

Festigkeitslehre

Zug/Druckstab
Spannungs/Verzerrungstensor DMS
Vergleichsspannung

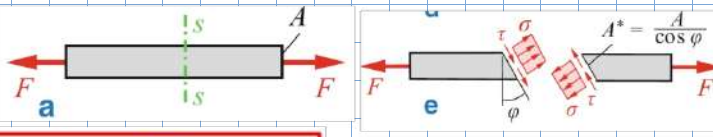
Zug/Druck aus Biegemomenten

$$\sigma_{\max} = \frac{M_B}{I/z_{\max}} = \frac{M_B}{W_B}$$

Schub aus Torsion

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_T/r_{\max}} = \frac{M_T}{W_T}$$

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} \quad \tau = \frac{Q}{A}$$



$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \tau = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \cos^2 \varphi, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

$$\frac{F}{A_{\text{kerbe}}} = \sigma_{\text{Nenn}}$$

$$\sigma_{\max} = k \cdot \sigma_{\text{Nenn}}, \quad k \sim 3$$

Materialkonstante $0 < \nu < 0.5$ $\nu_{\text{Metall}} = 0.3$
Querkontraktionszahl/Poisson Zahl

Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

E-Modul

$$E_{\text{Stahl}} = 210'000 \text{ MPa}$$

$$E_{\text{Alu}} = 70'000 \text{ MPa}$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \tau = G \gamma = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q = GA \gamma = c \gamma$$

Rm Zugfestigkeit

Schubmodul

$$G_{\text{Stahl}} = 80000 \text{ MPa}$$

$$G_{\text{Alu}} = 27000 \text{ MPa}$$

Re σ_F Fließgrenze

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \epsilon = E \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{Fl}{EA} = \epsilon l$$

Durchmesser $\rightarrow$ $-\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \nu$
Länge $\rightarrow$

$$\epsilon_x = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$$\epsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0}$$

Hookesche Normalspannung $\sigma = E \cdot \epsilon$

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$$



$$F = \frac{EA}{l} \Delta l = c \Delta l$$

Steifigkeit

$$\sigma = 420 \text{ N/mm}^2$$

$$\downarrow$$

$$420 \text{ MPa}$$

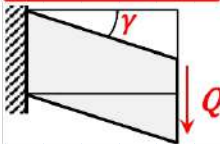
$$\uparrow$$

$$0.6\%$$

$$E = \frac{420 \text{ MPa}}{0.006} = 70000 \text{ MPa}$$

Spannung

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Verlängerung

$$A = (b + \frac{x}{l}b)h \Rightarrow \sigma(x) = \frac{F}{hb(1 + \frac{x}{l})}$$

$$\epsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} \Rightarrow \Delta l = \int_0^l \frac{\sigma(x)}{E} dx = \frac{F}{hbE} \int_0^l \frac{dx}{(1 + \frac{x}{l})}$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{hbE} \left[\ln \left| 1 + \frac{x}{l} \right| \right]_0^l = \frac{Fl}{hbE} \left[\ln 2 - \ln 1 \right]_0^l = \frac{Fl}{hbE} \ln 2$$

Wärmeausdehnung

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Temperatur

$$\alpha_{\text{Stahl}} = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$

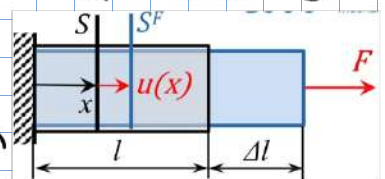
$$\alpha_{\text{Alu}} = 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$

$$\epsilon_T = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

F = Stabkraft

u(x) Verschiebung



k = Knoten
s = stäbe
r = lagerreaktionen

$$\epsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

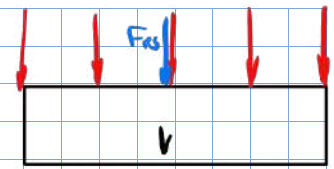
$$u(l) - u(0) = \Delta l = \int_0^l \epsilon dx = \epsilon \cdot x \Big|_0^l = \epsilon \cdot l - \epsilon \cdot 0$$

Statische Bestimmtheit $2k = s + r$

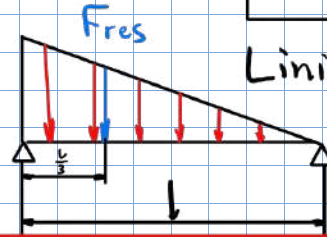
In diesem Fall ist Linienlast immer gleichgross

