

Substitution

- **Substitution wählen:** Wähle eine geeignete Substitution u , die den Integranden vereinfacht.
- **Ableitung bilden:** Leite u nach x ab, um $\frac{du}{dx}$ zu erhalten.
- **Umstellen nach du :** Stelle die Ableitung so um, dass du isoliert wird. Dabei sollten sich alle x -Terme kürzen.
- **Grenzen anpassen:** Substituiere die Integrationsgrenzen in die neue Variable u .
- **Integral lösen:** Löse das Integral in Bezug auf u und setze gegebenenfalls zurück.

Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Das $u(x)$ wird abgeleitet, es sollte etwas wegfallen.

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen der Nennerpolynome mit Multiplizitäten bestimmen (Hornerschema, Polynomdivision)
2. Jeder dieser Nullstellen wird ein Partialbruch zugeordnet. (Das A ist eine **Konstante** welche später ausgerechnet wird.)

- **Einfache Nullstelle:**

$$\frac{A_1}{x - x_1}$$

- **Doppelte Nullstelle:**

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$$

- **r-fache Nullstelle:**

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

3. Setze $f(x)$ gleich mit der **Summe** all dieser Partialbrüche
4. Alle Partialbrüche auf gemeinsamen Nenner bringen.
5. Der Nenner fällt weg, da er in beiden Seiten steht.
6. Bestimmen der Koeffizienten $A_1, A_2, \dots, A_r$ durch Einsetzen geeigneter Werte für x .
7. Integration der Partialbrüche durch Formeln (unten)

Integration von Partialbrüchen

$$\int \frac{1}{x - x_1} \, dx = \ln(|x - x_1|) + C$$
$$\int \frac{1}{(x - x_1)^r} \, dx = \frac{1}{(1 - r)(x - x_1)^{r-1}} + C$$

Mittelwertsatz

Es gibt eine Funktion $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Unter dem Mittelwert μ von f versteht man die Höhe jener Rechtecks, des als Grundseite die Strecke von a nach b hat und dessen Flächeninhalt gleich der Fläche unter der Kurve von f ist.

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Bogenlänge

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Rotationskörper

$$V = \pi * \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Man kann die **Umkehrfunktion** bilden wenn x und y verdreht werden sollten.

Mantelfläche

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers, der durch die Rotation einer Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse entsteht, kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Schwerpunkt von Körpern

$$r_s = \frac{1}{V} \int_{\langle V \rangle} r \, dV$$

Schwerpunkt von Flächen

$$A = \int_a^b (f_o(x) - f_u(x)) \, dx$$

Achtung Potenzgesetze!

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x(y_o - y_u) \, dx = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x[f_o(x) - f_u(x)] \, dx$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (y_o^2 - y_u^2) \, dx = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b [(f_o(x))^2 - (f_u(x))^2] \, dx$$

Massenträgheitsmoment eines Zylinders

Massenträgheitsmoment einer Punktmasse m im Abstand r zu einer Bezugsachse.

$$2\pi gh \int_0^R x^3 \, dx$$

Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers

$$J_x = \frac{1}{2} \pi \rho \cdot \int_a^b y^4 \, dx$$

- $y = f(x)$: Rotierende Kurve
- ρ : Konstante Dichte des homogenen Rotationskörpers

Arbeitsintegral

Oft hängt die Kraft F von einer Position x ab.

$$F(x)$$

dann lautet das Integral:

$$W = \int_a^b F(x) \, dx$$

Unendliches Integrationsintervall

Die Integration erfolgt über ein **unendliches** Intervall. Man setzt (falls der Grenzwert vorhanden ist; $\lambda > a$):

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x) \, dx$$

Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)

Der Integrand $f(x)$ besitzt an der oberen Integrationsgrenze $x = b$ einen **Pol**. Man setzt (falls der Grenzwert vorhanden ist; $\lambda > 0$):

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^{b-\lambda} f(x) \, dx$$

Geometrische Reihe

Bei der geometrischen Reihe existiert der Grenzwert bei $|q| < 1$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1 \cdot (-1)}{q - 1}$$

Achtung: Bei unendlichen Summen darf nicht wie bei einer 'normalen' Summe gerechnet werden.

