

Untersuchen von Funktionen

Monotonie

1) $f'(x) > 0$: f ist streng monoton wachsend

$f'(x) < 0$: f ist streng monoton fallend

Irgend einen Punkt einsetzen! Kurvendiskussion S. 145

Krümmung

1) $f''(x) > 0$: $f(x)$ ist konvex, d.h. linksgekrümmt

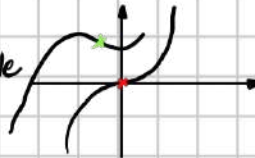
$f''(x) < 0$: $f(x)$ ist konkav, d.h. rechtsgekrümmt

Wendepunkte

$f'(x_0) \neq 0 \wedge f''(x_0) = 0$: x_0 ist eine Wendestelle

$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$: x_0 ist ein Sattelpunkt

Sattelpunkt = Steigung = 0 + Wendepunkt



Ableitungsregeln S. 133

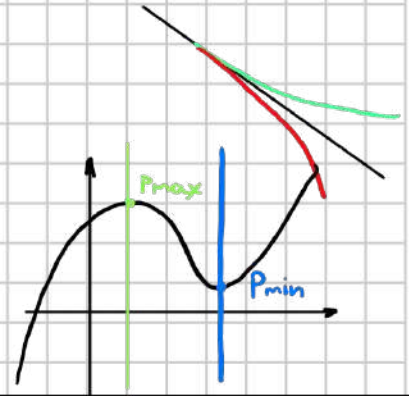
Monotonie S. 140

$$f(x) = -12x^2 + 8x - 1 \rightarrow f'(x) = -12x + 8 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$x > \frac{1}{3}$ streng monoton fallend

$x < \frac{1}{3}$ streng monoton wachsend



Nullstellen $f(x) = 0$ | Extrema $f'(x) = 0$ | Wendepunkte $f''(x) = 0$

Punktkoordinaten $\rightarrow$ Berechneten x -Wert aus $(f(x), f'(x), f''(x))$ in ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen $P(x, f(x))$

Extremalwert

Ein Rechteck hat den Flächeninhalt $A = 36 \text{ cm}^2$. Bestimmen Sie die Seiten des Rechtecks so, dass sein Umfang möglichst klein wird.

1. Extremalwertfunktion suchen $U = 2a + 2b$

2. Skizze erstellen

3. Nebenfunktion aufstellen $36 = a \cdot b$

4. Nebenfunktion umstellen $b = \frac{36}{a}$

5. Umgestellte Nebenfunktion in Hauptfunktion einsetzen



$$U = 2a + 2 \cdot \frac{36}{a} = 2a + \frac{72}{a}$$

6. Erste und Zweite Ableitung erstellen

$$U(a) = 2a + \frac{72}{a} = 2a + 72 \cdot a^{-1}$$

$$U'(a) = 2 + 72 \cdot (-1) \cdot a^{-2} = 2 - \frac{72}{a^2}$$

$$U''(a) = -72 \cdot (-2) \cdot a^{-3} = \frac{144}{a^3}$$

7. Erste Ableitung Gleich 0 setzen

$$0 = 2 - \frac{72}{a^2} \rightarrow a = 6$$

8. Ergebnis in zweiter Ableitung einsetzen (Min/Max bestimmen)

$$U''(6) = \frac{144}{6^3} = \frac{2}{3}$$

Minima

Maxima

9. Ergebnis von Erster Ableitung in Umgestellter Funktion (5) einsetzen!

$$U = 2 \cdot 6 + \frac{72}{6} = 24 \rightarrow 24 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot \frac{6}{1} \quad a = 6, b = 6$$

10. Unbekannte berechnen gem. Aufgabe! 12

Flächenberechnung

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x^5$$

$$\int_a^b = F(b) - F(a)$$

Schnittpunkt suchen

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = x^5$$

$$0 = x^2(x^3 - 1)$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

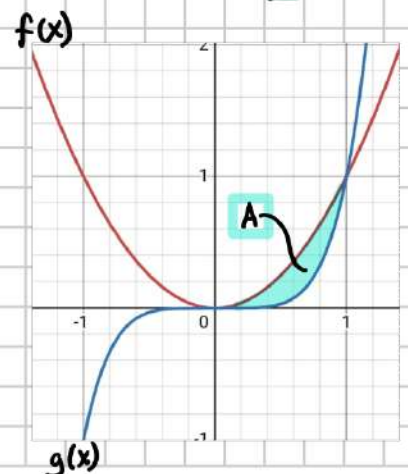
$$x^3 - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Schnittpunkte $\{0, 1\}$

$$A = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^5 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$



Bestimmtes Integral

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^5 dx$$

$F(b) - F(a)$

$$= \int_{-1}^0 u^5 \cdot 2 du = 2 \cdot \int_{-1}^0 u^5 du$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{u^6}{6} \right]_{-1}^0 = 2 \cdot \left(0 - \frac{(-1)^6}{6} \right) = -\frac{1}{3}$$

