -3+1 & -1+1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, j = 3 \rightarrow z_3 = z_3 - \frac{5}{\underbrace{(-1)}_{l_{31}}} \cdot z_1 \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5-5 & 1+5 & 4+5 \end{pmatrix}$$

$$i = 2, j = 3 \rightarrow z_3 \equiv z_3 - \frac{6}{\underbrace{(-2)}_{l_{32}}} \cdot z_2 \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0+0 & 6-6 & 9-3 \end{pmatrix}$$

$$R = A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in L

$$l_{21} = \frac{1}{-1} = -1, \quad l_{31} = \frac{5}{-1} = -5, \quad l_{32} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

QR-Zerlegung

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst **orthogonal**, wenn $Q^T \cdot Q = I_n$ ist. Dabei ist I_n die $n \times n$ Einheitsmatrix. Man sagt auch kurz, Q ist eine **Orthogonalmatrix.**

Lösen von LGS: $A = QR\ ;\ Ax = b => \ QRx = b => Q^Tb = y\ und\ Rx = y$

Eigenwert: $A_k = Q_kR_k\ und\ A_{k+1} = R_kQ_k$

Berechnung durch Householder-Matrix:$H = I_n - \frac{2}{u^Tu}2uu^T$ oder wenn normiert: $= I_n - 2uu^T$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$H = I_n - 2\tilde{u}\tilde{u}^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_n} - 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2 \quad 3)$$

QR-Beispiel: Falls Matrix grösser, wiederholen aber mit $A_2, A_3, \ldots$

$$H_1 \cdot A_1 = H_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}_{A_1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $v_1 := a_1 + sign(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$
2. $u_1 := \frac{1}{|v_1|} \cdot v_1$
3. $H_1 := I_n - 2u_1u_1^T = Q_1$

$$H_2 \cdot A_2 = H_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{A_2} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & H_2 \\ 0 & H_2 & H_2 \end{pmatrix}$$

$$Q := Q_1^T \cdot Q_2^T, \quad R := \underbrace{Q_2 \cdot Q_1}_{Q^{-1}} \cdot A$$

Fehlerberechnung/Aufwandschätzung

Definition

$$Ax = b \Rightarrow A\tilde{x} = \tilde{b} = b + \Delta b$$

$$\Delta b = Defekt/Residuum \quad \Delta x = \tilde{x} - x = Fehler$$

Definition einer Vektornorm: Eine Abbildung $\|.\|$ ist eine Vektornorm, wenn sie für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Positive Definitheit: $\|x\| > 0$, wenn $x \neq 0$.
2. Homogenität: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Vektornormen/Matrixnormen

Für Vektoren $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$:

$$\text{1-Norm, Summennorm} \quad : \quad \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$

$$\text{2-Norm, euklidische Norm} \quad : \quad \| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\infty\text{-Norm, Maximumnorm} \quad : \quad \| x \|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} | x_i |$$

Für $n \times n$ *Matrix mit Vektornormen gibt es Matrixnormen*:

$$\text{1-Norm, Spaltensummennorm} \quad : \quad \| A \|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$$

$$\text{2-Norm, Spektralnorm} \quad : \quad \| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$\infty\text{-Norm, Zeilensummennorm} \quad : \quad \| A \|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

Beispiel Fehler

Untersuchen Sie die Fehlerfortpflanzung im linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8.1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Für den Fall, dass die rechte Seite von $\tilde{b}$ in jeder Komponente um maximal 0.1 von b abweicht.

$$\|\tilde{b} - b\|_\infty \leq 0.1, \qquad \|A\|_\infty = \max\{2 + 4, \; 4 + 8.1\} = 12.1$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 40.5 & -20 \\ -20 & 10 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 60.5$$

$$cond(A)_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 12.1 \cdot 60.5 = 732.05$$

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|b - \tilde{b}\|_\infty \leq 60.5 \cdot 0.1 = \underbrace{6.05}_{absoluter\ Fehler}$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq cond(A)_\infty \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 732 \cdot \frac{0.1}{1.5} = \underbrace{48.8}_{relativer\ Fehler}$$

Cond

Die Zahl $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ nennt man Konditionszahl der Matrix A

- $cond(A)$ gross → schlechte Konditionierung

Beispiel Aufwandschätzung

Wie viele Gleitkommaoperationen benötigt das Rückwärtseinsetzen gemäss Gauss?

