Zahlenmengen und Symbole

$\mathbb{N}$ *Natürliche Zahlen*
$\mathbb{N}_0$ *Natürliche Zahlen mit Null*
$\mathbb{N}^+$ *Natürliche Zahlen ohne Null*
$\mathbb{Z}$ *Ganze Zahlen*
$\mathbb{Q}$ *Rationale Zahlen*
$\mathbb{R}$ *Reelle Zahlen*
$\mathbb{C}$ *Komplexe Zahlen*
($\mathbb{K}$ *Körper*)
$\forall$ für alle gilt
$\exists$ Es existiert
$a \in \mathbb{L}$ a ist Element von L
$\mathbb{G} \subset \mathbb{L}$ G ist Teilmenge von L

Körperaxiome (Gelten für $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

Addition
i) Assoziativität: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{K}$
ii) Neutralelement der Addition (Existenz der Null):
$\exists n \in \mathbb{K}: x + n = x, \forall x \in \mathbb{K}$
iii) Inverses Element der Addition (Existenz des Negativen):
$\forall x \in \mathbb{K}\, \exists y \in \mathbb{K}: x + y = 0$
iv) Kommutativität: $x + y = y + x\, \forall x, y \in \mathbb{K}$
Multiplikation
v) Assoziativität: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \forall x, y, z \in \mathbb{K}$
vi) Neutralelement der Multiplikation (Existenz der Eins):
$\exists e \in \mathbb{K}: x \cdot e = x, \forall x \in \mathbb{K}$
vii) Inverses Element der Multiplikation (Existenz des Kehrwerts): $\forall x \in \mathbb{R}\ \{0\} \exists y \in \mathbb{K}: x \cdot y = 1$
viii) Kommutativität: $x \cdot y = y \cdot x\, \forall x, y \in \mathbb{K}$
ix) Distributivgesetz:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\, \forall x, y, z \in \mathbb{K}$

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

ABC-Formel:

$$\text{für } ax^2 + bx + c = 0 \text{ gilt } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

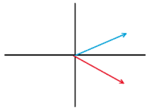
$$\text{Wenn } b^2 - 4ac = D \begin{cases} > 0 \to 2\ Lsg\ in\ \mathbb{R} \\ = 0 \to 1\ Lsg\ in\ \mathbb{R} \\ < 0 \to 2\ Lsg\ in\ \mathbb{C} \end{cases}$$

$\sqrt{-s} = \sqrt{i^2 * s} = i * \sqrt{s} \neq i * s$
$z = x + y * i$
$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1 \Longrightarrow wi^2 = -w$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

$$Re(z) := x = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$Im(z) := y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

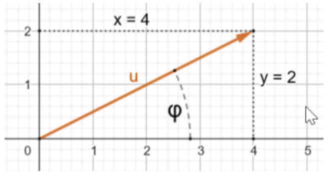
$\overline{z} = x - y * i$
$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$
$\frac{\overline{1}}{z} = \frac{1}{\overline{z}}$
$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
$\overline{z * w} = \overline{z} * \overline{w}$
$|z|^2 \neq z^2$
Komplexe Konjugation:
Spiegelung des Graphen an der x-Achse $\overline{z} = x - y * i$



Absolutbetrag

$|\cdot|$ ist definit: $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
$|\cdot|$ ist absolut homogen: $|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \forall w, z \in \mathbb{C}$
$|\cdot|$ ist subadditiv (Dreiecksungleichung): $|w + z| \leq |w| + |z| \forall w, z \in \mathbb{C}$

Polarform von komplexen Zahlen



Kartesische Form: $x + y * i$
Polarform: $r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = r \cdot cis(\varphi)$
Umrechnung: Polarform → kartesische Form
Gegeben: r, φ Gesucht: x, y
$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\varphi$

Umrechnung: kartesische Form → Polarform
Gegeben: x, y Gesucht: r, φ
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \cos^{-1}\frac{x}{r} & , y \geq 0 \\ -\cos^{-1}\frac{x}{r} & , y < 0 \end{cases}$$

$\arg(z) = \varphi\ im\ Intervall\ ]-\pi, \pi]$

Exponentialform von komplexen Zahlen

$r \cdot cis(\varphi) = re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}, k \in \mathbb{Z}$
Eulersche Formel:
$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = x + iy$

Die Eulersche Zahl e

Definitionen:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad oder\ e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Rechnen mit komplexen Zahlen