Konvergenzkriterien

Ein **notwendiges** Kriterium ist der Limes der Folge

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

das ist aber **nicht** hinreichend, daher ist noch nichts bewiesen. Wir betrachten das **Quotientenkriterium** als hinreichendes Kriterium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

Achtung: Es gibt Reihen die konvergieren, obwohl das Kriterium nicht erfüllt ist.

Potenzreihen
Unter einer *Potenzreihe* versteht man eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Potenzreihen sind Reihen, deren Glieder **Potenzen** einer unabhängigen Variablen (x) sind. a_k ist im Grunde eine Konstante und nicht abhängig von x .

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Konvergenzradius

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Hier muss das entsprechende a also der konstante Teil der Reihe, eingesetzt werden.

Achtung: die Potenzreihe muss exakt die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ haben, evtl. muss substituiert werden.

- Nur für 0 dann $r = 0$
- Für alle x dann $r = \infty$

Allgemeine Form

Gleiche Formel, aber anstelle von $|x| < r$, konvergiert die Reihe für $|x - x_0| < r$

Spezialfälle

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergiert für alle x

Innerhalb des Konvergenzardius dürfen wir die Potenzreihe wie endliche Summen behandeln. Wir können addieren, subtrahieren, ableiten, integrieren, etc.

O Notation

Wir schreiben mit der O Notation, sagen somit das **alle Terme mindestens** $\geq n + 1$ sind.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + O(x^{n+1})$$

Bei Integration, Ableitung, wird das O auch abgeleitet, integriert.
Mac Laurin

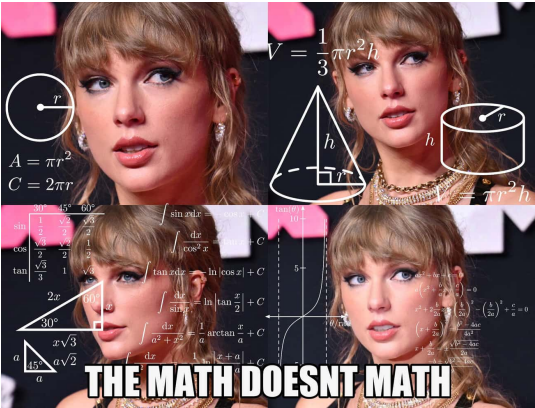
$$f(x) = f(0) + \underbrace{\frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{\text{Mac Laurinsches Polynom } f_n(x) \text{ vom Grade } n} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

Somit:

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x)$$

Taylor Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$



- Oftmals kann in eine bestehende Taylorreihe substituiert werden (spart Rechenaufwand)
- Es darf nur im **Konvergenzbereich** der Potenzreihe Integrationen, Ableitungen, etc. durchgeführt werden.

Restglied nach Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n + 1)!} x^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Bedingungen für Entwicklung

Eine Funktion $f(x)$ ist unter den folgenden Bedingungen in eine MacLaurin- bzw. Taylor-Reihe entwickelbar:

1. $f(x)$ ist beim Entwicklungspunkt (0 bzw. x_0) beliebig oft differenzierbar
2. Es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

L'Hôpital

Für Grenzwerte, die auf einen *unbestimmten Ausdruck* der Form $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ führen, gilt die *Bernoulli-de L'Hospitalsche Regel*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Funktion $\varphi(x)$	$\lim_{x \rightarrow \lambda_0} \varphi(x)$	Elementare Umformung
(A) $u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$ $\infty \cdot 0$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ oder $\frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
(B) $u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x) \cdot v(x)}}$
(C) $u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$

Achtung beim bzw. immer beide austesten.

ODE 1. Ord.

ODEs mit nur **einer** Variablen. Die Ordnung ist bestimmt durch die **höchste vorkommende Ableitung**.