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}, \qquad i = n, n-1, \dots, 1$$

Multiplikation und Division

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Addition und Subtraktion

$$0 + 1 + 2 + \dots + n - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n - 1 + 1) \cdot (n-1)}{2} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Summe beider Operationstypen

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^2$$

Aufwandabschätzung direkte Verfahren

Gleitkommaoperation werden berechnet anhand der Dimension n der Matrix A

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Ordnung: Ordnung, $O(n^q)$ wenn $q > 0$ die minimale Zahl ist, für Konstante $C > 0$, dass der Algorithmus für alle $n \in N$ weniger als Cn^q Operation braucht.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Fehlerabschätzung

Vektoren:

Sei $\| . \|$ eine Norm, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre $n \times n$ Matrix und $x, \tilde{x}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Dann gilt für den absoluten und den relativen Fehler in x:

- $\| x - \tilde{x} \| \leq \| A^{-1} \| \cdot \| b - \tilde{b} \|$
- $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$ falls $\| b \| \neq 0$

Die Zahl $\mathrm{cond}(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \|$ nennt man Konditionszahl der Matrix A bzgl. der verwendeten Norm.

Matrizen:

Sei $\| . \|$ eine Norm, $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguläre $n \times n$ Matrizen und $x, \tilde{x}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Falls

$$\mathrm{cond}(A) \cdot \frac{\| A - \tilde{A} \|}{\| A \|} < 1$$

dann gilt:

$$\frac{\| x - \tilde{x} \|}{\| x \|} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \mathrm{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\| A - \tilde{A} \|}{\| A \|} + \frac{\| b - \tilde{b} \|}{\| b \|} \right)$$

Iterative Verfahren

Jacobi/Gauss-Seidel

Zu lösen sei $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Die Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ sei zerlegt in der Form

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{L}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{D}}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{R}}$$

Jacobi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} &= -(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \text{ bzw.} \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} &= -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Beispiel mit Jacobi

$$Ax = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{8}\left(19 - \sum_{j=1, j\neq 1}^{3} a_{1j} \cdot x_j^{(0)}\right) = \frac{1}{8}(19 - (5 \cdot -1 + 2 \cdot 3)) = \frac{18}{8}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{9}\left(5 - \sum_{j=1, j\neq 2}^{3} a_{2j} \cdot x_j^{(0)}\right) = \frac{1}{9}(5 - (5 \cdot 1 + 1 \cdot 3)) = -\frac{1}{3}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{7}\left(34 - \sum_{j=1, j\neq 3}^{3} a_{3j} \cdot x_j^{(0)}\right) = \frac{1}{7}(34 - (4 \cdot 1 + 2 \cdot -1)) = \frac{32}{7}$$

Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)} &= -\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \text{ bzw.} \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} &= -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Konvergenz

$$x^{n+1} = Bx^n + c =: F(x^n)$$

B ist eine $n \times x$ Matrix, $||.||$ ist eine Norm und $\bar{x} = B\bar{x} + c = F(\bar{x})$

$$\bar{x}\ \textit{anziehend wenn}\ ||B|| < 1$$
$$\bar{x}\ \textit{abstossend wenn}\ ||B|| > 1$$

Wenn $\bar{x}$ ein anziehender Punkt dann konvergiert für alle Startvektoren x^0 gegen $\bar{x}$

$$\| \boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}} \| \leq \frac{\| \boldsymbol{B} \|^n}{1 - \| \boldsymbol{B} \|} \| \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} \| \quad \text{a-priori Abschätzung}$$

$$\| \boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}} \| \leq \frac{\| \boldsymbol{B} \|}{1 - \| \boldsymbol{B} \|} \| \boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n-1)} \| \quad \text{a-posteriori Abschätzung}$$

