

PE Summary (beliebig lang)

27. Februar, 2024; rev. 18. Juni 2025

Linda Riesen (rieselin)

1 Vorlesung 02

1.1 Begriffe

- Die **Kinematik** beschreibt die Bewegung eines Körpers.
- Die **Dynamik** untersucht die Ursache für die Änderung der Bewegung.
- Der **Ortsvektor** zeigt vom Bezugssystem zur Mitte des Körpers.
- Ein **Bezugssystem** definiert den Nullpunkt im Raum und gibt außerdem die x-, y-, und z-Richtungen an.
 - Unity verwendet ein Linkssystem.
- Mit **Schnelligkeit** bezeichnet man den Betrag des Geschwindigkeitsvektors $|\vec{v}|$.
- **Translationsbewegung**: Bewegung im Raum ohne Rotation.
- **Starrer Körper** Ein Körper, der sich nicht verformt. Ein starrer Körper ist ein idealisiertes physikalisches Objekt, bei dem angenommen wird, dass der Abstand zwischen allen Punkten unabhängig von den auf den Körper wirkenden Kräften konstant bleibt
- **Massenmittelpunkt** = Schwerpunkt (wenn $\vec{v}$ konstant ist).
- Unity rechnet mit fixen Zeitschritten $\Delta t = 20$ ms.
 - Dies entspricht einer Abtastfrequenz von:

$$f_{\text{sampling}} = \frac{1}{\Delta t} = 50 \text{ Hz.}$$

1.2 Orientierung / Drehung

Eine Möglichkeit für die Angabe der Orientierung sind Euler-Winkel. Euler-Winkel sind ein Satz aus drei Winkeln ϕ (pitch, Drehung um x-Achse), θ (yaw, y-Achse) und ψ (roll z-Achse), welche die Drehwinkel entlang der drei Raumachsen angeben.

Quaternionen in Unity benutzen

```
• Quaternion rotX1deg = Quaternion.Euler(1f, 0, 0) erzeugt eine Quaternion  
  rotX1deg, die eine Drehung von 1° um die x-Achse verursacht (statische Methode).  
• Ein Aufruf von rotX1deg.eulerAngles() gibt die in rotX1deg definierte Drehung von 1°  
  um die x-Achse wiederum in Form von Euler-Winkel als Vector3 zurück.  
• Die aktuelle Orientierung eines Rigidbody rb kann, wie auf der vorausgehenden Folie  
  erwähnt, durch Multiplikation mit rotX1deg verändert werden:  
  rb.transform.rotation = rotX1deg * rb.transform.rotation;  
  Dadurch wird rb um 1° um die x-Achse rotiert.  
• Es ist auch möglich, einen Vektor durch Multiplikation mit einer Quaternion zu drehen. Im  
  folgenden Beispiel wird der Einheitsvektor in z-Richtung um 1° um die x-Achse gedreht:  
  Vector3 rotatedVector = rotX1deg * new Vector3(0, 0, 1);
```

Abbildung 1: Quaternionen in Unity benutzen

2 Vorlesung 03

3 Winkel und Winkelgeschwindigkeit

Ein Umlauf benötigt die Zeit T . [T = Periodendauer] Die Frequenz definiert man als Kehrwert der Periodendauer

3.1 Die Newtonsche Gesetze

1. Trägheitsgesetz (Ohne äussere Kräfte bleibt der Impuls erhalten)
2. Aktionsprinzip ($F = m * a$)
3. Wechselwirkungsgesetz (Aktion = Reaktion)

3.2 6 Freiheitsgrade

- 3 Bewegungsmöglichkeiten in x, y, z
- 3 Rotationen um die 3 Körperachsen

3.3 Freikörperbild (FKB)

- Im FKB wird jeder Körper isoliert von allen anderen Körpern aufgezeichnet
- Man zeichnet alle Kraftvektoren ein, die auf den Körper wirken
- Diese Kraftvektoren überträgt man nach Unity
- Um die resultierende Kraft zu finden, addiert man alle Kräfte vektoriell. Das bedeutet, man berücksichtigt sowohl die Größe als auch die Richtung jeder Kraft

a few new formulas, all already known and in formelsammlung

4 Vorlesung 04

Prinzip der Unabhängigkeit: Bewegungen entlang einer Achse erfolgen unabhängig von denen entlang anderer Achsen.