Separierbare ODE 1. Ord.

Eine ODE 1. Ord. $y'(x) = F(y, x)$ heisst separierbar, wenn sie sich in folgender Form schreiben lässt:

$$M(x) + N(y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

Wichtig ist, dass M nur von x abhängt und N nur von y . Die Lösung in **impliziter Darstellung** ist gegeben durch:

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C$$

Ich kann prüfen, ob eine ODE separierbar ist, indem ich die x und y auf eine Seite bringe und schaue obs passt. Anschliessend beide Seiten integrieren.

Wenn ich eine Anfangsbedingung habe, kann ich diese in die implizite Lösung einsetzen und so C bestimmen.

Eine ODE 1. Ord. heisst linear, wenn sie sich in folgender Form darstellen lässt:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = g(x)$$

wobei p und g nur von x abhängen.

Lineare ODE 1. Ord.

Eine ODE 1. Ord. heisst *linear*, wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

darstellbar ist.

Die Funktion $g(x)$ wird als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet. Fehlt das Störglied, d. h. ist $g(x) \equiv 0$, so heisst die lineare Differentialgleichung *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

Lösung der linearen ODE 1. Ord.

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int (\mu(x) \cdot g(x) dx + C) \right)$$

mit

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

2 Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)

Funktion $f(x)$		Ableitung $f'(x)$
Potenzfunktion	x^n	nx^{n-1}
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
Arkusfunktionen	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x$
	$\cosh x$	$\sinh x$
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
Areafunktionen	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale

C, C_1, C_2 : Reelle Integrationskonstanten

$\int 0 \, dx = C$	$\int 1 \, dx = \int dx = x + C$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln \left x + \sqrt{x^2+1} \right + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{arcosh} x + C = \ln \left x + \sqrt{x^2-1} \right + C \quad (x > 1)$	
$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C_1 & x < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + C_2 & x > 1 \end{cases} \quad \text{für}$	

Hinweis: Im **Anhang, Teil A** befindet sich eine ausführliche *Integraltafel* mit über 400 weiteren Integralen (gedruckt auf gelbem Papier).

3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle)

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
Allgemeine Binomische Reihe ¹⁾		
$(1 \pm x)^n$	$1 \pm \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 \pm \dots$	$n > 0 : x \leq 1$ $n < 0 : x < 1$
$(a \pm x)^n$	$a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot x^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot x^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot x^3 + \dots$	$n > 0 : x \leq a $ $n < 0 : x < a $
Spezielle Binomische Reihen		
$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}}$	$1 \pm \frac{1}{4} x^1 - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} x^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 \pm \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{\frac{1}{3}}$	$1 \pm \frac{1}{3} x^1 - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 \pm \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{\frac{1}{4}}$	$1 \pm \frac{1}{2} x^1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{\frac{3}{2}}$	$1 \pm \frac{3}{2} x^1 + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{4}}$	$1 \mp \frac{1}{4} x^1 + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8} x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{3}}$	$1 \mp \frac{1}{3} x^1 + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}}$	$1 \mp \frac{1}{2} x^1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x^1 + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{3}{2}}$	$1 \mp \frac{3}{2} x^1 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x^1 + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-3}$	$1 \mp \frac{1}{2} (2 \cdot 3x^1 \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \dots)$	$ x < 1$
Reihen der Exponentialfunktionen		
e^x	$1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x < \infty$
e^{-x}	$1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$ x < \infty$
a^x	$1 + \frac{(\ln a)^1}{1!} x^1 + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} x^3 + \frac{(\ln a)^4}{4!} x^4 + \dots$	$ x < \infty$

¹⁾ Für den Spezialfall $n \in \mathbb{N}^*$ erhält man ein Polynom n -ten Grades. Die Entwicklungskoeffizienten $\binom{n}{k}$ sind die Binomialkoeffizienten (siehe I.2.7).