$z_1 = x_1 + i \cdot y_1$
$z_2 = x_2 + i \cdot y_2$
$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i \cdot (y_1 + y_2)$
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot cis(\varphi_1) \cdot r_2 \cdot cis(\varphi_2) = r_1 r_2 \cdot cis(\varphi_1 + \varphi_2)$
$= r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2) + k \cdot 2\pi i}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}$$

$$= \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{{x_2}^2 - {y_2}^2 * i^2}$$

$$= \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot cis(\varphi_1)}{r_2 \cdot cis(\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot cis(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2) + k \cdot 2\pi i}$$

$B^E = Z \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[E]{Z} = B \quad \Leftrightarrow \quad \log_B Z = E$
$b = a^{\log_a b}$
Reelle Zahl hoch komplexe Zahl
$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$!! $y\ in\ e^{iy} \neq y\ in\ kart. Form$!!
$a^z = e^{\ln(a) \cdot z}$ Bsp. $5^{1+i} = 5 \cdot e^{\ln(5) \cdot i} = 5 \cdot cis(\ln(5))$
reelle Wurzeln von komplexen Zahlen
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}} = \sqrt[n]{r} \cdot \exp\left(i\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} i\right)$
Hauptzweig der n-ten Wurzel: Definition: $k = 0, \varphi = \arg(z)$

Einheitswurzeln: Wurzeln der Zahl 1

$$\sqrt[4]{1}\begin{cases} k=0: & z_0 = 1\cdot e^{i\cdot 0} = 1 \\ k=1: & z_1 = 1\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot i} = i \\ k=2: & z_2 = 1\cdot e^{\pi\cdot i} = -1 \\ k=3: & z_3 = 1\cdot e^{\frac{3\pi}{2}\cdot i} = -i \end{cases}$$

Komplexer Logarithmus

Weil φ nicht eindeutig existiert keine Umkehrfunktion. Darum

Definition: $\varphi = \arg(z)$

$\ln(z) = \ln(|z|) + i\cdot \arg(z)$

$i^i = e^{\ln(i)\cdot i} = e^{(\ln(1)+i\cdot\pi/2)\cdot i} = e^{0+i^2\cdot\pi/2} = e^{-\pi/2}$

Vektoren

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}$

$\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \forall x \in \mathbb{C}$

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Nullvektor

$a * \vec{v} = a * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*x \\ a*y \\ a*z \end{pmatrix}$

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Norm eines Vektors

$$\|\vec{x}\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

Die Norm ist ...

definit: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

absolut homogen: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}^n$

subadditiv: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{K}^n$

Einheitsvektor

Ein Vektor $x \in K^n$ mit $\|x\| = 1$, heisst normierter Vektor oder Einheitsvektor.

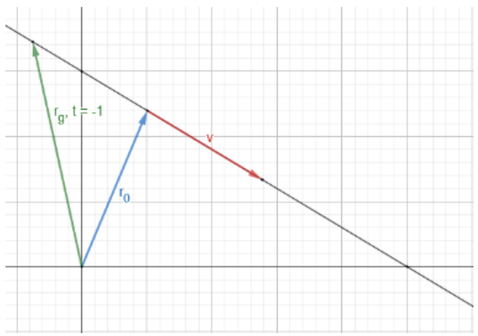
Sei $x \in K^n$ ein beliebiger Vektor. Dann ist der Vektor $\frac{x}{\|x\|}$ ein Einheitsvektor in der gleichen Richtung wie x.

$\mathbb{R}^3: e_x = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, e_y = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}, e_z = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$

$e_a = \frac{a}{\|a\|}$

$a = e_x \cdot x_a + e_y \cdot y_a + e_z \cdot z_a$

Geradengleichung



Die Parametergeradengleichung einer Geraden g im $\mathbb{R}^3$ lautet:

$g: r_g = r_0 + t * v, t \in \mathbb{R}$

r_0 *Stützvektor (Ortsvektor zu bel. Punkt auf g*

r_g *Ortsvektor zu jedem Pkt auf g*

v *Richtungsvektor (Länge egal, wird durch t gestreckt)*

Skalarprodukt

$\langle x, y\rangle = x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3, \quad x, y \in \mathbb{K}^n, \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$

$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi)$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$

Orthogonale Vektoren: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

Skalarprodukt mit sich selbst: $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 \cdot cos(0) = \|x\|^2$

Eigenschaften des Skalarproduktes ($\mathbb{C}^n$). Das Skalarprodukt ist...

sesquilinear

$\langle c + w, z\rangle = \langle c, z\rangle + \langle w, z\rangle$ und

$\langle c, w + z\rangle = \langle c, w\rangle + \langle c, z\rangle \forall c, w, z \in \mathbb{C}^n$