Substitution S. 153

$$u = \frac{1}{2}x - 2$$

Linearelementaranpassung

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \leftrightarrow dx = 2 \cdot du$$

Integrationsgrenzen einsetzen

$$4 \rightarrow u_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 = 0$$

$$2 \rightarrow u_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1$$

$$\int \frac{x^3}{4x^2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{4x^2} = \frac{1}{12} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \rightarrow dx = \frac{du}{u'(x)}$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$$

Partielle Integration S. 156

Grundintegrale S. 152

Wichtige Integrationen

$$\frac{x^5 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = \frac{x^5}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \cos(2x) \quad f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x-2} = [\ln|x-2|]_0^1$$

$$\int_0^1 \cot(x) = \ln|\sin(x)|$$

$$= \ln|1-2| = \ln|1|$$

$$\ln|0-2| = \ln|2|$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Einfachere Ableitung als $f(x)$ definieren

Trigonometrische Funktionen S. 95

$$\int_0^1 x \cdot 2^x dx$$

$$= \left[x \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} \right]_0^1 - \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 2^x dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1 \quad 2^0 = 1$$

$$g'(x) = 2^x \quad g(x) = \frac{2^x}{\ln(2)}$$

In Betrag!

Multiplikationskonstanten aus Integral herausnehmen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \sin(0) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \cos(0) = 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Formel S. 147

Grundintegrale S. 152

Integration durch Partialbruchzerlegung

Echt gebrochen rationale Funktionen

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} dx = \int \frac{A}{x+4} dx + \int \frac{B}{x-2} dx$$

Nullstellen $x_1 = -4$ einfach
 $x_2 = 2$ einfach

$$\frac{3x-5}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$$

Nullstellen einsetzen

$$3x-5 = A(x-2) + B(x+4)$$

$$x = -4$$

$$\frac{17}{6} = A$$

$$x = 2 \quad 3 \cdot 2 - 5 = A(2-2) + B(2+4) \rightarrow 1 = 6B$$

$$\frac{1}{6} = B$$

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} dx = \frac{17}{6} \cdot \int \frac{1}{x+4} + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-2} dx = \frac{17}{6} \cdot \ln|x+4| + \frac{1}{6} \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{x^2+15x+8}{(x+1)^2(x-5)} dx$$

$x_1 = -1$ doppelt
 $x_2 = 5$ einfach

$$x^2+15x+8 = A(x+1)(x-5) + B(x-5) + C(x+1)^2$$

$$\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-5)}$$

$x_1 = -1, x_2 = 5, x_3 = 0$ Einsetzen

$$x=0 \rightarrow 8 = -5A - 5B + C$$

Werte von A und B einsetzen nach C auflösen!

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{x+1} = \ln|x+1|$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}$$

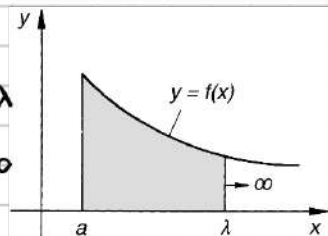
Polynomdivision S. 88

Uneigentliche Integrale

Falls Grenzwert vorhanden $\lambda > a$

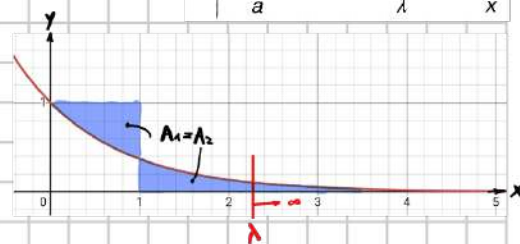
$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x) dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\lambda e^{-x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^\lambda$$



$$= -\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{e^\lambda} + 1 = 1$$

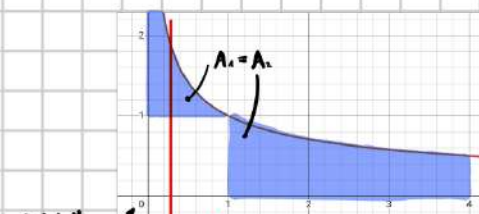
Da Grenzwert vorhanden, uneigentliche Integral konvergent
Grenzwert existiert nicht divergent



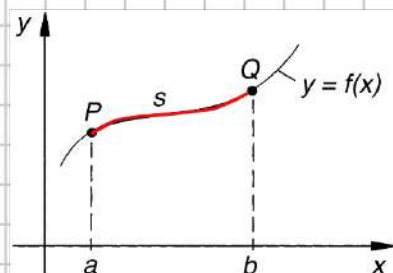
$$1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\epsilon})$$

$$= 4 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\epsilon} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4$$