Tabelle (Fortsetzung)

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
Reihen der logarithmischen Funktionen		
$\ln x$	$(x-1)^1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$	$0 < x \leq 2$
$\ln x$	$2 \left[\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^7 + \dots \right]$	$x > 0$
$\ln(1+x)$	$x^1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x)$	$-\left[x^1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right]$	$-1 \leq x < 1$
$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$	$2 \left[x^1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right]$	$ x < 1$
Reihen der trigonometrischen Funktionen		
$\sin x$	$x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$ x < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x < \infty$
$\tan x$	$x^1 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{3} x^1 - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \dots$	$0 < x < \pi$
Reihen der Arkusfunktionen		
$\arcsin x$	$x^1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots$	$ x < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left[x^1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \right]$	$ x < 1$
$\arctan x$	$x^1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$ x \leq 1$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{\pi}{2} - \left[x^1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right]$	$ x \leq 1$
Reihen der Hyperbelfunktionen		
$\sinh x$	$x^1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$ x < \infty$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x < \infty$

Derivatives

Basic Properties/Formulas/Rules

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x), \text{ c is any constant.}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \text{ n is any number.}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - \text{Product Rule}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} - \text{Quotient Rule}$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x) - \text{Chain Rule}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \text{ c is any constant.}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = g'(x)e^{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(g(x))] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Common Derivatives

Polynomials

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$$

Trig Functions

$$\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\tan(x)] = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\csc(x)] = -\csc(x)\cot(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\sec(x)] = \sec(x)\tan(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\cot(x)] = -\csc^2(x)$$

Inverse Trig Functions

$$\frac{d}{dx}[\sin^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\cos^{-1}(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(x)] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\csc^{-1}(x)] = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec^{-1}(x)] = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\cot^{-1}(x)] = -\frac{1}{1+x^2}$$

Exponential & Logarithm Functions

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln(a)$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}[\log_a(x)] = \frac{1}{x \ln(a)}, \quad x > 0$$

Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}[\sinh(x)] = \cosh(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh(x)] = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh(x)] = \text{sech}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\text{csch}(x)] = -\text{csch}(x)\coth(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sech}(x)] = -\text{sech}(x)\tanh(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\coth(x)] = -\text{csch}^2(x)$$

Integrals

Basic Properties/Formulas/Rules

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \text{ c is a constant.} \quad \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ where } F(x) = \int f(x) dx$$

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \text{ c is a constant.} \quad \int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^b c dx = c(b-a), \text{ c is a constant.}$$

$$\text{If } f(x) \geq 0 \text{ on } a \leq x \leq b \text{ then } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\text{If } f(x) \geq g(x) \text{ on } a \leq x \leq b \text{ then } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Common Integrals

Polynomials

$$\int dx = x + c$$

$$\int k dx = kx + c$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$$

$$\int x^{-n} dx = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + c, \quad n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

$$\int x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}x^{\frac{p}{q}+1} + c = \frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}} + c$$

Trig Functions

$$\int \cos(u) du = \sin(u) + c$$

$$\int \sin(u) du = -\cos(u) + c$$

$$\int \sec^2 u du = \tan(u) + c$$

$$\int \sec(u) \tan(u) du = \sec(u) + c$$

$$\int \csc(u) \cot(u) du = -\csc(u) + c$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot(u) + c$$

$$\int \tan(u) du = -\ln|\cos(u)| + c = \ln|\sec(u)| + c$$

$$\int \cot(u) du = \ln|\sin(u)| + c = -\ln|\csc(u)| + c$$

$$\int \sec(u) du = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + c \quad \int \sec^3(u) du = \frac{1}{2} \left(\sec(u) \tan(u) + \ln|\sec(u) + \tan(u)| \right) + c$$

$$\int \csc(u) du = \ln|\csc(u) - \cot(u)| + c \quad \int \csc^3(u) du = \frac{1}{2} \left(-\csc(u) \cot(u) + \ln|\csc(u) - \cot(u)| \right) + c$$

