FEM FS25

fischal

Version: June 26, 2025

Matrixsteifigkeitsmethode

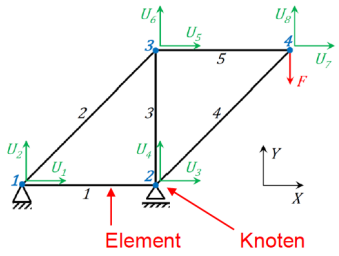
Diskretisierung der Struktur durch einzelne Strukturelemente **(Stab, Balken, Platte, Schale)**

Für **Zug-/Druckstäbe** eines **Fachwerks** (Beispiel unterhalb) gilt:

- Stäbe $e = 1 \div 5$
- Querschnittsfläche A^e
- E-Modul E^e
- Länge L^e
- Knoten $i = 1 \div 4$

Jeder Knoten i eines Elements e hat:

- Freiheitsgrade U_j^e
- Knotenkräfte F_j^e



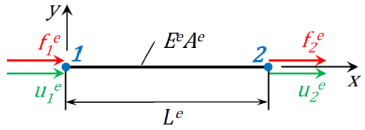
Gross geschrieben = global, **klein** geschrieben = lokal

Lokale Elementsteifigkeitsmatrix eines Z/D Stabes

Belastungsrichtung X

Knoten sind immer mit **1** und **2** nummeriert. Wenn eine Kraft an einem Knoten angreift ist dort die Verschiebung positiv. Dagenen muss die Verschiebung am anderen Knotenpunkt negativ sein.

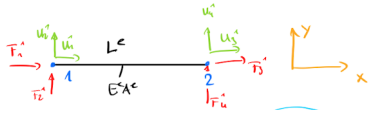
Steifigkeitsmatrix ist **singulär** $->$ **nicht invertierbar** $-> \det(\underline{\underline{k}}^e) = 0$



$$\begin{pmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{pmatrix} = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}^e = \underline{\underline{\mathbf{k}}}^e \cdot \mathbf{u}^e$$

Belastungsrichtung X und Y (Horizontal)



$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{pmatrix} = \frac{E^e I^e}{L^e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ U_4^e \end{pmatrix}$$

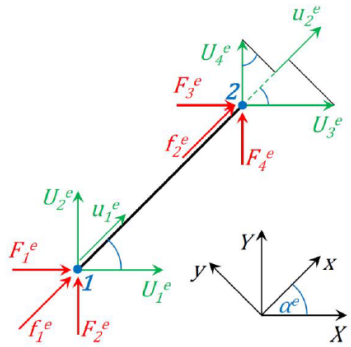
$$\mathbf{F}^e = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^e \cdot \mathbf{U}^e$$

Belastungsrichtung X und Y (Vertikal)

$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{pmatrix} = \frac{E^e I^e}{L^e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ U_4^e \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}^e = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^e \cdot \mathbf{U}^e$$

Gedreht um Winkel α



$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^e(\alpha^e) = \begin{pmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{pmatrix} = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}$$

mit $s^e = \sin\alpha^e, \quad c^e = \cos\alpha^e$

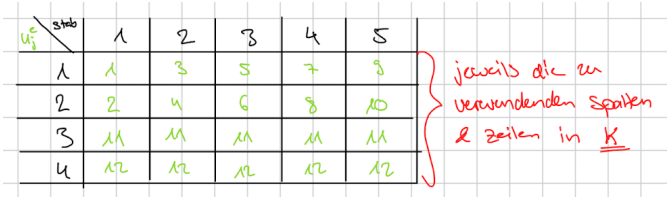
Spezialfall: Gedreht um Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^e(\alpha^e) = \begin{pmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{pmatrix} = \frac{E^e A^e}{2 * L^e} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Struktursteifigkeitsmatrix eines Z/D-Stabes

- Besitzt für **n-Freiheitsgrade** die Dimension **n x n**
- Quadratisch und singulär

Assembly durch Koinzidenztabelle:



Die Tabelle ist immer abhängig davon, wie die einzelnen Verschiebungen eingezeichnet sind.
Die einzelnen Einträge der Elementsteifigkeitsmatrix werden an den Zeilen und Spalten der Koinzidenztabelle eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^4 & K_{12}^4 & K_{13}^4 & K_{14}^4 \\ K_{21}^4 & K_{22}^4 & K_{23}^4 & K_{24}^4 \\ K_{31}^4 & K_{32}^4 & K_{33}^4 & K_{34}^4 \\ K_{41}^4 & K_{42}^4 & K_{43}^4 & K_{44}^4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

1	2	3	4	5	6	7	8	l/k
+	+	+	+	+	+	+	+	1
+	+	+	+	+	+	+	+	2
+	+	K_{11}^4	K_{12}^4	+	+	K_{13}^4	K_{14}^4	3
+	+	K_{21}^4	K_{22}^4	+	+	K_{23}^4	K_{24}^4	4
+	+	+	+	+	+	+	+	5
+	+	+	+	+	+	+	+	6
+	+	K_{31}^4	K_{32}^4	+	+	K_{33}^4	K_{34}^4	7
+	+	K_{41}^4	K_{42}^4	+	+	K_{43}^4	K_{44}^4	8

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ \hline F_1 \\ F_2 \\ F_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc|c} K_{33} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{31} & K_{32} & K_{34} & U_3 \\ K_{53} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{51} & K_{52} & K_{54} & U_5 \\ K_{63} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{61} & K_{62} & K_{64} & U_6 \\ K_{73} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} & K_{71} & K_{72} & K_{74} & U_7 \\ K_{83} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{81} & K_{82} & K_{84} & U_8 \\ \hline K_{13} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{11} & K_{12} & K_{14} & 0 \\ K_{23} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{21} & K_{22} & K_{24} & 0 \\ K_{43} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{41} & K_{42} & K_{44} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_F &= \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_{FF} \boldsymbol{U}_F + \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_{FU} \boldsymbol{U}_U \\ \boldsymbol{F}_U &= \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_{UF} \boldsymbol{U}_F + \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_{UU} \boldsymbol{U}_U \end{aligned}$$

Reduzierte Struktursteifigkeitsmatrix eines Z/D-Stabes

1. Herunterbrechen auf gesuchte Verschiebungen (z.B. gesucht U_2 und U_4: 2 × 2 Matrix)
2. Zuordnen der Zeilen/Spalten aus der Koinzidenztabelle in die ESM
3. Einträge aus den ESM herauslesen und in red. SSM eintragen

Beispiel:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^1 = \frac{EA}{4L} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^2 = \frac{EA}{4L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^3 = \frac{EA}{4L} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FF} = \begin{pmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^2 & -1 \\ -1 & K_{33}^2 + K_{11}^3 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems

$$\underline{\boldsymbol{F}}_F = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FF}\underline{\boldsymbol{U}}_F + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FU}\underline{\boldsymbol{U}}_U$$
$$\underline{\boldsymbol{F}}_U = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{UF}\underline{\boldsymbol{U}}_F + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{UU}\underline{\boldsymbol{U}}_U$$

Für gesuchte Verschiebungen:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_F = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FF}^{-1} * (\underline{\boldsymbol{F}}_F - \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FU}\underline{\boldsymbol{U}}_U)$$

Dabei ist $\underline{\boldsymbol{U}}_U$ ein **Nullvektor**, solange sich die Lagerpunkte nicht verschieben.

Invertierung 2×2 Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Für die Berechnung einzelner Lagerkräfte nimmt man:

$$\underline{\boldsymbol{F}}_U = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{UF}\underline{\boldsymbol{U}}_F + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{UU}\underline{\boldsymbol{U}}_U$$

Dabei erfolgt das Einsetzen der gleichen Struktur wie für die Reduzierte SSM

$$\boldsymbol{F}_6 = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{UF} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_F = \frac{xy}{z}\begin{pmatrix} \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix}\frac{xy}{z}\begin{pmatrix} U_2 \\ \\ U_4 \end{pmatrix}$$