Jede Aufgabe in TM2

$$F \cdot l = F_{res}$$



Linienverteilte Kraft



$$Q = -\int q dx + C_1$$

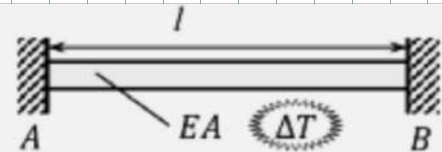
Geg.: $A, l, E, \Delta T, \alpha$

Ges.: Spannung σ

Möglichkeit 1: Integration der Dehnung und K-Bedingung

$$\varepsilon = \frac{F}{EA} + \alpha \Delta T \Rightarrow \Delta l = \int_0^l \left(\frac{F}{EA} + \alpha \Delta T \right) dx$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \alpha \Delta T l = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} = -E \alpha \Delta T$$

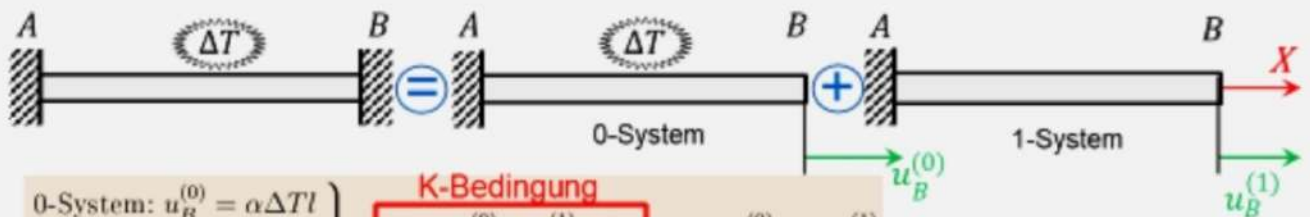


Kompatibilitätsbedingung:

$$\Delta l = 0$$

K-Bedingung

Möglichkeit 2: Superposition der Verschiebungen zweier statisch bestimmter Systeme und K-Bedingung



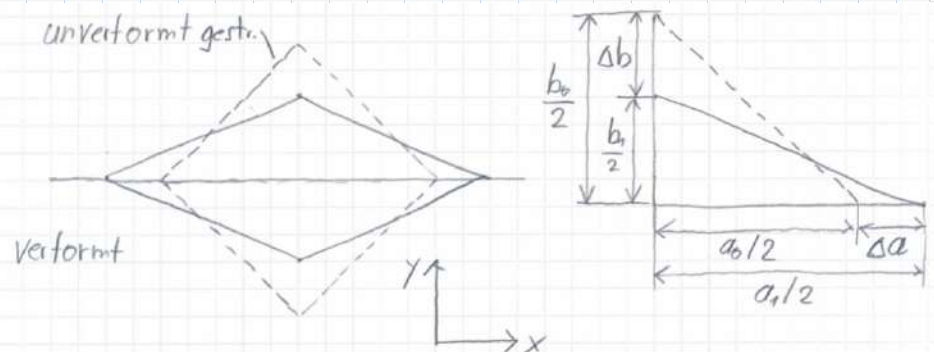
$$\left. \begin{array}{l} \text{0-System: } u_B^{(0)} = \alpha \Delta T l \\ \text{1-System: } u_B^{(1)} = \frac{Xl}{EA} \end{array} \right\}$$

K-Bedingung

$$u_B = u_B^{(0)} + u_B^{(1)} = 0 \Rightarrow u_B^{(0)} = -u_B^{(1)}$$

$$\Rightarrow X = -EA \Delta T \alpha \Rightarrow \sigma = \frac{X}{A} = -E \Delta T \alpha$$

X heisst statisch Unbekannte



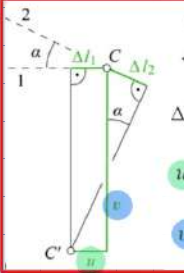
Für das gezeichnete Viertel gilt:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta a}{\frac{a_0}{2}} = \frac{a_1 - a_0}{a_0}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{\frac{b_0}{2}} = \frac{b_1 - b_0}{b_0}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{(b_1 - b_0) a_0}{b_0 (a_1 - a_0)}$$

Zug / Druckstäbe



$$\begin{aligned} \uparrow: S_2 \sin \alpha - F &= 0 \rightarrow S_1 = -\frac{F}{\tan \alpha}, S_2 = \frac{F}{\sin \alpha} \\ \leftarrow: S_1 + S_2 \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EA} = -\frac{F l_1}{EA \tan \alpha}, \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{EA} = \frac{F l_2}{EA \sin \alpha \cos \alpha}$$