4.1 Physik kennt nur 4 Kräfte

1. Gravitationskraft
2. Elektrostatische Kraft (Coulomb Kraft)
3. Federkraft (auch stöße zw. 2 Körpern)
4. Haft (statisch)- und Gleitreibung (dynamisch) (trockene Reibung / Coulomb Reibung)

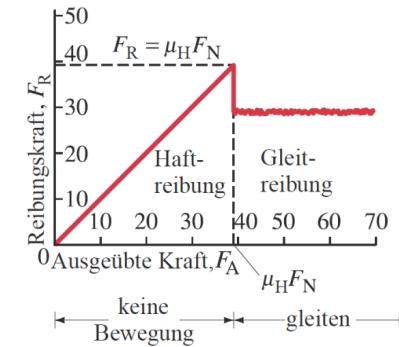


Abbildung 2: Haft- und Gleitreibungskraft

5. Viskose Reibung (Flüssigkeits- / Fluidreibung) (Objekte bewegen sich durch Flüssigkeit oder Gas)

- Laminare Reibung (proportional zu v)
- Turbulente Reibung (proportional zu v^2)

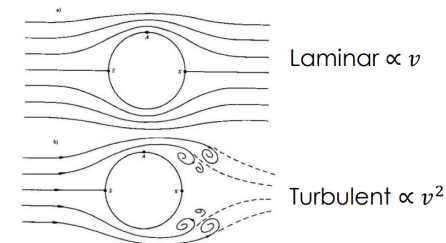


Abbildung 3: Viskose Reibung

Platte	langer Zylinder	Kugel	Halbkugel (vorn)	Halbkugel (hinten)
				
$c_w \approx 1,1-1,3$	quer angeströmt: $c_w \approx 1,2$ längs angeströmt: $c_w \approx 1,0$	$c_w \approx 0,45$	mit Boden: $c_w \approx 0,4$ ohne Boden: $c_w \approx 0,34$	mit Boden: $c_w \approx 1,2$ ohne Boden: $c_w \approx 1,3$

Abbildung 4: Luftwiderstand und c_w -Wert

4.2 Normalkraft

Berühren sich zwei Körper, so wirkt in jedem Fall zwischen beiden eine Normalkraft F_N . Ihre Wirklinie geht durch den Berührungspunkt und steht immer rechtwinklig auf der Berührungsfläche.

4.3 Rollreibung (Lager)

Äussere Kraft (Strasse auf Rad) = Rollreibungskraft

Zusätzliche Einflüsse

- Reibung Achse-Rad
- Plastizität der Fahrbahn
- Federungswiderstand
- Schwallwiderstand
- Vorspurwiderstand
- Kurvenwiderstand

5 Vorlesung 05

5.1 Kräfte bei der Kurvenfahrt

- Zentrifugalkraft existiert nicht => Trägheit wirkt

- Das Fahrzeug folgt der Kurve, weshalb der Sitz (Reibung) oder die Autotür (direkter Kontakt) eine Kraft auf die Person ausübt.
- Für die Kreisbewegung des Autos ist eine nach innen gerichtete Kraft erforderlich, die durch die Haftreibung zwischen Reifen und Straße bereitgestellt wird.
- Beim Rutschen oder Schleudern wird Haftreibung durch Gleitreibung ersetzt, die geringer ist als die Haftreibung.
- Ist die Reibungskraft zu gering (z. B. auf Eis), folgt das Fahrzeug einer nahezu geradlinigen Bahn.

5.2 Inertialsysteme und beschleunigte Bezugssysteme

Ein Bezugssystem, in dem die Newtonschen Gesetze gelten, wird als **Inertialsystem** bezeichnet. Ein beschleunigtes Bezugssystem (z. B. ein sich bewegender Lastwagen) ist hingegen kein Inertialsystem. In einem solchen System gelten die Newtonschen Gesetze nicht ohne Weiteres, da zusätzliche Scheinkräfte berücksichtigt werden müssen.

5.2.1 Eigenschaften von Inertialsystemen

- Newtons Gesetze gelten in Inertialsystemen uneingeschränkt.
- In beschleunigten Bezugssystemen müssen **Scheinkräfte** einbezogen werden, um Bewegungen korrekt zu beschreiben.
- Ein Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu einem Inertialsystem bewegt, ist ebenfalls ein Inertialsystem.
- Bezugssysteme auf der Erde können oft als Inertialsysteme betrachtet werden, obwohl die Erdrotation eine geringe Abweichung verursacht.