Dehnungen

- Für die Dehnungen eines Elements gilt:

$$\varepsilon^e = \frac{\Delta L^e}{L^e}$$

- Für die Verlängerung eines Elementes im lokalen KOS gilt:

$$\Delta L^e = u_2^e - u_1^e$$

- Durch die nach der Rücktransformation bekannten lokalen Verschiebungen der Knoten 1, 2 in jedem Element können die Verlängerungen ΔL^e bestimmt werden.

$$\varepsilon^e = \frac{u_2^e - u_1^e}{L^e}$$

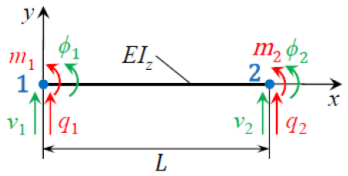
Spannungen

- Mit dem Elastizitätsgesetz aus den Dehnungen:

$$\sigma^e = E^e\varepsilon^e$$

Balkenelement

- Verschiebungen quer zur Elementachse möglich
- Verdrehungen des Querschnitts möglich
- Durch reine Biegung entstehen v_i^e sowie ϕ_i^e Freiheitsgrade
- Auf den Knoten wirken die Schnittgrössen:
  - Querkraft q_1^e
  - Biegemoment m_1^e



Elementsteifigkeitsmatrix des Biegebalkens

Ist nur geeignet für **reine Biegung**. Keine **Längsbeanspruchung**.

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ m_1 \\ q_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = EI_z \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \underline{\underline{\mathbf{k}}} \cdot \mathbf{v}$$

Elementsteifigkeitsmatrix Zug/Druck/Biegestab (Horizontal)

Setzt sich aus ESM des Zug/Druckstabes und des Biegebalkens zusammen:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ q_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ q_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{E}{L^3}\begin{pmatrix} AL^2 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I_z & 6I_zL & 0 & -12I_z & 6I_zL \\ 0 & 6I_zL & 4I_zL^2 & 0 & -6I_zL & 2I_zL^2 \\ -AL^2 & 0 & 0 & AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I_z & -6I_zL & 0 & 12I_z & -6I_zL \\ 0 & 6I_zL & 2I_zL^2 & 0 & -6I_zL & 4I_zL^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \underline{\underline{\mathbf{k}}}\mathbf{v}$$

Globale Elementsteifigkeitsmatrix Zug/Druck/Biegestab

$$\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}^e = \begin{pmatrix} \frac{AEc^2}{L}+\frac{12EIs^2}{L^3} & \frac{AEcs}{L}-\frac{12EIcs}{L^3} & -\frac{6EIs}{L^2} & -\frac{AEc^2}{L}-\frac{12EIs^2}{L^3} & \frac{12EIcs}{L^3}-\frac{AEcs}{L} & -\frac{6EIs}{L^2} \\ \frac{AEcs}{L}-\frac{12EIcs}{L^3} & \frac{12EIc^2}{L^3}+\frac{AEs^2}{L} & \frac{6EIc}{L^2} & \frac{12EIcs}{L^3}-\frac{AEcs}{L} & -\frac{12EIc^2}{L^3}-\frac{AEs^2}{L} & \frac{6EIc}{L^2} \\ -\frac{6EIs}{L^2} & \frac{6EIc}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EIs}{L^2} & -\frac{6EIc}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AEc^2}{L}-\frac{12EIs^2}{L^3} & \frac{12EIcs}{L^3}-\frac{AEcs}{L} & \frac{6EIs}{L^2} & \frac{AEc^2}{L}+\frac{12EIs^2}{L^3} & \frac{AEcs}{L}-\frac{12EIcs}{L^3} & \frac{6EIs}{L^2} \\ \frac{12EIcs}{L^3}-\frac{AEcs}{L} & -\frac{12EIc^2}{L^3}-\frac{AEs^2}{L} & -\frac{6EIc}{L^2} & \frac{AEcs}{L}-\frac{12EIcs}{L^3} & \frac{12EIc^2}{L^3}+\frac{AEs^2}{L} & -\frac{6EIc}{L^2} \\ -\frac{6EIs}{L^2} & \frac{6EIc}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EIs}{L^2} & -\frac{6EIc}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