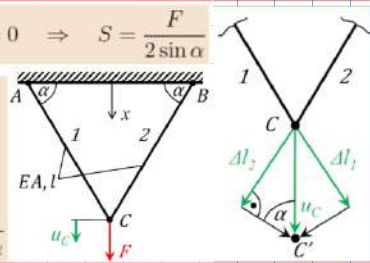
$$u = |\Delta l_1| = \frac{F l_1}{EA \tan \alpha}$$

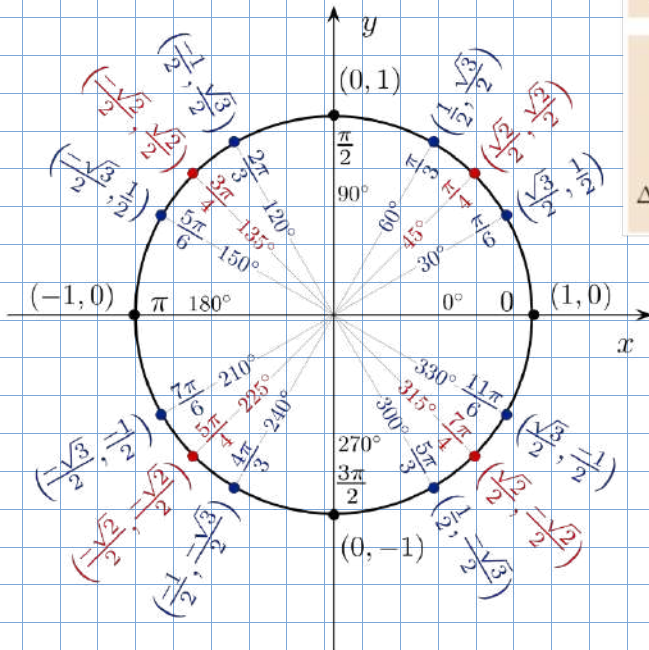
$$v = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} + \frac{u}{\tan \alpha} = \frac{F l_2}{EA \sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

$$\sum F_x = 0: F - 2S \sin \alpha = 0 \Rightarrow S = \frac{F}{2 \sin \alpha}$$

$$\Delta l = \frac{Sl}{EA} = \frac{Fl}{2EA \sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\Delta l_1}{u_C} = \frac{\Delta l_2}{u_C}$$

$$u_C = \frac{\Delta l}{\sin \alpha} = \frac{Fl}{2EA \sin^2 \alpha}$$




2. Kinematische Beziehung

- Dehnung, reine Mathematik:

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

3. Stoffgesetz

- Hookesches Gesetz aus Versuch:
- Mit $\sigma = \frac{N}{A}$ folgt das Elastizitätsgesetz für den Stab:
- EA ist die sog. Dehnsteifigkeit des Stabes.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha \Delta T(x)$$

Daraus die **Differentialgleichung des Stabes**:

$$(EAu')' = -n + (EA\alpha\Delta T)'$$

Für die Verlängerung des Stabes gilt dann ganz allgemein:

$$\Delta l = \int_0^l du = \int_0^l \left(\frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha \Delta T(x) \right) dx$$

Im Sonderfall $EA = \text{const.}, N = \text{const.} = F, \Delta T = \text{const.}$ folgt:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \alpha \Delta T l$$

Daraus folgt mit $\Delta T = 0$ die Federkonstante des Zugstabes:

$$\frac{F}{\Delta l} = \frac{EA}{l}$$

$$\frac{dN}{dx} = -n(x) = -g\rho A \quad x = (l-x)$$

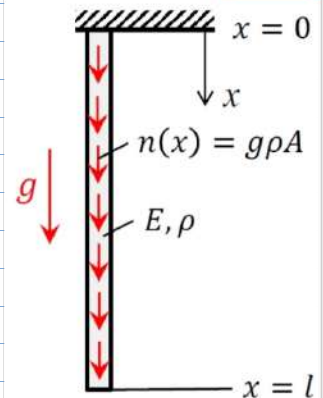
$$N(x) = -\int g\rho A dx = -g\rho Ax + C$$