5.3 Träge und schwere Masse

Ein Körper besitzt die Eigenschaft, einer Bewegungsänderung entgegenzuwirken. Die bestimmende GröÙe hierfür ist die **träge Masse** $m_{\text{träg}}$. Gleichzeitig

wird ein Körper durch andere Körper aufgrund der Gravitation angezogen, wobei die bestimmende Größe die **schwere Masse** m_{schwer} ist.

Bemerkenswert ist, dass diese beiden Massen gleich groß sind, obwohl ihnen unterschiedliche physikalische Mechanismen zugrunde liegen.

5.4 Das schwache Äquivalenzprinzip

Das schwache Äquivalenzprinzip besagt, dass alle Körper unabhängig von ihrer Masse oder Zusammensetzung in einem Gravitationsfeld gleich schnell fallen, sofern keine anderen Kräfte wirken. Ein Beispiel dafür ist der freie Fall eines Objekts, wie er in Experimenten (z. B. dem Dart-Versuch) beobachtet werden kann.

5.5 Scheinkraft im beschleunigten Bezugssystem: Trägheitskraft

Damit die Newtonschen Gesetze auch in einem beschleunigten (Nicht-Inertialsystem) gelten, müssen die sogenannten Scheinkräfte eingeführt werden:

Im Fall des geradlinig beschleunigten Bezugssystems führt man eine Trägheitskraft ein:

$$\vec{F}_t = -m \cdot \vec{a}_{\text{system}} \quad (1)$$

Stellt man aus Sicht eines linear beschleunigten Bezugssystems die Newtonschen Bewegungsgleichungen auf, so muss man zwingend die Trägheitskraft hinzufügen.

Scheinkraft: Sie tritt nur in beschleunigten Bezugssystemen auf.

5.6 Scheinkraft im rotierenden Bezugssystem: Zentrifugalkraft

In rotierenden Bezugssystemen müssen die **Zentrifugalkraft** und die **Corioliskraft** eingeführt werden, damit die Newtonschen Gesetze weiterhin gültig sind.

Bei der Kreisbewegung wirkt aus dem Inertialsystem betrachtet eine Kraft zur Kreismitte (Zentripetalkraft). Im beschleunigten Bezugssystem muss eine entgegengesetzte Kraft wirken, um dieselbe Wirkung zu erzielen. Diese Kraft

nennt man **Zentrifugalkraft**:

$$\vec{F}_{ZF} = m\omega^2 r \cdot \vec{r} = m \frac{v_u^2}{r} \cdot \vec{r} \quad (2)$$

6 Vorlesung 06: Impuls $\vec{p}(t)$

Der Impuls ist eine abstrakte, mengenartige Grösse.

Mengenartig = Extensiv Mengenartig bedeutet, dass man «zählen» kann, wieviel Impuls in einen Körper hinein- oder herausfließt, um zu wissen, wieviel Impuls im Körper gespeichert wird

$$\vec{p} = m * \vec{v}$$

$$\text{Abbildung 5: } [p] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} * \frac{\text{s}}{\text{s}} = \text{Ns}$$

- Impuls hat 3 Richtungen und 3 Drehimpuls-Richtungen => 3+3 Freiheitsgrade
- Kraft $F = \text{Impulsänderungsrate} \frac{dp}{dt} = \text{Impulsstrom } I_p$
- Erde als unendliches ursprungs Reservoir des Impulses
- Eine Kraft in Bezugsrichtung steigert die Geschwindigkeit des Körpers und somit auch dessen Impulsinhalt, daher muss ein Impulsstrom zufließen und umgekehrt
- Impulserhaltung: Impuls kann weder erzeugt noch vernichtet werden => Gesamtimpuls im geschlossenen System ist konstant: $p_{\text{ges}}(t) = p_1(t) + p_2(t)$

6.1 Impuls als Flüssigkeitsbild

Wir stellen uns den Körper, dessen Bewegung wir untersuchen, als zylindrisches Gefäß vor, welches in ein unendlich grosses Reservoir getaucht wird:

- Die Grundfläche des Zylinders entspricht der Masse des Körpers.
- Der Zylinder ist mit Impuls gefüllt, den wir uns wie eine Flüssigkeit vorstellen können.