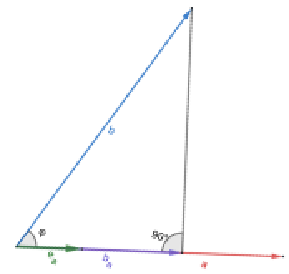
$\langle \lambda w, z\rangle = \bar{\lambda}\langle w, z\rangle$ und

$\langle w, \lambda z\rangle = \lambda\langle w, z\rangle \forall \lambda \in \mathbb{C}, w, z \in \mathbb{C}^n$

hermitesch: $\langle w, z\rangle = \overline{\langle z, w\rangle}$

positiv-definit: $\langle z, z\rangle \geq 0 \forall z \in \mathbb{C}^n$ und $\langle z, z\rangle = 0 \Leftrightarrow z = 0x$

Orthogonalprojektion



$b_a = e_a \cdot \lambda$

$\lambda = \cos\varphi \cdot \|b\|$

$b_a = \frac{a}{\|a\|} \cdot \cos\varphi \cdot \|b\|$

$b_a = \frac{\cos\varphi \cdot \|b\| \cdot \|a\|}{\|a\|^2} \cdot a$

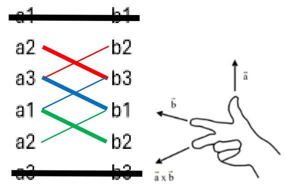
$b_a = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|^2} \cdot a$

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt

$n = a \times b \in \mathbb{R}^3$

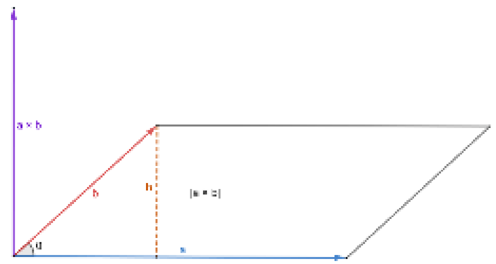
Der Vektor n ist senkrecht auf a und b, kurz: $n \perp a$ & $n \perp b$

$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_2 b_3} - a_3 b_2 \\ \mathbf{a_3 b_1} - a_1 b_3 \\ \mathbf{a_1 b_2} - a_2 b_1 \end{pmatrix}$



Die Norm von n ist gegeben durch $\|n\| = \|a \times b\| = \|a\|\|b\| \sin(\theta)$.

Dies entspricht der Fläche des Parallelograms, welches von a und b aufgespannt wird.



Das Vektorprodukt ist antikommutativ:

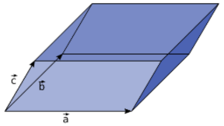
$a \times b = -b \times a, \forall a, b \in \mathbb{R}^3$

Das Vektorprodukt ist distributiv:

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$\lambda\,(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) \forall a, b \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$

Spatprodukt



$V_{Spat} = G * h = \|a \times b\| * \frac{\langle a \times b, c \rangle}{\|a \times b\|} = \langle a \times b, c \rangle$

$G = \|a \times b\|$

$h = \frac{\langle a \times b, c \rangle}{\|a \times b\|^2} \cdot a \times b$

$\|h\| = \frac{\langle a \times b, c \rangle}{\|a \times b\|^2} \cdot \|a \times b\| = \frac{\langle a \times b, c \rangle}{\|a \times b\|}$

Matrizen

Matrix m ×n (m Zeilen, n Spalten): $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$

Nullmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Einheitsmatrix (Bsp 3 ×3, nur mit n×n-Matrizen): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrizenaddition (und -subtraktion)

Nur mit zwei Matrizen gleicher Dimension. Elementweise:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

Matrixprodukte

Matrix · Vektor = Vektor Bedingung «Anz. Spalten Matrix = Anzahl Elemente Vektor: $\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + dy \\ bx + ey \\ cx + fx \end{pmatrix}$

Matrix · Matrix = Matrix Bedingung «Anz. Zeilen Matrix A = Anz. Spalten Matrix B:

		3	5	4
		7	3	9
1	6	1*3+6*7	1*5+6*3	1*4+6*9
5	7	5*3+7*7	5*5+7*3	5*4+7*9

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \nexists$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 45 & 23 & 58 \\ 64 & 46 & 83 \end{pmatrix}$

Lineare Gleichungssysteme

Gaussalgorithmus: Matrix in Zeilen-Stufenform:

$$\begin{matrix} \boxed{*} & * & * & * & * & a \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * & * & b \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{matrix}$$