Exponential & Logarithm Functions

$$\int e^u du = e^u + c \quad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + c \quad \int \ln(u) du = u \ln(u) - u + c$$

$$\int e^{au} \sin(bu) du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} \left(a \sin(bu) - b \cos(bu) \right) + c \quad \int u e^u du = (u - 1)e^u + c$$

$$\int e^{au} \cos(bu) du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} \left(a \cos(bu) + b \sin(bu) \right) + c \quad \int \frac{1}{u \ln(u)} du = \ln |\ln(u)| + c$$

Inverse Trig Functions

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c \quad \int \sin^{-1}(u) du = u \sin^{-1}(u) + \sqrt{1 - u^2} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c \quad \int \tan^{-1}(u) du = u \tan^{-1}(u) - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + c$$

$$\int \frac{1}{u \sqrt{u^2 - a^2}} du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c \quad \int \cos^{-1}(u) du = u \cos^{-1}(u) - \sqrt{1 - u^2} + c$$

Hyperbolic Functions

$$\int \sinh(u) du = \cosh(u) + c \quad \int \operatorname{sech}(u) \tanh(u) du = -\operatorname{sech}(u) + c \quad \int \operatorname{sech}^2(u) du = \tanh(u) + c$$

$$\int \cosh(u) du = \sinh(u) + c \quad \int \operatorname{csch}(u) \coth(u) du = -\operatorname{csch}(u) + c \quad \int \operatorname{csch}^2(u) du = -\coth(u) + c$$

$$\int \tanh(u) du = \ln(\cosh(u)) + c \quad \int \operatorname{sech}(u) du = \tan^{-1} |\sinh(u)| + c$$

Miscellaneous

$$\int \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + c \quad \int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + c$$

$$\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c \quad \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c$$

$$\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + c$$

Standard Integration Techniques

u Substitution: $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$ will convert the integral into $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$ using the substitution $u = g(x)$ where $du = g'(x)dx$. For indefinite integrals drop the limits of integration.

Integration by Parts: $\int u dv = uv - \int v du$ and $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. Choose u and dv from integral and compute du by differentiating u and compute v using $v = \int dv$.

Trig Substitutions: If the integral contains the following root use the given substitution and formula.

$$\sqrt{a^2 - b^2 x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \sin(\theta) \quad \text{and} \quad \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$$

$$\sqrt{b^2 x^2 - a^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \sec(\theta) \quad \text{and} \quad \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b} \tan(\theta) \quad \text{and} \quad \sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$$

Partial Fractions: If integrating a rational expression involving polynomials, $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, where the degree (largest exponent) of $P(x)$ is smaller than the degree of $Q(x)$ then factor the denominator as completely as possible and find the partial fraction decomposition of the rational expression. Integrate the partial fraction decomposition (P.F.D.). For each factor in the denominator we get term(s) in the decomposition according to the following table.

Factor of $Q(x)$	Term in P.F.D	Factor is $Q(x)$	Term in P.F.D
$ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$	$(ax + b)^k$	$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$
$ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$	$(ax^2 + bx + c)^k$	$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$

Products and (some) Quotients of Trig Functions

For $\int \sin^n(x) \cos^m(x) dx$ we have the following :

1. **n odd.** Strip 1 sine out and convert rest to cosines using $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, then use the substitution $u = \cos(x)$.
2. **m odd.** Strip 1 cosine out and convert rest to sines using $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, then use the substitution $u = \sin(x)$.
3. **n and m both odd.** Use either 1. or 2.
4. **n and m both even.** Use double angle and/or half angle formulas to reduce the integral into a form that can be integrated.

For $\int \tan^n(x) \sec^m(x) dx$ we have the following :

1. **n odd.** Strip 1 tangent and 1 secant out and convert the rest to secants using $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$, then use the substitution $u = \sec(x)$.
2. **m even.** Strip 2 secants out and convert rest to tangents using $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, then use the substitution $u = \tan(x)$.
3. **n odd and m even.** Use either 1. or 2.
4. **n even and m odd.** Each integral will be dealt with differently.