- Der Füllstand entspricht der Geschwindigkeit des Körpers.
- Aus diesem Flüssigkeitsbild lässt sich der Impuls p aus Grundfläche m mal Höhe v berechnen

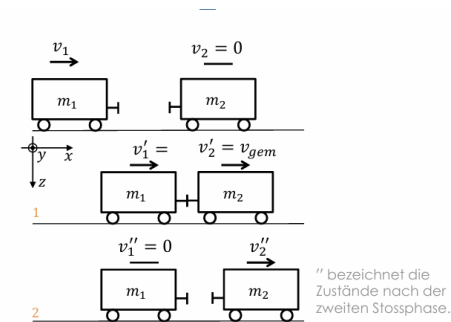


Abbildung 7: Elastischer Stoss

6.2 Inelastischer Stoss

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $m_1 = m_2$ und $v_2 = 0$.

Impuls der einzelnen Körper:

$$p_1 = m_1 v_1$$

$$p_2 = m_2 v_2$$

Impuls beider Körper (= gesamtes System)

$$p_{ges} = p_1 + p_2$$

Gemeinsame Geschwindigkeit = gesamter Impuls geteilt durch gesamte Masse:

$$v_{gem} = \frac{p_{ges}}{m_{ges}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta p_1' = m_1(v_1 - v_{gem}) = \Delta p_2'$$

$$\Delta p_2' = m_2(v_{gem} - v_2) \quad \text{Vorzeichen aus FB}$$

Abbildung 6: Inelastischer Stoss

6.3 Elastischer Stoss

Beim elastischen Stoss fließt in der zweiten Stossphase gleich viel Impuls wie in der ersten Stossphase geflossen ist.

$$\Delta p_1'' = m_1(v_{gem} - v_1'') = m_1 \Delta v_1'' \neq \Delta p_1' = m_1(v_1 - v_{gem}) = m_1 \Delta v_1' \Rightarrow \Delta v_1' = v_1''$$

6.4 Unity Kraft

Force: Eine direkte Kraft $\vec{F}$, die nach dem 2. Newtonschen Gesetz auf das Objekt wirkt. Acceleration: Statt eine Kraft direkt zu definieren, gibt man die Beschleunigung $\vec{a}$ an, und Unity berechnet die resultierende Kraft mit $\vec{F} = m * \vec{a}$. Impulse: Ein Kraftstoss $\Delta \vec{p}$, der die Geschwindigkeit des Körpers in einem kurzen Moment ändert. Velocity Change: Eine direkte Änderung der Geschwindigkeit, die sich aus der Impulsänderung $\Delta \vec{v} = \frac{\Delta \vec{p}}{m}$

7 Vorlesung 07

7.1 Energie / Arbeit

Alternativen zur Berechnung über die Newtonschen Axiome basieren auf der Energie und der Arbeit. Arbeit ist die Übertragung von Energie durch eine Kraft

- Man «weiss» nicht genau, was Energie ist, macht aber nichts, man «weiss» ja auch nicht genau, was Masse ist.
- Energie ist eine extensive Grösse (mengenartig, bilanzierfähig).

- Energie ist eine Erhaltungsgrösse (Energie kann nicht erzeugt oder vernichtet werden).
- Energie kann transportiert werden; sie kann in einen Körper hinein oder herausfließen.
- Energie kann von einer Form in eine andere Form umgewandelt werden.

Arbeit

- Arbeit ist Kraft mal Weg.
- Die Kraft und der zurückgelegte Weg des Körpers müssen dabei parallel sein. => falls nicht parallel muss zerlegt werden
- 1 J entspricht der Arbeit, die verrichtet wird, wenn eine Kraft von 1 N einen Körper entlang einer Strecke von 1 m in Richtung der Kraft bewegt, also:
 $1J = 1N * 1m = 1Nm = 1Ws$

Leistung Leistung ist definiert als Energie pro Zeit.