$->$ Für beliebige Winkel
Spezialfall für $\alpha = 90°$:

$$K^e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

Mathematische Grundlagen

Prinzip der virtuellen Arbeit

1. Virtuelle Verschiebungen nur gedacht
2. Schwache Form, Variationell
3. Gleichgewicht wird ertastet

$$0 \stackrel{!}{=} \delta W_{\text{tot}} = \delta u \cdot F_{AX} + \delta v \cdot F_{AY} + (\delta v + a\,\delta\varphi)\cdot F_{BY} - \left(\delta v + \frac{a}{2}\delta\varphi\right) mg \quad \forall\, \delta u, \delta v, \delta\varphi$$

Galerkin Methode

Starke Form des Gleichgewichts

Starke Form besteht aus einer Differentialgleichung, welche das System beschreibt, aber nicht einfach lösbar ist.

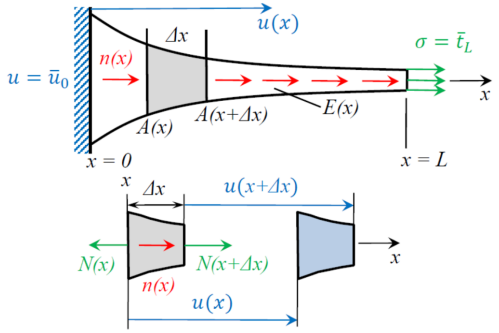
1. Verschiebung u muss 2 mal stetig Differenzierbar sein.
2. Wesentliche (Geometrische) Bedinungen = Verschiebungen
3. Natürliche (Dynamische) Bedingungen = Spannungen

Bsp. an Z/D Stab

$$\frac{d}{dx}\left(EA(x)\frac{du}{dx}\right) + f(x) = 0 \quad \text{für } x \in (0, L)$$

Schwache Form Fünfsatz

Herleitung (Fünfsatz):



Randbedingungen: $u(0) = \bar{u} \qquad \sigma(L) = \bar{t}_L = E \cdot \frac{du}{dx}$

An der Stelle x_v wo $u(x)$ vorgegeben ist, ist $g(x_v) \stackrel{!}{=} 0$

$$x \in (0; L)$$

1. **Gleichgewicht:**

$$0 = [A(x)\underbrace{E(x)u'(x)}_{\sigma(x)}]' + n(x)$$

$$\Downarrow \cdot g(x) \Downarrow$$

2. $$0 = g(x)[A(x)E(x)u'(x)]' + g(x)n(x)$$

$$\Downarrow \int_0^L dx \Downarrow$$

3. $$0 = \int_0^L g(x)[A(x)E(x)u'(x)]'dx + \int_0^L g(x)n(x)dx$$

4. **partielle Integration:**

$$0 = \Big[g(x)A(x)E(x)u'(x)\Big]_0^L - \int_0^L g'(x)A(x)E(x)u'(x)dx + \int_0^L g(x)n(x)dx$$

5. mit **Randbedingungen:**

Schwache Form des Gleichgewichts:

$$0 = g(L)A(L)\bar{t}_L - \int_0^L g'(x)A(x)E(x)u'(x)dx + \int_0^L g(x)n(x)dx$$

Diskretisierung, Ansatzfunktionen und Gewichtungsfunktionen

Sind so zu wählen, dass möglichst gut Approximiert werden kann. (Oder in Aufgabenstellung vorgegeben)
Je **höher** der **Grad** einer Polynomfunktion, desto **genauer** die Approximation.
Beispiel:

$$u(x) = c_0 + c_1 \cdot x$$

Die Gewichtungsfunktion ist gleich zu wählen:

$$g_u(x) = \delta c_0 + \delta c_0 \cdot x$$

δc_0 ist **eine Variable!**

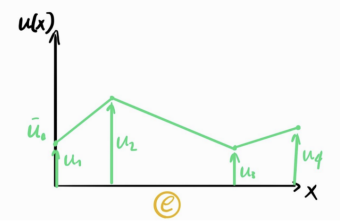
Konstanten bestimmen

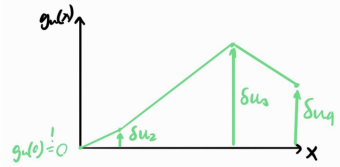
Für die **Ansatzfunktion** mit gegebener Verschiebungsrandbedingung (Beispiele):

$$\bar{u}_L \neq 0 \text{ bei } x = L$$

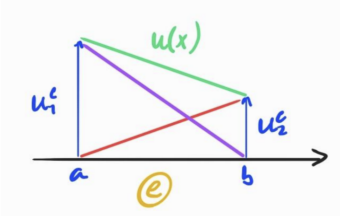
In die Ansatzfunktion einsetzen und nach der Konstanten c_0 oder c_1 auflösen.