Diagonaldominanz

A ist eine ***diagonaldominante*** Matrix, falls **eines** der beiden folgenden Kriterien gilt

- *für alle* $i = 1, \ldots, n$: $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ (Zeilensummenkriterium)
- *für alle* $j = 1, \ldots, n$: $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{i,j}|$ (Spaltensummenkriterium)

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \rightarrow \begin{cases} i = 1 \rightarrow 4 > 2 \\ i = 2 \rightarrow 5 > 3 \\ i = 3 \rightarrow 5 > 3 \end{cases}$$

Fall A *diagonaldominant* ist, konvergiert das Gesamtschrittverfahren (Jacobi) und auch das Einzelschrittverfahren (Gauss-Seidel) für $Ax = b$.

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Konvergenz ist

$$\textit{Spektralradius}\ \rho(B) < 1$$

Beispiel Gauss-Seidel

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Iteration 0 (Startwert):

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

Iteration 1:

1. Berechnung von $x_1^{(1)}$:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(5 - (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0) = \frac{5}{4} = 1.25$$

2. Berechnung von $x_2^{(1)}$:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 1.25 + 1 \cdot 0) = \frac{11 + 2.5}{5} = \frac{13.5}{5} = 2.7$$

3. Berechnung von $x_3^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 1.25 - (-2) \cdot 2.7) = \frac{12 - 1.25 + 5.4}{5} = \frac{16.15}{5} = 3.23$$

Nach der ersten Iteration:

$$x^{(1)} = (1.25, 2.7, 3.23)^T$$

Iteration 2:

1. Berechnung von $x_1^{(2)}$:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(5 - (-1) \cdot 2.7 + 1 \cdot 3.23) = \frac{5 + 2.7 - 3.23}{4} = \frac{4.47}{4} = 1.1175$$

2. Berechnung von $x_2^{(2)}$:

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 1.1175 + 1 \cdot 3.23) = \frac{11 + 2.235 - 3.23}{5} = \frac{10.005}{5} = 2.001$$

3. Berechnung von $x_3^{(2)}$:

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 1.1175 - (-2) \cdot 2.001) = \frac{12 - 1.1175 + 4.002}{5} = \frac{14.8845}{5} = 2.9769$$

Nach der zweiten Iteration:

$$x^{(2)} = (1.1175, 2.001, 2.9769)^T$$

Jacobi L/D/R

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Linke Dreiecksmatrix L:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix D:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Rechte Dreiecksmatrix R:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesamtschrittverfahren

für das Gesamtschrittverfahren (Jacobi) ist

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}),$$

für das Einzelschrittverfahren (Gauss-Seidel) ist

$$\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{R}.$$

Komplexe Zahlen

Definition

Eine komplexe Zahl ist ein geordnetes Paar zweier reeller Zahlen

Normalform: $z = x + iy$

Trigonometrische Form: $z = r(\cos\varphi + i * \sin\varphi)$

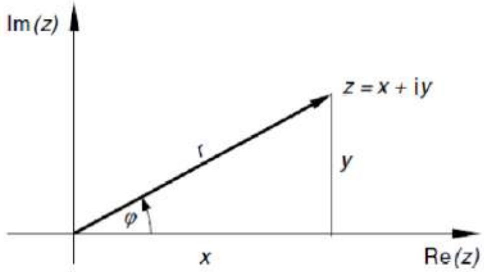
Wobei $r = |z|$ *und* φ *zwischen* $x -$ *Achse & Zeiger*

Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$

Wobei $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i * \sin\varphi$

Realteil: $Re(z) = x$

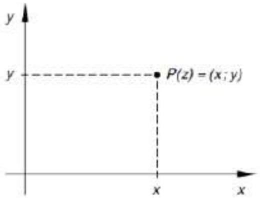
Imaginärteil: $Im(z) = y$

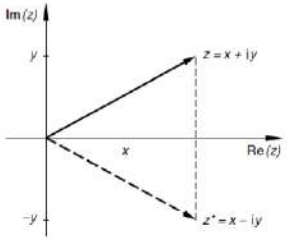


Imaginäre Einheit: $i^2 = -1$

Auf kartesischen Ebene: $P_z = (x, y)$

Zeigerlänge: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$





Grundrechenarten

Es sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

- Summation $\quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Subtraktion $\quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