$$[P] = \frac{[E]}{[t]} = \frac{J}{s} = W \text{ (Watt)}$$

Leistung ist etwas Momentanes, z. B. verrichtet eine Kraft in jedem Moment eine gewisse Leistung am Körper. Sie gibt an wie schnell Energie übertragen wird, daher kann man die Leistung auch als Energieübertragungsrate = Energiestrom betrachten

$$P = \frac{dE}{dt} = \dot{E} = I_E$$

Energie Arbeit ist etwas über die Zeit Integriertes, also die Energie, die in einem Zeitintervall mit dem Körper ausgetauscht worden.

$$E_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

Allgemein: Die Leistung einer Kraft ist Kraft mal Geschwindigkeit:

$$P_F(t) = \vec{F}(t) * \vec{v}(t)$$

Berechnung der Arbeit einer Kraft

- Ortsabhängigkeit $F(s)$ der Kraft bekannt:

$$E_F = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) * d\vec{s}$$

- Zeitabhängigkeit $F(t)$ der Kraft bekannt:

$$E_F = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) * \vec{v}(t) dt$$

8 Vorlesung 08

- kinetischer Energie (kinetische Energie der Translation),
- potenzieller Energie, oder
- Rotationsenergie (kinetische Energie der Rotation)

In dieser Modellvorstellung haben wir eine Kraft als Impulsstrom I_p (Impulsänderungsrate $\dot{p}$) interpretiert. Analog kann man die Leistung einer Kraft P_F als Energiestrom I_E (Energieänderungsrate $\dot{E}$) interpretieren, Dieser (zum Impulsstrom) zugehörige Energiestrom berechnet sich aus (Wortmodell): $I_E = I_p * v$

8.1 Wirkungsgrad

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} : \eta = \frac{P_{\text{Nutzen}}}{P_{\text{Aufwand}}} = \frac{E_{\text{Nutzen}}}{E_{\text{Aufwand}}}$$

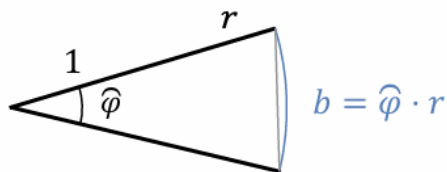
9 Vorlesung 09

Allgemeine Bewegung = Superposition einer Translation und Rotation

Aus	wird
Weg	Winkel
Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	Winkelbeschleunigung
Kraft	Drehmoment
Impuls	Drehimpuls
Masse	Trägheitsmoment
Kinetische Energie	Rotationsenergie
2. Newtonsche Gesetz	2. Newtonsche Gesetz inkl. Rotation

Abbildung 8: Analogien zwischen Translation & Rotation

$$\hat{\varphi} = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}} = \frac{b}{r}$$

Abbildung 9: Winkel im Bogenmass [$\frac{m}{m} = 1 = 1 \text{ rad}$]

9.1 Winkelgeschwindigkeit

Nicht ihre Geschwindigkeit ist konstant, sondern ihre Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} [\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}]$ Im Zeitschritt dt hat der Körper den Winkel $d\varphi$ und die Bogenlänge db zurückgelegt.

$$v_U = |\vec{v}_U| = \frac{db}{dt} = \dot{b} = \frac{\Delta\varphi * r}{\Delta t} = \omega * r$$

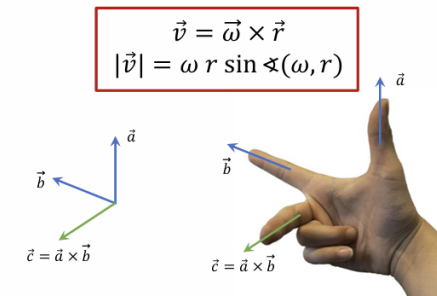


Abbildung 10: Winkelgeschwindigkeit als Vektor (= Bahngeschwindigkeit)

9.2 Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

9.3 Drehmoment

Drehmoment = Kraft mal Abstand, wobei die Kraft normal auf den Abstand stehen muss.

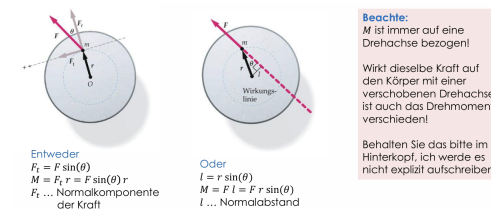


Abbildung 11: Drehmoment

Unter einem Kräftepaar versteht man zwei Kräfte, deren Vektorsumme 0 ist, d.h. die Beträge sind gleich gross, die Richtungen sind aber entgegengesetzt. Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) eines Körpers: Der Punkt, an dem die gesamte Masse des Körpers konzentriert gedacht werden kann, um das gleiche Drehmoment um jeden Drehpunkt zu erzeugen, wie es der gesamte, real verteilte Körper tut.