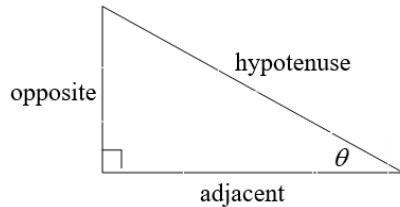
Convert Example : $\cos^6(x) = (\cos^2(x))^3 = (1 - \sin^2(x))^3$

Definition of the Trig Functions

Right triangle definition

For this definition we assume that

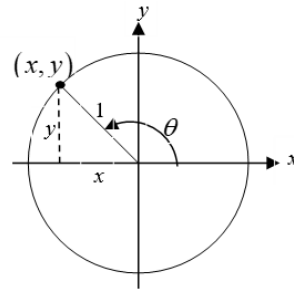
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ or } 0^\circ < \theta < 90^\circ.$$



$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} & \csc(\theta) &= \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite}} \\ \cos(\theta) &= \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} & \sec(\theta) &= \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent}} \\ \tan(\theta) &= \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} & \cot(\theta) &= \frac{\text{adjacent}}{\text{opposite}} \end{aligned}$$

Unit Circle Definition

For this definition θ is any angle.



$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{y}{1} = y & \csc(\theta) &= \frac{1}{y} \\ \cos(\theta) &= \frac{x}{1} = x & \sec(\theta) &= \frac{1}{x} \\ \tan(\theta) &= \frac{y}{x} & \cot(\theta) &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Facts and Properties

Domain

The domain is all the values of θ that can be plugged into the function.

$\sin(\theta)$, θ can be any angle

$\cos(\theta)$, θ can be any angle

$\tan(\theta)$, $\theta \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\csc(\theta)$, $\theta \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\sec(\theta)$, $\theta \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\cot(\theta)$, $\theta \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Range

The range is all possible values to get out of the function.

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(\theta) \leq 1 & -1 &\leq \cos(\theta) \leq 1 \\ -\infty &< \tan(\theta) < \infty & -\infty &< \cot(\theta) < \infty \\ \sec(\theta) &\geq 1 \text{ and } \sec(\theta) \leq -1 & \csc(\theta) &\geq 1 \text{ and } \csc(\theta) \leq -1 \end{aligned}$$

Period

The period of a function is the number, T , such that $f(\theta + T) = f(\theta)$. So, if ω is a fixed number and θ is any angle we have the following periods.

$$\begin{aligned} \sin(\omega\theta) &\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \cos(\omega\theta) &\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \tan(\omega\theta) &\rightarrow T = \frac{\pi}{\omega} \\ \csc(\omega\theta) &\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \sec(\omega\theta) &\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \cot(\omega\theta) &\rightarrow T = \frac{\pi}{\omega} \end{aligned}$$

Formulas and Identities

Tangent and Cotangent Identities

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Reciprocal Identities

$$\begin{aligned} \csc(\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta)} & \sin(\theta) &= \frac{1}{\csc(\theta)} \\ \sec(\theta) &= \frac{1}{\cos(\theta)} & \cos(\theta) &= \frac{1}{\sec(\theta)} \\ \cot(\theta) &= \frac{1}{\tan(\theta)} & \tan(\theta) &= \frac{1}{\cot(\theta)} \end{aligned}$$

Pythagorean Identities

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) &= 1 \\ \tan^2(\theta) + 1 &= \sec^2(\theta) \\ 1 + \cot^2(\theta) &= \csc^2(\theta) \end{aligned}$$

Even/Odd Formulas

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) & \csc(-\theta) &= -\csc(\theta) \\ \cos(-\theta) &= \cos(\theta) & \sec(-\theta) &= \sec(\theta) \\ \tan(-\theta) &= -\tan(\theta) & \cot(-\theta) &= -\cot(\theta) \end{aligned}$$