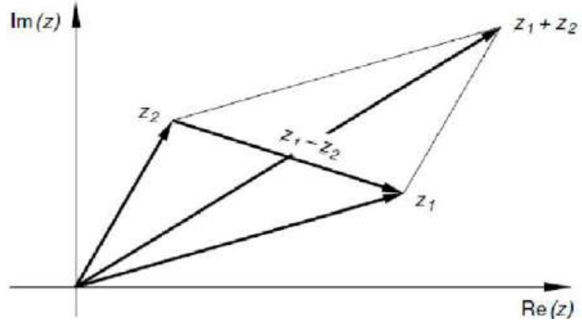
$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$



Potenzieren und Radizieren / Fundamentalsatz der Algebra

Die n-te Potenz einer komplexen Zahl lässt sich einfach berechnen, wenn diese in der trigonometrischen oder der Exponentialform vorliegt (Sei $n \in \mathbb{N}$):

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \rightarrow z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^ne^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten und Variablen ai, $z \in \mathbb{C}$ Besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen **genau n Lösungen**:

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$$

Eine komplexe Zahl z wird als **n-te Wurzel** von $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet, wenn:

$$z^n = a \rightarrow z = \sqrt[n]{a}$$

Die linke Seite der algebraischen Gleichung ist ein Polynom vom Grad n und lässt sich wie im Reellen in **Linearfaktoren zerlegen mit den Nullstellen** z_i: $P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$

Lösungen der algebraischen Gleichung $z^n = a$

$$z^n = a = r_0e^{i\varphi} \ (r_0 > 0; n = 2,3,4, \ldots)$$

Besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ genau n verschiedene Lösungen (Wurzeln)

$$z_k = r(\cos\varphi_k + i \cdot \sin\varphi_k) = re^{i\varphi_k}$$

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}, \quad (\text{für } k = 0,1,2, \ldots, n-1)$$

Die zugehörigen Bildpunkte liegen in der komplexen Zahlenebene auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r = \sqrt[n]{r_0}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen n-Ecks.

Darstellungsformen

- Normalform $\quad z = x + iy$
- Trigonometrische Form $\quad z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$
- Exponentialform $\quad z = re^{i\varphi}$

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Beispiel

$$z = 3 - 11i$$

$$3 = r \cdot \cos\varphi, \quad 11 = r \cdot \sin\varphi, \quad r = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$$

$$\arcsin\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \varphi = 1.3$$

$$z = \cos(1.3) + i \cdot \sin(1.3), \quad z = \sqrt{130} \cdot e^{i \cdot 1.3}$$

Quadrant	Vorzeichen von a	Vorzeichen von b	Formel für θ	Bereich des Winkels θ
I	$+$	$+$	$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
II	$-$	$+$	$\theta = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$
III	$-$	$-$	$\theta = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$
IV	$+$	$-$	$\theta = 2\pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$

Eigenwerte/Vektoren/Raum

Polynom und Spur

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \boldsymbol{A} \Longleftrightarrow \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = 0$$

Die Abbildung p definiert durch

$$p : \lambda \mapsto \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$$

ist ein Polynom vom Grad n und wird **charakteristisches Polynom** von $\boldsymbol{A}$ genannt. Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit hat $\boldsymbol{A}$ also genau n Eigenwerte, von denen manche mehrfach vorliegen können.

Die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist gerade das Produkt ihrer Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Summe der Diagonalelemente von $\boldsymbol{A}$, d.h. gleich der **Spur** (engl: trace, abgekürzt tr) von $\boldsymbol{A}$:

- $\det \boldsymbol{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$
- $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

Ist λ_i ein Eigenwert der regulären Matrix $\boldsymbol{A}$, so ist der Kehrwert $1/\lambda_i$ ein Eigenwert der inversen Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Definition

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ heisst *Eigenwert* von A, wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit

$$Ax = \lambda x$$

x heisst dann *Eigenvektor* von A.