9.4 Massenmittelpunkt

Der Massenmittelpunkt berechnet sich in einer Dimension aus

$$x_{MMP} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

und in drei Dimensionen aus

$$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Abbildung 12: Massenmittelpunkt

Der MMP hat die spezielle Eigenschaft, dass er sich so bewegt als

- wäre die gesamte Masse des starren Körpers in ihm konzentriert und als
- würden die externen Kräfte direkt an ihm angreifen.

9.4.1 Drehpunkt

Ein Körper rotiert immer um seinen MMP, es sei denn, es wirkt eine Kraft, z.B. von einer Achse, die einen anderen Drehpunkt erzwingt

9.5 Drehimpuls einer Punktmasse

Drehimpuls einer Punktmasse im Punkt Q mit Impuls $\vec{p}$ bezüglich Punkt P :

$$\vec{L}_{PQ} = \vec{r}_{PQ} \times \vec{p}$$

⌈ Richtung senkrecht zu Ebene von P und Q

Abbildung 13: Drehimpuls einer Punktmasse

Somit wird das Trägheitsmoment eines starren Körpers

$$J = \sum m_i r_i^2$$

Abbildung 15: Trägheitsmoment starrer Körper

9.6 Massenträgheit

Massenträgheitsmoment der Masse m im Punkt Q bezüglich Punkt P :

$$J_{PQ} = m \cdot r_{PQ}^2$$

$$\vec{L}_{PQ} = J_{PQ} \cdot \vec{\omega}$$


Abbildung 14: Massenträgheit

10 Vorlesung 10

10.1 2. Newtonsches Gesetz für Translation und Rotation

Gleichgewichtsbedingungen : alle externen Kräfte sowie die externen Drehmomente um eine beliebige Achse müssen null sein damit sich ein Körper im statischen Gleichgewicht befindet und sich seine Bewegung nicht ändert

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_{MMP}$$

$$\sum \vec{M}_{ext} = J \cdot \vec{\alpha}$$

Abbildung 16: 2. Newtonsches Axiom Translation u Rotation

10.2 Stabilität des Gleichgewichts



Abbildung 17: Stabilität des Gleichgewichts

10.3 Rolling Without Slipping: The Abrollbedingung

For rolling without slipping, the contact point with the ground must be at rest relative to the ground. That means:

$$v_{\text{bottom}} = 0 \Rightarrow v_A = v_U = \omega R$$

This is the **Abrollbedingung** – the wheel rolls perfectly if the axis moves at the same speed as the rim would want to move from rotation alone.

10.3.1 Geometrical/Time-Based View

When the wheel rotates by an angle φ , it moves forward a distance:

$$s = R \cdot \varphi$$

At the same time, if the axis moves with speed v_A , then:

$$s = v_A \cdot t$$

From both expressions, we get:

$$R \cdot \varphi = v_A \cdot t \Rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_A}{R}$$

Differentiating again with respect to time:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_A}{R}$$

where α is the angular acceleration and a_A is the linear acceleration of the center.

10.3.2 What if $v_A \neq \omega R$?

- If $v_A > \omega R$: The wheel *slides forward*, the bottom point moves forward.
- If $v_A < \omega R$: The wheel *slips backward*, the bottom point moves backward.
- Only if $v_A = \omega R$: There is **no slipping**, and the wheel exhibits **pure rolling motion**.