Periodic Formulas

If n is an integer then,

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 2\pi n) &= \sin(\theta) & \csc(\theta + 2\pi n) &= \csc(\theta) \\ \cos(\theta + 2\pi n) &= \cos(\theta) & \sec(\theta + 2\pi n) &= \sec(\theta) \\ \tan(\theta + \pi n) &= \tan(\theta) & \cot(\theta + \pi n) &= \cot(\theta) \end{aligned}$$

Degrees to Radians Formulas

If x is an angle in degrees and t is an angle in radians then

$$\frac{\pi}{180} = \frac{t}{x} \Rightarrow t = \frac{\pi x}{180} \quad \text{and} \quad x = \frac{180t}{\pi}$$

Double Angle Formulas

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ &= 2 \cos^2(\theta) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(\theta) \\ \tan(2\theta) &= \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \end{aligned}$$

Half Angle Formulas

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}} \end{aligned}$$

Half Angle Formulas (alternate form)

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) & \tan^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)} \\ \cos^2(\theta) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \end{aligned}$$

Sum and Difference Formulas

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

Product to Sum Formulas

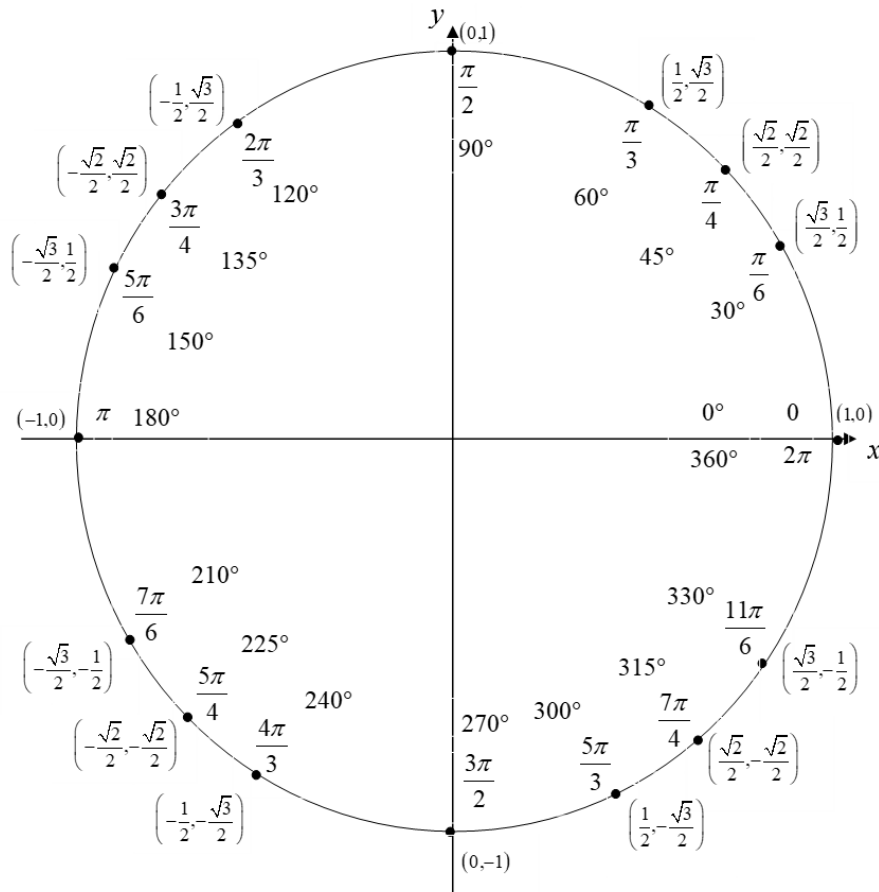
$$\begin{aligned} \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

Sum to Product Formulas

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Cofunction Formulas

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos(\theta) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin(\theta) \\ \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sec(\theta) & \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \csc(\theta) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot(\theta) & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan(\theta) \end{aligned}$$



For any ordered pair on the unit circle (x, y) : $\cos(\theta) = x$ and $\sin(\theta) = y$