$\boxed{*}$ $Pivotelement\ (\neq 0)$

$*\ beliebige\ Zahl$

$a, b, c, d, e \quad Lösungsvektor$

Letzte Zeile ist eine Nullzeile. Falls $e \neq 0$ hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Rang der Matrix: Anzahl Pivotelemente (r)

Rückwerts-einsetzten: in Spalten ohne Pivot darf eine freie Variable eingesetzt werden. Anz. Freie Var. = Anz. Spalten (n) – r = Anz. Spalten ohne Pivot

Homogenes LGS, wenn Lösungsvektor = Nullvektor

Die Lösungsmenge vom homogenen LGS Ax = 0 wird als Kern der Matrix A $\ker(A)$ bezeichnet.

Homogenes LGS hat immer mindestens eine Lösung (oder ∞-viele).

$rang(A) = n \iff \ker(A) = \{0_n\}$

$\dim(\ker(A)) + rang(A) = n$

$rang(A) < n \iff \ker(A)\ hat\ \infty - \text{viele Lsg.}$

$dim(ker(A)) = Anz.\ freie\ Variablen = Spalten\ ohne\ Pivot$

Superpositionsprinzip

Lösung umformen: $A * x = b \iff A * (x_p + x_h) = b$

$A * x_h = 0$

$x_p ist\ irgendeine\ Lösung\ des\ LGS$

Dreiecksmatrizen

$\begin{matrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{matrix}$ $obere\ Dreiecksmatrix$

$\begin{matrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{matrix}$ $untere\ Dreiecksmatrix$

$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{matrix}$ $unipotente\ untere\ Dreiecksmatrix$

$\begin{matrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{matrix}$ $Diagonalmatrix\ (z.B.\ Einheitsmatrix\ \mathbb{1})$

LU-Zerlegung

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{matrix} = L \cdot U$$

L (unipotente untere Dreiecksmatrix) enthält Gaussschritte, U (obere Dreiecksmatrix) entspricht Zeilenstufenform nach Gaussalgorithmus.

Es darf nur vielfaches von einer Zeile abgezogen werden.

$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \frac{21}{11} & 22 - \frac{21}{11} * 12 & \ldots & 24 - \frac{21}{11} * 14 \\ \frac{31}{11} & 32 - \frac{31}{11} * 12 & \ldots & 34 - \frac{31}{11} * 14 \\ \frac{41}{11} & 42 - \frac{41}{11} * 12 & \ldots & 44 - \frac{41}{11} * 14 \end{pmatrix}$$

Vorwärts-und Rückwärtseinsetzten

$A = L \cdot U \ \rightarrow \ A \cdot x = b \ \rightarrow \ L \cdot U \cdot x = b$

$L \cdot y = b \Longrightarrow \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & \\ 1 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & b_2 \\ * & \cdots & 1 & b_3 \end{array}$

$U \cdot x = y \Longrightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ * & \cdots & * & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & y_2 \\ 0 & \cdots & * & y_3 \end{array}$

Falls Zeilen vertauscht werden müssen, wird mit einer Permutationsmatrix ausgeglichen, diese entspricht der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ mit vertauschten Zeilen.

Vorwärtseinsetzen: L · y = P · b ⇒ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Transponierte Matrix

Zeilen und Spalten werden vertauscht, oder Spiegelung an der Diagonalen

$A = (a_{ij}) \in K^{m\times n} \Longrightarrow A^T = (a_{ij}^T) \Longrightarrow a_{ij}^T = a_{ji}$

$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 12 & 22 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt von zwei Vektoren: $\langle x, y\rangle = x^T y$

Rechenregeln Transponierte Matrix:

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(\lambda A)^T = \lambda A^T$

$(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$!!Reihenfolge beachten!!

Adjungierte Matrix

Normalerweise verwendet für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Matrix transponieren und Einträge komplex konjugieren.

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n} \Longrightarrow A^* = (a_{ij}^*) \Longrightarrow a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$

Rechenregeln wie bei Transponierte Matrix ausser: $(\lambda A)^T = \overline{\lambda} A^T$

$A^T = A^* \ \forall\ \mathbb{R}^{m\times n}$

Spur(Trace) einer Matrix

Nur für n×n-Matrizen, Summe der Diagonalelemente

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

Symmetrische Matrizen

$\begin{pmatrix} * & a \\ a & * \end{pmatrix}$ symmetrisch, wenn $A^T = A$ $für$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ antisymmetrisch, wenn $A^T = -A$ $für$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\begin{pmatrix} * & x+iy \\ x-iy & * \end{pmatrix}$ hermitesch oder selbstadjungiert, wenn $A^* = A$ $für$ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$\begin{pmatrix} iy_2 & x+iy_1 \\ -x+iy_1 & iy_3 \end{pmatrix}$ anti-hermitesch, wenn $A^* = -A$ $für$ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Lineare Ausgleichsrechnung

Ziel: Eine Gerade durch eine Menge Punkte zu legen.