Die Eigenwerte einer Diagonal- oder eine Dreiecksmatrix sind deren Diagonalelemente.

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \cdot x = 0$$

Eigenraum

Hat man zwei Eigenvektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ zum selben Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, so ist $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ und auch jedes Vielfache von $\boldsymbol{x}$ ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert λ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{A}(\mu \boldsymbol{x}) &= \mu \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mu \lambda \boldsymbol{x} = \lambda \mu \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Nimmt man dazu noch den Nullvektor erhält man den Eigenraum:
Ein **Eigenraum** ist der Vektorraum, der zu einem Eigenwert λ einer Matrix A gehört. Er umfasst alle Vektoren x, die die Gleichung $(A - \lambda I_n)x = 0$ erfüllen, wobei I die Einheitsmatrix ist.
Dimension: Wird als **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ bezeichnet. Sie gibt die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren an, die zu λ gehören.$n - Rg(A - \lambda I_n$
Beziehung zur algebraischen Vielfachheit: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.
- Sind alle n Eigenwerte verschieden, so gehört zu jedem Eigenwert genau ein linear unabhängiger Eigenvektor, der bis auf einen (beliebigen) Faktor eindeutig bestimmt ist.
- Tritt ein Eigenwert k – fach auf (d.h. mit der algebraischen Vielfachheit k), so gehören dazu mindestens ein, höchstens aber k linear unabhängige Eigenvektoren. Beim Auftreten mehrfacher Eigenwerte kann also die Gesamtzahl linear unabhängiger Eigenvektoren kleiner sein als n.
- Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind immer linear unabhängig

Linear unabhängige Basis: Die Basis des Eigenraums besteht aus linear unabhängigen Eigenvektoren, die alle Vektoren im Eigenraum als Linearkombination repräsentieren.
Geometrische Bedeutung: Der Eigenraum gibt an, in welchen Richtungen eine Matrix A skaliert (nicht rotiert) transformiert.

Diagonalmatrix/untere/obere Dreiecksmatrix

Falls $\boldsymbol{A}$ eine Diagonalmatrix ist, dann gilt

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

mit

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda).$$

Die Diagonalelemente der Diagonalmatrix sind also in diesem Fall die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit genau die Eigenwerte von A.
Das gleiche gilt für untere Dreiecksmatrizen

Algebraische Vielfachheit/Spektrum

Es sei $A \in \mathbb{R}n \times n$. Die Vielfachheit, mit der λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A auftritt, heisst algebraische Vielfachheit von λ. Das Spektrum $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von A.

Beispiel

Beispiel: Berechne *Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ -1 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - 5 \cdot -1$$

$$p(\lambda) = -4 + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1 = i^2$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = i, \qquad \lambda_2 = -i$$

Eigenvektor für $\boldsymbol{\lambda_1 = i}$

Gauss-> $\begin{pmatrix} 2 - i & 5 \\ -1 & -2 - i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 - i & 5 \\ 0 & -2 - i + \frac{5}{2 - i} \end{pmatrix}$

$$-2 - i + \frac{5}{2 - i} = (2 - i)(-2 - i) + 5 = 1 + i^2 = 0$$

$$0 = (2 - i) \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$x_1 = -\frac{5x_2}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = -\frac{5 \cdot (2 + i)}{4 - i^2} = -\frac{10 + 5i}{5} = -2 - i$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum

$$E_{\lambda_1} = \left\{ x \middle| x = \mu = \begin{pmatrix} -2 - i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ x \middle| x = \mu = \begin{pmatrix} -2 + i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Charakteristische Polynom

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

mit $p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$.

Numerische Berechnung

Ähnliche Matrizen / Diagonalisierbarkeit

Ähnliche Matrizen:

Zwei Matrizen A und B heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix T gibt, sodass:

$$B = T^{-1}AT.$$

Dabei hat B dieselben Eigenwerte wie A. Die Ähnlichkeitstransformation verändert die Basis, in der die Matrix dargestellt wird, lässt jedoch die Eigenwerte invariant.