10.4 Drehfeder

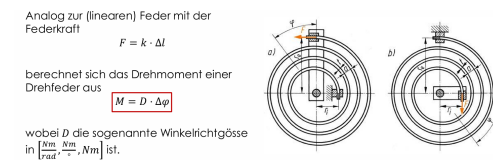


Abbildung 18: Drehfeder

11 Vorlesung 12

Eigendrehimpuls Durch diese Rotation speichert der Körper einen gewissen Drehimpuls. Rotation des Körpers um MMP

Bahndrehimpuls Erzeugt die Rotation der Erdachse um die Sonne ebenfalls einen Drehimpuls: Rotation des MMP um eine feste Drehachse

Gesamter Drehimpuls um O :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{L}_{Eigen} + \vec{L}_{Bahn} \\ &= J_{MMP} \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{MMP} \times m \cdot \vec{v}_{MMP}\end{aligned}$$

J_{MMP} ... Trägheitsmoment um die Achse durch den MMP

$\vec{\omega}$... Winkelgeschwindigkeit um die Achse durch den MMP

$\vec{r}_{MMP}$... Abstand zwischen Drehpunkt O und dem MMP

$\vec{v}_{MMP}$... Bahngeschwindigkeit des Körpers um den Drehpunkt O

m ... Masse des Körpers

Abbildung 19: Gesamter Drehimpuls

Gesamter Drehimpuls

Rotationsenergie Wir möchten die Rotationsenergie (kinetische Energie der Rotation) eines starren Körpers berechnen, der um eine Drehachse rotiert.

- Konstantes Trägheitsmoment: Ändert ein starrer Körper ($J = konst.$) die Winkelgeschwindigkeit von ω_1 auf ω_2 , benötigt er die zusätzliche Rotationsenergie von $\Delta E_{rot} = E_{rot,2} - E_{rot,1} = \frac{J}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2)$
- Variables Trägheitsmoment: Körper ist flexibel und ändert sein Trägheitsmoment bei konstantem Drehimpulsinhalt ($J = konst.$), benötigt er: $E_{rot,1} = L \frac{\omega_1}{2}, E_{rot,2} = L \frac{\omega_2}{2} \Delta W_{rot} = E_{rot,2} - E_{rot,1} = \frac{L}{2}(\omega_2 - \omega_1)$

11.1 Arbeit und Leistung eines Drehmoments

Arbeit eines Drehmoments

Damit lässt sich die Arbeit eines Drehmomentes berechnen, welches den Körper vom Winkel θ_1 auf θ_2 rotiert

$$E_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dE_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M(\theta) d\theta$$

vgl. $E_F = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$

Ist das Drehmoment konstant und rotiert der Körper insgesamt um den Winkel $\Delta\theta$, verrichtet das Drehmoment die Arbeit

$$E_M = M \Delta\theta$$

vgl. $E_F = F \Delta s$ (Kraft mal Weg)

Leistung eines Drehmoments

Aus dem Wortmodell Leistung ist Energie pro Zeit ergibt sich für die Leistung eines Drehmoments

$$P_M = \frac{dE_M}{dt} = M \frac{d\theta}{dt}$$

also

$$P_M = M \omega$$

vgl. $P_F = F v$ (Kraft mal Geschwindigkeit)

Die Arbeit eines Drehmoments lässt sich auch aus dessen Leistung berechnen:

$$E_M = \int P_M(t) dt = \int M(t) \omega(t) dt$$

Abbildung 20: Arbeit und Leistung eines Drehmoments

11.2 Energie zum Verdrehen einer Drehfeder

Bei einer Drehfeder ist das Drehmoment gleich Winkelrichtgröße mal Auslenkung: $M = D * \Delta\varphi$ Die benötigte Energie zum Verdrehen der Feder berechnet sich aus Energie = Drehmoment mal Winkel: $E_M = \bar{M} \Delta\varphi_{max} = \frac{1}{2} D \Delta\varphi_{max}^2$

12 Vorlesung 13

12.1 Präzession

Die Bewegung des Kreisels unter Einfluss eines senkrecht zur Drehimpulsrichtung wirkenden Drehmoments nennt man Präzession = Schwenkung = $\Omega = \omega_{Schwenk}$

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

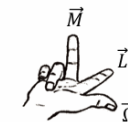


Abbildung 21: Präzession

12.2 Unwucht

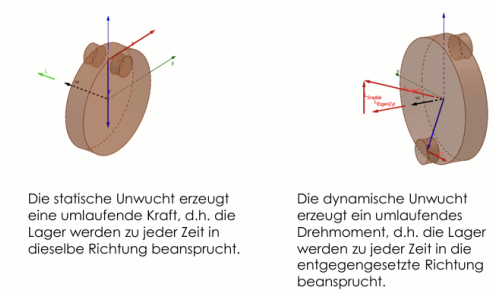


Abbildung 22: Statische und Dynamische Unwucht