$$N(l) = 0 \Rightarrow C = g\rho Al$$

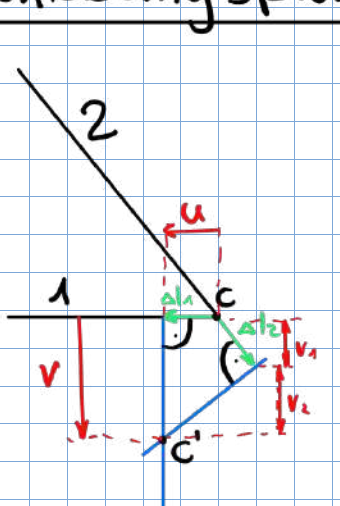
$$N(x) = g\rho A(l-x)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \varepsilon(\bar{x}) d\bar{x} = \int_0^x \frac{N(\bar{x})}{AE} d\bar{x} \\ &= \frac{g\rho}{E} \int_0^x (l - \bar{x}) d\bar{x} = \frac{g\rho}{E} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta l = u(l) = \frac{g\rho l^2}{2E}$$



Verschiebungsplan



$$\Delta l_1 = -\frac{S_1 \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 \cdot l}{E \cdot A}$$

$$u = \Delta l_1$$

$$v = v_1 + v_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} + \frac{u}{\tan \alpha}$$

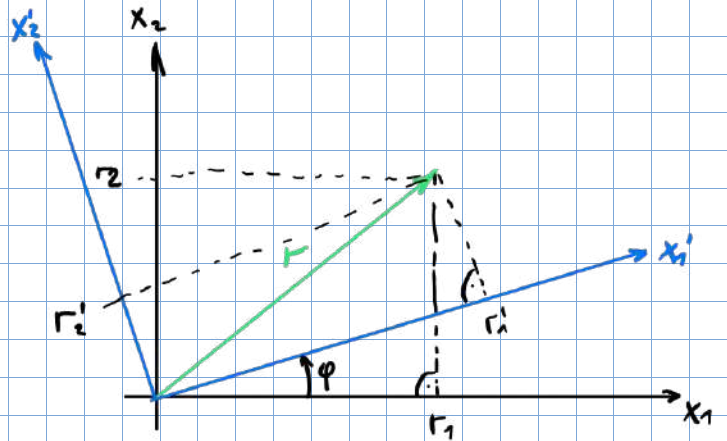
Spannungstensor

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

Drehmatrix

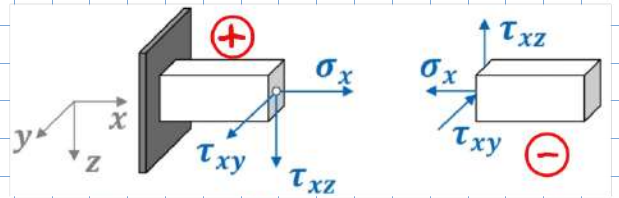
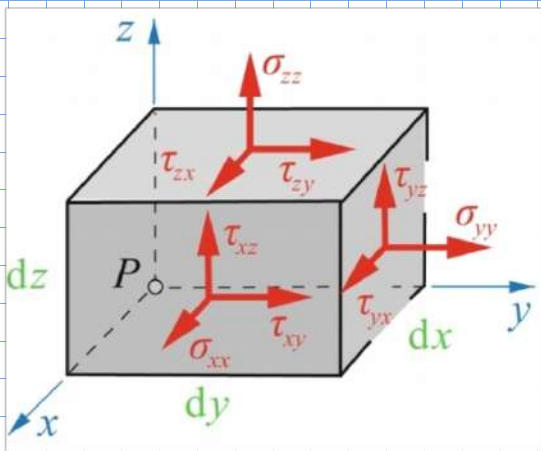
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



$$\vec{r}' = A \cdot \vec{r}$$

Bsp. Rotation $R \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Winkel $\varphi = 45^\circ$

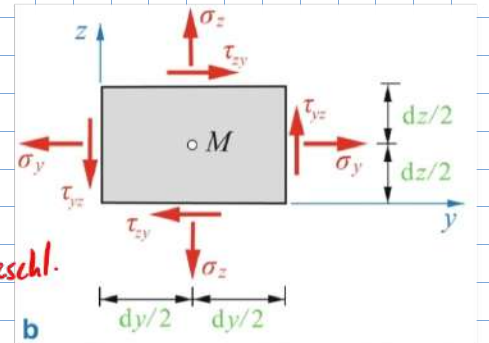
$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} \cos(45) & \sin(45) \\ -\sin(45) & \cos(45) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Schnittufer beachten!