Diagonalisierbarkeit:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist **diagonalisierbar**, wenn sie zu einer Diagonalmatrix D ähnlich ist:

$$D = T^{-1}AT,$$

wobei T eine Matrix ist, deren Spalten die linear unabhängigen Eigenvektoren von A sind, und D die Eigenwerte von A auf der Diagonale enthält:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Eigenschaften:

Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zueinander ähnliche Matrizen. Dann gilt:

1. $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ haben dieselben Eigenwerte, inkl. deren algebraischer Vielfachheit.
2. Ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\boldsymbol{B}$, dann ist $\boldsymbol{Tx}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\boldsymbol{A}$.
3. Im Spezialfall, dass $\boldsymbol{A}$ diagonalisierbar ist (also $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ eine Diagonalmatrix ist), sind die n Diagonalelemente von $\boldsymbol{D}$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ und die n linear unabhängigen Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ stehen in den Spalten von $\boldsymbol{T}$.

Vektoriteration(Mises)

Falls nur der grösste Eigenwert gesucht ist

Verfahren:

1. Wähle einen Startvektor $v^{(0)}$ mit $\|v^{(0)}\| = 1$.
2. Berechne rekursiv:

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|_2}, \qquad \lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}.$$

3. Für $k \to \infty$ konvergieren $v^{(k)}$ gegen den Eigenvektor und $\lambda^{(k)}$ gegen den größten Eigenwert

Spektralradius

Der ***Spektralradius*** $p(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$p(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \textit{ ist ein Eigenwert von } A \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und dem betragsmässig grössten Eigenwert λ_1 mit

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

QR-Verfahren

Algorithmus:

1. Initialisiere $A_0 = A$ und $P_0 = I_n$ (Einheitsmatrix).
2. Iteriere für $i = 0, 1, 2, \dots$:
   - Führe die QR-Zerlegung durch: $A_i = Q_i R_i$.
   - Aktualisiere $A_{i+1} = R_i Q_i$ und $P_{i+1} = P_i Q_i$.
3. Die Matrizen A_i konvergieren gegen A_∞, wobei die Diagonalelemente die Eigenwerte enthalten.

Ergebnisse:

- Für eine symmetrische Matrix A konvergieren die Spalten der Matrix P_k (Produkt der Q_i) geger die Eigenvektoren von A.
- Sind die Eigenwerte betraglich verschieden ($|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$), entsteht eine "perfekte" obere Dreiecksmatrix .

Mehrer Lösungen

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung für $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 = 1$$

Lösung: In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung nur die zwei Lösungen $z = \pm 1$, in $\mathbb{C}$ aber wegen

$$z^6 = 1 = 1 \cdot e^{i(0+k\cdot 2\pi)}$$

die 6 verschiedenen (paarweise komplex konjugierten) Lösungen

$$z_k = re^{i\frac{0+k\cdot 2\pi}{6}} \quad (k = 0, 1, \dots, 5)$$

mit $r = \sqrt[6]{1} = 1$. Konkret lauten die Lösungen (vgl. Abb. $\boxed{4.10}$):

$$\begin{aligned}
k = 0: &\quad z_0 = 1 \cdot e^{i\cdot 0} &&= 1 \\
k = 1: &\quad z_1 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} &&= \cos(\tfrac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\tfrac{\pi}{3}) = 0.5 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \\
k = 2: &\quad z_2 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}} &&= \cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\tfrac{2\pi}{3}) = -0.5 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \\
k = 3: &\quad z_3 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{3}} &&= \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 \\
k = 4: &\quad z_4 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{3}} &&= \cos(\tfrac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\tfrac{4\pi}{3}) = -0.5 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i \\
k = 5: &\quad z_5 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}} &&= \cos(\tfrac{5\pi}{3}) + i \cdot \sin(\tfrac{5\pi}{3}) = 0.5 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$