Polstelle $\epsilon > 0!$
 λ darf nicht kleiner 0 sein



Bogenlänge einer ebenen Kurve

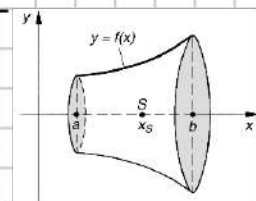
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Volumen und Schwerpunkt eines Rotationskörpers

$$V_k = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

$$x_s = \frac{\pi}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f^2(x) dx$$

$$y_s = z_s = 0$$



Schwerpunkt einer Fläche

$$dM_y = x \cdot g \cdot dm$$

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h$$

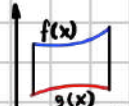
$$x_s = \frac{M_y}{m \cdot g}$$

$$y_s = \frac{M_x}{m \cdot g}$$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

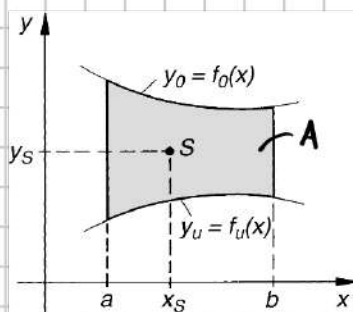


$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$



$$y' = \cos(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = \cos(x) dx$$

Differentialgleichung

1. Ordnung

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(x)$$

Allgemeine Form

$$y(x) = c \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

$$y' + 2 \cdot \sin(x) \cdot y = 0$$

$$\ln|y| = 2 \cdot \cos(x) + c \quad | e^{}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot \sin(x) \cdot y \quad | \cdot dx$$

$$|y| = e^{2 \cdot \cos(x)} \cdot e^c$$

$$\frac{dy}{y} = -2 \cdot \sin(x) dx$$

$$y(x) = C \cdot e^{2 \cdot \cos(x)}, C \in \mathbb{R}$$

Alle y auf einer, alle x auf anderen Seite

$$y' = (y-2)^2 \quad y(2) = 1,8 \quad P(1, 2)$$

Zeige dass $y(x)$ allgemeine Lösung:

$$y(x) = 2 - \frac{1}{x+c}$$

$$1,8 = 2 - \frac{1}{2+c}$$

$$c = 3$$

Allgemeine Lösung

$$y(x) = 2 - \frac{1}{x+3}$$

Spezielle Lösung

$$y(x) = x+c \cdot e^{\frac{1}{x}} = y \rightarrow y'$$

$$x^2 + y + y = x + x^2$$

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

-2x für x einsetzen
Erste x Glieder mit
 x^2 Multiplizieren

Wichtige Ableitungen

$$e^{2 \cdot x} = e^2 + e^x$$

$$y^2 = x$$

$$y = \pm \sqrt{x}$$

$$e^{\frac{1}{x}} dx = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x)$$

$$\ln^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$e^{x^2} dx = 2 \cdot x \cdot e^{x^2}$$

$$\sin(x^2) dx = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$$

$$\ln(\cos(x)) dx = -\tan(x)$$

$$\ln^2(x) dx = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$$

Taylor Reihe S. 184

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_n(x)$$

Taylor Polynom $f_n(x)$ vom Grade n Restglied

Mac Laurinsche Formel Entwicklungszentrum $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

vorzeichen
Wird immer positiv

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n+1}{(-1)^{n+1} \cdot n} = \frac{n+1}{n} = 1$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Konvergenzradius r

Konvergenzbereich

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

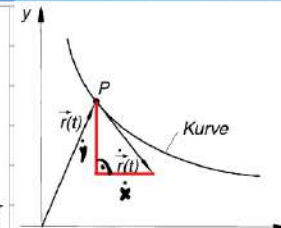
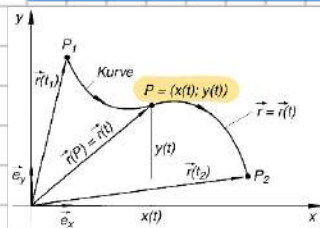
$$|x - x_0| < R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Mit $\frac{1}{n}$ Erweitern Fakultät

$$\frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$0! = 1$
 $1! = 1$



Ebene Kurven S. 368

$$\dot{\vec{R}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor
 $P(x(t), y(t))$

$$\vec{R}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Doppelte
Partialbruchzerlegung

$$\left[\sin(x) \cdot e^x \right]_0^{\pi} - \left(\left[\cos(x) \cdot e^x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin(x) \cdot e^x dx \right)$$

$$2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x) \cdot e^x dx = e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} \sin(x) \cdot e^x dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \cdot e^x dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

Anstieg $m = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Ableitungen S. 132ff

Trigonometrische Funktionen S. 95

Bogenlänge einer Ebenen Kurve in Parameterdarstellung

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{R}}(t)| dt$$