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Spannungstensor symmetrisch wenn keine Drehbeschl.



Formel von Cauchy

$$\underline{\sigma}^T \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} = \underline{t}_n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 \sigma_{ik} n_i = t_{nk}$$

$$\sigma_n = t_n \cdot n$$

$$\hat{M}: 2 \frac{dy}{2} (\tau_{yz} dx dz) - 2 \frac{dz}{2} (\tau_{zy} dx dy) = 0 \rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Rotation um den Winkel φ um die x-Achse	Rotation um den Winkel φ um die y-Achse	Rotation um den Winkel φ um die z-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte im Matlab $A = [a, b, c, \dots]$

$a = \text{Eig}(A)$ Nur Eigenwerte

$[V, D] = \text{eig}(A)$ Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte & Eigenvektoren (S.225)

1. $A - \lambda \cdot E$

2. $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 2 \cdot 0 = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

Eigenwerte = $\lambda_1 = \underline{1}$ $\lambda_2 = \underline{2}$

$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = 0$ Lösen

$$\lambda = 1 \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{x} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda = 2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{x} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{matrix} x_1 = 2 \cdot x_2 \\ x_2 = \lambda \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Eigenvektor}$$

Charakteristisches Polynom $\text{chp}(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E)$

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \boxed{\lambda \text{ ausklammern!}}$$

$$-\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$-\lambda((\lambda+1)(\lambda+1))$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \underline{\lambda_2 = -1}$$

Doppelt

Sicher $\text{chp}(\lambda)$ n verschiedene Nullstellen

sicher nicht $\text{chp}(\lambda) < n$ reelle Nullstellen

Eigenvektor

Eigenwert

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

Vektor ↑ Zahl

$n \times n$ Matrix A

Eigenwerte von A = Nullstellen von $\text{chp}(\lambda)$

A hat höchstens n Eigenwerte

If $\vec{x}$ Eigenvektor von Eigenwert λ :

then: $\mu \cdot \vec{x}$ ($\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist Eigenvektor zu Eigenwert λ

Eigenvektoren zu versch. Eigenwerten sind linear unabh.

x_1 = Führende Unbekannte

x_2 = Freie Unbekannte

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_2 = \lambda, x_4 = \mu$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} x_1, x_3: \text{führende Unbekannte} \\ x_2, x_4: \text{freie Unbekannte} \end{matrix}$$

1. Zeile: $x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 5 \Rightarrow x_1 = 5 + 2\lambda - 3\mu$

2. Zeile: $x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Parameterdarstellung

Spannungstensor 2D Spannungstensor-v3.m

Drehmatrix Tensor Drehmatrix

$$\underline{\sigma}'_{xy} = \underline{a} \cdot \underline{\sigma}_{xy} \cdot \underline{a}^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma'_{yy} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau'_{xy} &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned}$$

Hauptspannungen maximal wenn $\tau = 0$!
Ziel Winkel φ finden, mit welchen $\tau = 0$, dann Hauptspannungen $\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}$ mit φ berechnen.

Taschenrechner in DEG!

$$\varphi^* = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Drehwinkel vom xy- in das Hauptspannungssystem

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

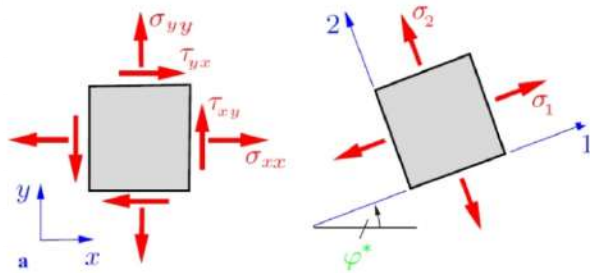
Hauptspannungen (wenn $\tau = 0$)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Hauptspannungssystem um $\pm 5^\circ$ gedreht
Hauptschubspannungen