Problem: «Zu viele Gleichungen» für «zu wenige Unbekannte»

= Überbestimmtes Gleichungssystem

$A \cdot x = b$ hat keine Lösung.

Wir lösen Gleichung $A \cdot \overline{x} = \overline{b} \approx b$ wobei Residuum r möglichst klein sein soll.

$\|r\| := \|b - Ax\| = \|b - \overline{b}\|$

Vorgehen:

Funktionsgleichung aufstellen:

Für Geraden: $y = f(x) = a_1 x + a_2$

Für Parabeln: $y = f(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

Für Punkte $(x_1|y_1), (x_2|y_2), (\cdots|\cdots), (x_n|y_n)$ Matrix A und Lösungsvektor b erstellen Bsp. Quadratisch:

$$A := \begin{matrix} {x_1}^2 & x_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {x_n}^2 & x_n & 1 \end{matrix} \qquad \overline{x} := \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \qquad b := \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}$$

In Normalengleichung einsetzen:

$A^T A \cdot \overline{x} = A^T b$

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $\quad A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ $\quad A^T A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\quad b \in \mathbb{K}^m$ $\quad A^T b \in \mathbb{K}^n$

Gleichungssystem mit Gauss-Algorithmus lösen.

Determinante einer Matrix

Nur für n×n-Matrizen

Geschrieben als $\det(A) = |A| = \det(a_1, a_2)$

Eigenschaften der Determinante

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(U) = Produkt\ der\ Diag.elemente$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$

Berechnung bei 2×2-Matrizen

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

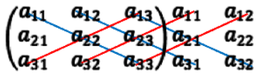
entspricht Kreuzprodukt von $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

Vorzeichen zeigt Orientierung (vom ersten zum zweiten Vektor: Gegenuhrzeigersinn = positiv

Berechnung bei 3×3-Matrizen

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad \det(A)$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$
$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$



Regel von Sarrus

Determinante entspricht dem Spatprodukt der drei Vektoren $\langle a_1 \times a_2, a_3\rangle$

Berechnung bei n×n-Matrizen

Mit Gauss in Spalten bis zur Einheitsmatrix (oder Dreiecksmatrix)

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c-2a & d-2b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b+3a \\ c & d+3c \end{pmatrix}$

Vielfaches einer Zeile oder Spalte addieren

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ Zeilen vertauschen → Vorzeichenwechsel

Variante 1 zum Berechnen: Gauss bis zur Einheitsmatrix, zurückrechnen der Schritte.

Variante 2: LU-Zerlegung, det(U) entspricht det(A)

Falls mehrere gleiche Spalten vorkommen, ist die det(A)=0

Variante 3: Laplace'scher Entwicklungssatz

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Spalte oder Zeile mit vielen Nullen wählen (Bsp. entwickelt nach 3. Zeile)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + 0 + (-1)^{3+3} \cdot 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 0$$

$$= -25$$

Inverse einer Matrix

Nur für n×n-Matrizen

Eine Matrix mit $rang(A) = n$ wird regulär genannt und ist invertierbar

Eine nicht reguläre Matrix heisst singulär.

Bei LGS gilt $A \cdot x = b \implies A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b \implies x = A^{-1} \cdot b$ falls eine Lsg. existiert.

Eigenschaften:

$A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} = A \cdot A^{-1}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

!! Beim Gleichungen lösen: Reihenfolge beachten!! $A \cdot B \cdot B^{-1} = A \neq B^{-1} \cdot A \cdot B$

Inverse berechnen:

Wenn $\det(A) = 0 \rightarrow \nexists A^{-1}$

2×2-Matrizen: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Für alle anderen Matrizen, Gauss-Jordan-Algorithmus: linke Seite Matrix A, rechte Seite $\mathbb{1}$

lösen von mehreren LGS gleichzeitig, zuerst «normal», danach von unten nach oben.

$$\begin{array}{c|c} A & \mathbb{1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} \mathbb{1} & A^{-1} \end{array}$$