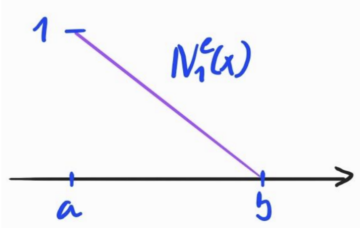
Für die **Gewichtsfunktion** ist die **Randbedingung immer 0 beim definierten** $u(x)$





Formfunktionen





Galerkin:

$$u(x) = N_1^e(x) \cdot u_1^e + N_2^e(x) \cdot u_2^e$$

$$g_u(x) = N_1^e(x) \cdot \delta u_1^e + N_2^e(x) \cdot \delta u_2^e$$

Vektoren der Knotenverschiebung und virtuellen Verschiebung:

$$\vec{u}^e = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \delta\vec{u}^e = \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix}$$

Formfunktionsmatrix:

$$\underline{\underline{N}}^e(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) | N_2(x) \end{pmatrix}$$

Ableitungsmatrix:

$$\underline{\underline{B}}^e = \frac{d}{dx}\underline{\underline{N}}^e(x)$$

Ableitung der Ansatzfunktion:

$$u'(x) = \frac{d}{dx}\underline{\underline{N}}^e(x)\vec{u} = \underline{\underline{B}}^e\vec{u}$$

Ableitung der Gewichtungsfunktion:

$$g_u'(x) = \frac{d}{dx}\underline{\underline{N}}^e(x)\delta\vec{u} = \underline{\underline{B}}^e\delta\vec{u}$$

für Elementsteifigkeitsmatrix:
Einsetzen in:

$$\int_a^b g'(x)A(x)E(x)u'(x)dx$$

Membranelemente

Herleitung Achsensymetrisches Membranelement

$w(r)$: Ansatzfunktion
$\eta(r)$: Gewichtungsfunktion
$p(r)$: Druckverteilung / Lastverteilung auf der Membran
σ_0: Spannung am Ende der Membran
t: Membrandicke
L: Länge eines Elements
N: Formfunktionsmatrix
$r_L \in [0; L]$: Laufvariable innerhalb eines Elements
$\bar{p} = \frac{p(r)}{\sigma_0 t}$ Randbedingung der Last
$\underline{\underline{k}}^e$: Elementsteifigkeitsmatrix
$\underline{p}_e$: Elementlastvektor
$\underline{r}_e$: Radien der Elementknoten

$$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_L}{L} & \frac{r_L}{L} \end{pmatrix}$$

$$w(r) = N_1 w_1 + N_2 w_2$$

$$\eta(r) = N_1 \delta w_1 + N_2 \delta w_2$$

$$\underline{w}_e = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \qquad \delta\underline{w}_e = \begin{pmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \end{pmatrix}$$

$$r = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{r}e = N_1 rki + N_2 r_{ki+1}$$

$$\underline{r}_e = \begin{pmatrix} r_{ki} \\ r_{ki+1} \end{pmatrix}$$

Schwache Form wenn $\eta(R) = 0$:

$$0 = -\int_0^R \left(\frac{d\eta}{dr} \frac{dw}{dr} \right) r \, dr + \int_0^R \eta \bar{p} r \, dr$$