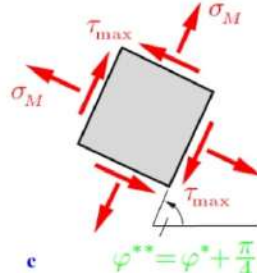
$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Normalspannungen in Hauptschubspannungsebenen



xy-System

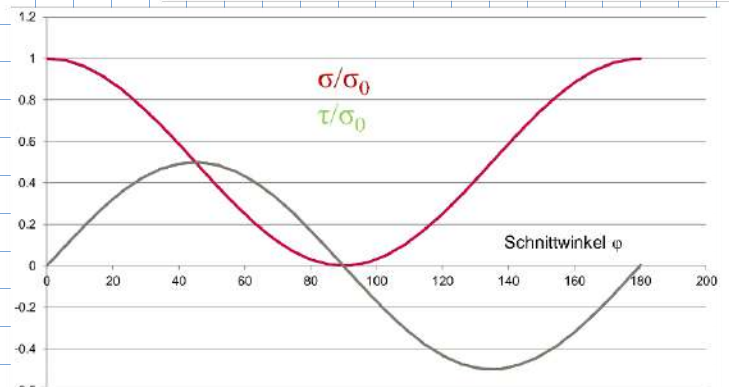
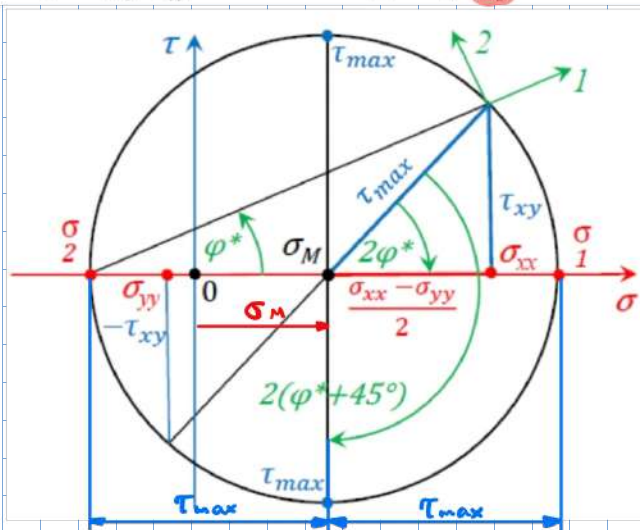
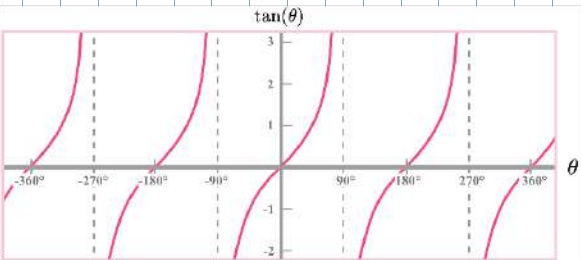
Hauptachsensystem



Hauptschubspannungssystem

Normalspannung:

$\sigma_n = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ Normalektor (bzw. $\sin(\varphi)$)
Spannungstensor $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$



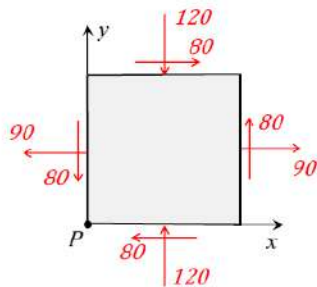
Festigkeitslehre 1

Der Spannungstensor in 2D

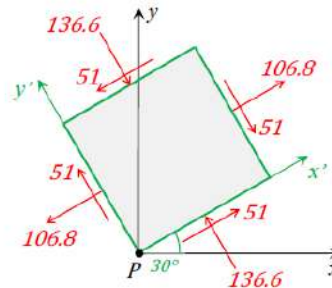
BSP.

Beispiel 2.1.4. Wir berechnen für den Spannungstensor $\underline{\sigma}_{xy} = \begin{pmatrix} 90 & 80 \\ 80 & -120 \end{pmatrix}$ in Abb. 2.12(a) seine Darstellung $\underline{\sigma}_{x'y'}$ in einem um 30° gedrehten System, seine Hauptspannungen, die Drehwinkel in das Hauptachsensystem und in die Hauptschubebene, die maximale Schubspannung sowie die Normalspannung, die in der Hauptschubebene wirkt. Durch Einsetzen des Drehwinkels in (2.56) oder (2.58) erhält man den Spannungstensor im $x'y'$ -System, Abb. 2.12(b):

$$\underline{\sigma}_{x'y'} = \begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 & 80 \\ 80 & -120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106.8 & -51 \\ -51 & -136.6 \end{pmatrix}$$