Example

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Inverse Trig Functions

Definition

$y = \sin^{-1}(x)$ is equivalent to $x = \sin(y)$

$y = \cos^{-1}(x)$ is equivalent to $x = \cos(y)$

$y = \tan^{-1}(x)$ is equivalent to $x = \tan(y)$

Domain and Range

Function	Domain	Range
$y = \sin^{-1}(x)$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1}(x)$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \tan^{-1}(x)$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Inverse Properties

$$\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad \cos^{-1}(\cos(\theta)) = \theta$$

$$\sin(\sin^{-1}(x)) = x \quad \sin^{-1}(\sin(\theta)) = \theta$$

$$\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad \tan^{-1}(\tan(\theta)) = \theta$$

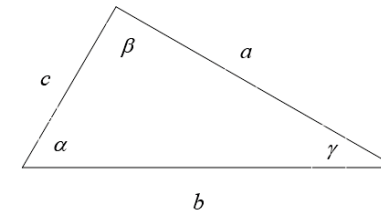
Alternate Notation

$$\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

$$\cos^{-1}(x) = \arccos(x)$$

$$\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$$

Law of Sines, Cosines and Tangents



Law of Sines

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Law of Cosines

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

Mollweide's Formula

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\gamma\right)}$$

Law of Tangents

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\right)}$$

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\right)}$$

Basic Properties and Facts

Arithmetic Operations

$$ab + ac = a(b + c) \quad a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} \quad \frac{\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}}{1} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\frac{a - b}{c - d} = \frac{b - a}{d - c} \quad \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{ab + ac}{a} = b + c, \quad a \neq 0 \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$$

Exponent Properties

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}} \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Properties of Radicals

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ if } n \text{ is odd}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ if } n \text{ is even}$$

Properties of Inequalities

If $a < b$ then $a + c < b + c$ and $a - c < b - c$

If $a < b$ and $c > 0$ then $ac < bc$ and $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

If $a < b$ and $c < 0$ then $ac > bc$ and $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Properties of Absolute Value

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| \geq 0 \quad |-a| = |a|$$

$$|ab| = |a| |b| \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{Triangle Inequality}$$

Distance Formula

If $P_1 = (x_1, y_1)$ and $P_2 = (x_2, y_2)$ are two points the distance between them is

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Complex Numbers

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1 \quad \sqrt{-a} = i\sqrt{a}, \quad a \geq 0$$

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Complex Modulus}$$

$$\overline{(a + bi)} = a - bi \quad \text{Complex Conjugate}$$

$$\overline{(a + bi)}(a + bi) = |a + bi|^2$$

Logarithms and Log Properties

Definition

$y = \log_b(x)$ is equivalent to $x = b^y$

Example

$\log_5(125) = 3$ because $5^3 = 125$

Special Logarithms

$\ln(x) = \log_e(x)$ natural log

$\log(x) = \log_{10}(x)$ common log

where $e = 2.718281828 \dots$

Logarithm Properties

$$\log_b(b) = 1 \quad \log_b(1) = 0$$

$$\log_b(b^x) = x \quad b^{\log_b(x)} = x$$

$$\log_b(x^r) = r \log_b(x)$$

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

The domain of $\log_b(x)$ is $x > 0$

Factoring and Solving

Factoring Formulas

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x - a)^3$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^{2n} - a^{2n} = (x^n - a^n)(x^n + a^n)$$

If n is odd then,

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1})$$

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1})$$

Completing the Square

$$\text{Solve } 2x^2 - 6x - 10 = 0$$

(1) Divide by the coefficient of the x^2

$$x^2 - 3x - 5 = 0$$

(2) Move the constant to the other side.

$$x^2 - 3x = 5$$

(3) Take half the coefficient of x , square it and add it to both sides

$$x^2 - 3x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 5 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 5 + \frac{9}{4} = \frac{29}{4}$$

(4) Factor the left side

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

(5) Use Square Root Property

$$x - \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{29}{4}} = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

(6) Solve for x

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$