Elementsteifigkeitsmatrix und Elementlastvektor:

$$\underbrace{\left(\int_0^L \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \, r_e \, dr \right)}_{\underline{\underline{k}}^e} \underline{w}_e + \underbrace{\int_0^L \underline{\underline{N}}^T \bar{p} \, \underline{\underline{N}} \, r_e \, dr}_{\underline{p}_e} = 0$$

$$\underline{\underline{k}}^e = \begin{pmatrix} -1/L \\ 1/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/L & 1/L \end{pmatrix} \int_0^L r \, dr_L = \frac{r_{ki} + r_{ki+1}}{2L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{p}_e = \int_0^L \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_L}{L} \\ \frac{r_L}{L} \end{pmatrix} \bar{p} \, \underline{\underline{N}} \, \underline{r}_e \, dr_L = \bar{p} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} L r_{ki} + \frac{1}{6} L r_{ki+1} \\ \frac{1}{6} L r_{ki} + \frac{1}{3} L r_{ki+1} \end{pmatrix} = \frac{\bar{p} L}{6} \begin{pmatrix} 2r_{ki} + r_{ki+1} \\ r_{ki} + 2r_{ki+1} \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben:
- Rotationssymmetrisches Problem
- Radiale Verschiebung $u(r)$
- Lineare Ansatzfunktionen:

$$N_1 = 1 - \frac{r_L}{L}, \qquad N_2 = \frac{r_L}{L}$$

- Lokale Koordinate: $r_L \in [0, L]$
- Globale Knotenradien: $r_{ki},\ r_{ki+1}$

Schritt 1: Ableitungen der Ansatzfunktionen

$$\frac{dN_1}{dr_L} = -\frac{1}{L}, \qquad \frac{dN_2}{dr_L} = \frac{1}{L}$$

Schritt 2: Definition der Ableitungsmatrix B

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Schritt 3: Grundform der Elementsteifigkeitsmatrix

$$K_e = \int_0^L B^T \cdot E \cdot B \cdot r \, dr_L$$

Schritt 4: Ausmultiplizieren des konstanten Teils

$$B^T E B = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$K_e = \frac{E}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} r \, dr_L$$

Schritt 5: Interpolation des Radius r im Element

$$r = N_1 \cdot r_{ki} + N_2 \cdot r_{ki+1} = r_{ki} + \frac{r_L}{L}(r_{ki+1} - r_{ki})$$

Schritt 6: Integration
Berechnung des Integrals:

$$\int_0^L r \, dr_L = \int_0^L \left(r_{ki} + \frac{r_L}{L}(r_{ki+1} - r_{ki}) \right) dr_L$$

$$= r_{ki} \cdot L + \frac{r_{ki+1} - r_{ki}}{L} \cdot \frac{L^2}{2}$$

$$= L \cdot \frac{r_{ki} + r_{ki+1}}{2}$$

Schritt 7: Einsetzen in die Steifigkeitsmatrix

$$K_e = \frac{E}{L^2} \cdot \frac{L(r_{ki} + r_{ki+1})}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Schritt 8: Endform der lokalen Elementsteifigkeitsmatrix

$$\boxed{K_e = \frac{E(r_{ki} + r_{ki+1})}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Starke Form – achsensymmetrisch

- Gleichgewichtsgleichung in Zylinderkoordinaten (Rotation um z-Achse, nur $w(r)$ relevant):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + \bar{p}(r) = 0$$

- mit dimensionsloser Druckfunktion:

$$\bar{p}(r) = \frac{p(r)}{\sigma_0 t}$$

- Definitionsbereich: $r \in [0, R]$
- Randbedingung: $w(R) = 0$

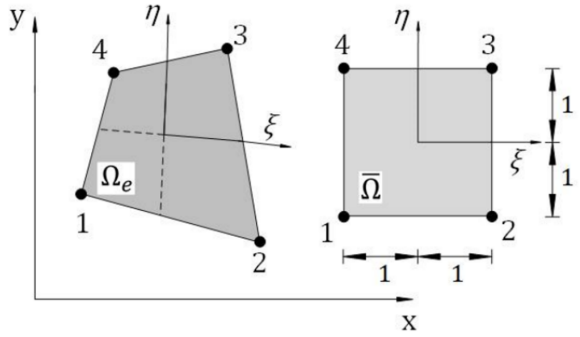
Schwache Form (andere Schreibweise)