(a) Im ursprünglichen xy -System



(b) Im um 30° gedrehten $x'y'$ -System

Abb. 2.12: Zweiachsiger Spannungszustand in verschiedenen Systemen

Um die Hauptspannungen zu berechnen, setzen wir die Spannungen in (2.60) ein. Dabei spielt es nach Bemerkung 1.2.2 keine Rolle, ob die Werte des gedrehten oder ursprünglichen Tensors verwendet werden.

$$\begin{aligned} \sigma_{1/2} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'})^2}{4} + \tau_{x'y'}^2} \\ &= \frac{90 - 120}{2} \pm \sqrt{\frac{(90 + 120)^2}{4} + 80^2} = \frac{106.8 + 36.8}{2} \pm \sqrt{\frac{(186.6 + 13.4)^2}{4} + (-51)^2} \\ &= -15 \pm 132 \Rightarrow \sigma_1 = 117.0, \quad \sigma_2 = -147.0 \end{aligned}$$

Der Drehwinkel ins Hauptachsensystem ergibt sich mit (2.61) wegen

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2 \cdot 80}{90 + 120} = 0.76$$

zu $\varphi^* = 18.6^\circ$, Abb. 2.13(a). Einsetzen in die erste Gleichung von (2.58) liefert die zugehörige Hauptspannung als

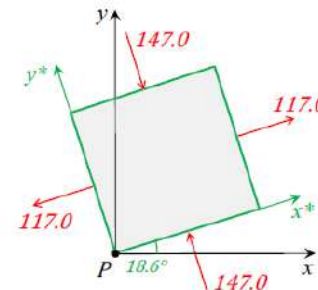
$$\sigma_{x'x'} = \frac{1}{2}(90 - 120) + \frac{1}{2}(90 + 120) \cos(2 \cdot 18.6^\circ) + 80 \sin(2 \cdot 18.6^\circ) = 117.0 = \sigma_1$$

Die maximale Schubspannung ergibt sich mit (2.64) zu

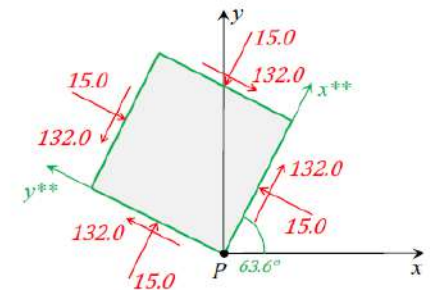
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}|117.0 + 147.0| = 132.0,$$

sie wirkt in einer um $\varphi^* + 45^\circ = 18.6^\circ + 45^\circ = 63.6^\circ$ gegenüber der x -Achse gedrehten Ebene, Abb. 2.13(b). Ihre Richtung ergibt sich mit $\varphi^* = 18.6^\circ$ aus (2.65) zu

$$\tau_{\max} \text{ oder } -\tau_{\max} = \tau_{x'y'} = -\frac{1}{2}(90 + 120) \sin(2 \cdot 63.6^\circ) + 80 \cos(2 \cdot 63.6^\circ) = -132.0.$$



(a) Hauptachsensystem



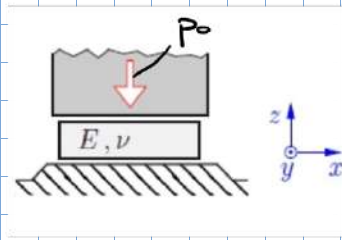
(b) Hauptschubspannungssystem

Abb. 2.13: Spannungstensor in verschiedenen Systemen

Die Normalspannung, die in der Ebene der maximalen Schubspannung wirkt, erhält man mit (2.66) zu

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(117.0 - 147.0) = -15.0.$$

Man beachte jeweils in den Bildern, dass sich die Vorzeichen der Spannungen in den Richtungen der Spannungspfeile widerspiegeln.

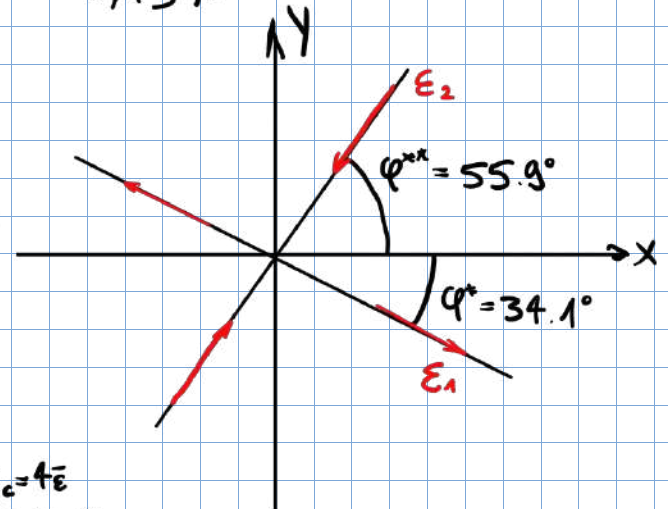


$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1,5 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} = 0,0015 = 1,5\text{‰} = 10^{-3} = 0,15\%$$

Druck p_0 auf Fläche

ist $= \sigma_z$ und

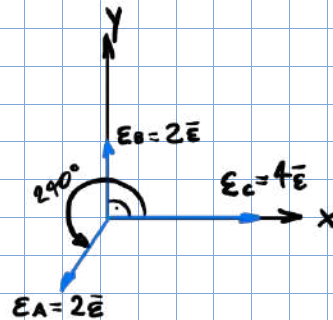
steht für eine Spannung



$$\epsilon_a = 2\bar{\epsilon} \quad \varphi_1 = 240^\circ$$

$$\epsilon_b = 2\bar{\epsilon} \quad \varphi_2 = 90^\circ$$

$$\epsilon_c = 4\bar{\epsilon} \quad \varphi_3 = 0^\circ$$



$$\begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_1) & \sin^2(\varphi_1) & \sin(2\varphi_1/2) \\ \cos^2(\varphi_2) & \sin^2(\varphi_2) & \sin(2\varphi_2/2) \\ \cos^2(\varphi_3) & \sin^2(\varphi_3) & \sin(2\varphi_3/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_a \\ \epsilon_b \\ \epsilon_c \end{bmatrix}$$

Werte in LGS einsetzen und mit Matlab lösen

$$\rightarrow \epsilon_{xx} = 4\bar{\epsilon}$$

$$\epsilon_{yy} = 2\bar{\epsilon}$$

$$\epsilon_{xy} = -1,15\bar{\epsilon}$$

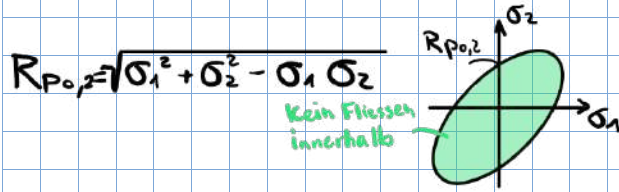
Wenn an Lastfreien Oberfläche gemessen wird $\sigma_3 = 0 \rightarrow \epsilon_3 = -\nu(\epsilon_1 + \epsilon_2)$

(GEH) von Mises Vergleichsspannungen

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

Fließhypothese

Für Duktile Werkstoffe (St, Al, V2A, ...)



$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma_0}} + \underline{\underline{\sigma'}}$$

Für einen dreiachsigen Spannungszustand gilt:

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Für einen zweiachsigen Spannungszustand gilt mit $\sigma_3 = 0$:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_V = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2}$$

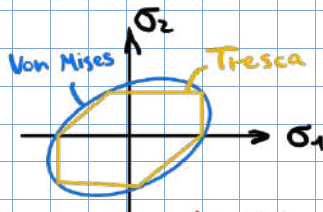
Für einen einachsigen Spannungszustand gilt mit $\sigma_2 = 0$ und $\sigma_3 = 0$:

$$\sigma_V = \sigma_1 = \sigma_{xx}$$

Schubspannungshypothese nach Tresca (SH)

$$\sigma_V = \sigma_1 - \sigma_3$$

Fließhypothese



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

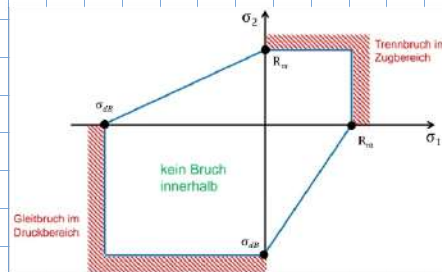
(Gilt nur wenn σ_1, σ_2 unterschiedliche Vorzeichen haben
sonst $\sigma_V = |\sigma_{1,2}|$ $\sigma_{1,2}$ = betragsmäßig größere Zahl)

Normalspannungshypothese (NH)

$$\sigma_V = \sigma_1$$

Bruchhypothese

Spröde Werkstoffe (Gusseisen)



Sicherheitsfaktor

$$S = \frac{\sigma_{\text{zulässig}}}{\sigma_{\text{tatsächlich}}}$$