- Gewichtssfunktion $g(r)$ mit $g(R) = 0$

$$\boxed{0 = -\int_0^R \frac{dg}{dr} \cdot r \cdot \frac{dw}{dr} \, dr + \int_0^R g(r) \cdot \bar{p}(r) \cdot r \, dr}$$

Isoparametrisches 4-Knoten-Element

Das Isoparametrische Vierknotenelement lässt sich als Einheitsquadrat im $\xi;\eta$ KOS darstellen:



Transformation von einem Koordinaten Punkt des $\xi-\eta$ KOS in ein x-y KOS:

$$\tilde{x}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)\cdot x_i$$

$$\tilde{y}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)\cdot y_i$$

Formfunktionen nach $\xi;\eta$:

$$N_i(\xi;\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

Jacobi-Matrix im Referenzsystem:

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}x_i \qquad \frac{\partial y}{\partial\xi}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}y_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial\eta}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}x_i \qquad \frac{\partial y}{\partial\eta}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}y_i$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial\xi}=\frac{1}{4}\xi_i(1+\eta_i\eta) \qquad \frac{\partial N_i}{\partial\eta}=\frac{1}{4}\eta_i(1+\xi_i\xi)$$

Formfunktionen und Ableitungen (Beispiel wie im Bild gezeigt:) nach $\xi;\eta$:

$$N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad \frac{\partial N_1}{\partial\xi}=-\frac{1}{4}(1-\eta), \quad \frac{\partial N_1}{\partial\eta}=-\frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad \frac{\partial N_2}{\partial\xi}=\frac{1}{4}(1-\eta), \quad \frac{\partial N_2}{\partial\eta}=-\frac{1}{4}(1+\xi)$$

$$N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad \frac{\partial N_3}{\partial\xi}=\frac{1}{4}(1+\eta), \quad \frac{\partial N_3}{\partial\eta}=\frac{1}{4}(1+\xi)$$

$$N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \quad \frac{\partial N_4}{\partial\xi}=-\frac{1}{4}(1+\eta), \quad \frac{\partial N_4}{\partial\eta}=\frac{1}{4}(1-\xi)$$

Gauß-Legendre-Quadratur (exakte Stützstellen und Gewichte)

Transformation auf das Intervall [-1;1]

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{b-a}{2}\xi_i+\frac{a+b}{2}\right)\omega_i$$

Grundformel (auf Intervall [-1,1])

$$\int_{-1}^{1}f(\xi)\,d\xi\approx\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot f(\xi_i)$$

Anzahl benötigte Stützstellen (Polynom):

$$\xi_i\leq 2n-1$$

Berechnung des Integrals:

1. Benötigte Stützstellen berechnen
2. ξ_i an den Stützstellen berechnen
3. Berechnete Funktionswerte mit den Gewichtungen ω_i multiplizieren
4. Summe berechnen

Exakte Werte für $n=1$ bis 6

n	Stützstellen ξ_i	Gewichte w_i
1	0	2
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1,1$
3	$0,\ \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}\mp\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18\mp\sqrt{30}}{36}$
5	$0,\ \pm\frac{1}{3}\sqrt{5\mp2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{128}{225},\ \frac{322\pm13\sqrt{70}}{900}$
6	$\pm\frac{1}{7}\sqrt{21\mp2\sqrt{70}},\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{322\mp13\sqrt{70}}{900},\ \frac{128}{225}$

Hinweis: Die Zeichen $\pm$ und $\mp$ stehen für symmetrische Paarungen

Festigkeitslehre

Spannungen und Dehnungen, Hooksches Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx}=E\cdot\left(\frac{\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{yy}}{1-\nu^2}\right)$$

$$\sigma_{yy}=E\cdot\left(\frac{\varepsilon_{yy}+\nu\varepsilon_{xx}}{1-\nu^2}\right)$$

$$\tau_{xy}=G\cdot\gamma_{xy}, \quad \text{mit } G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

Zusammenhang isotrope Materialien:

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$G=$ Schubmodul
$K=$ Kompressionsmodul

Ebener Spannungszustand:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}$$

Ebener Verzerrungszustand:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}$$