

# FL2 FS25

fischal

Version: June 22, 2025

## Allgemeine Umrechnungsformeln

Radiant/Grad:

$$\text{Grad} = \text{Radiant} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\text{Radiant} = \text{Grad} \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

Leistung und Drehmoment

$$M = \frac{P \cdot 60}{2 \cdot \pi \cdot n}$$

$M$  = Drehmoment in  $Nm$   
 $P$  = Leistung in  $KW$   
 $n$  = Drehzahl in  $\frac{1}{\text{min}}$

Hookesches Gesetz, Spannung, Dehnung

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad , \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad , \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

$\sigma$  = Spannung  $N/mm^2$   
 $\varepsilon$  = Dehnung  
 $\Delta l$  = Absolute Längenänderung  
 $F$  = Kraft  $N$   
 $A$  = Querschnittsfläche  $mm^2$

Querkraft und Biegemoment

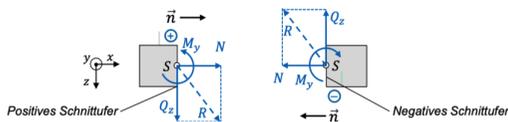
$$-n(x) = \frac{dN}{dx}$$

$$-q(x) = \frac{dQ}{dx}$$

$$Q(x) = - \int q(x) dx + C$$

$$M(x) = \int Q(x) dx + C$$

## Schnittgrößen



Last	Q	M	Q	M
	Knick	-		$\neq 0$ $0$
	Sprung	Knick		$0$ $\neq 0$
	-	Sprung		$\neq 0$ $\neq 0$
				$\neq 0$ $\neq 0$
				$0$ $0$

## Festigkeitshypothesen

Normalspannungshypothese (NH)

$$\sigma_{\max} = \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

Gestaltänderungshypothese (GH, Tresca)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \leq \tau_{\text{zul}} = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{2}$$

alternativ:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} \leq \frac{\sigma_{\text{zul}}}{2}$$

Von-Mises-Hypothese (VM)

Allgemein:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

Ebenes Spannungsfeld ( $\sigma_3 = 0$ ):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

## Spannungstransformationen

Normalspannungen

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

Schubspannungen

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\varphi) + \tau_{xy} \cos(2\varphi)$$

Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hauptachsenrichtung

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

## Biegung

Flächenträgheitsmoment (Schaeffler S. 242 ff.)

Widerstandsfähigkeit gegen Biegung, Masseinheit:  $mm^4$

Axiales Flächenträgheitsmoment:

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_{yy} = \int_A z^2 dA \quad , \quad I_{yz} = - \int_A yz dA$$

$I_{yz} = 0 \rightarrow$  Symmetrie

Polares Flächenträgheitsmoment:

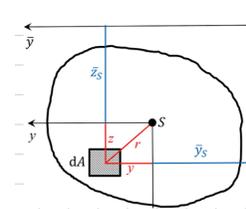
$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A r^2 dA$$

## Satz von Steiner

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \bar{z}_S^2 \cdot A + I_{yy}$$

$$I_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{y}_S^2 \cdot A + I_{zz}$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = -\bar{y}_S \bar{z}_S \cdot A + I_{yz}$$



Achsen müssen parallel verschoben sein  
 Abstand immer Quadratisch  $\rightarrow$  Nie negativ

## Transformationsbeziehungen:

$$I_{y'y'} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) + \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi$$

$$I_{z'z'} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) - \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi$$

$$I_{y'z'} = -\frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi$$

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1/2} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Hauptachsenrichtung:

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}$$

$\varphi^*$  einsetzen in Transformationsbeziehung: Prüfung welcher Winkel zu welchem Hauptträgheitsmoment

Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} I_{y'y'} & I_{z'y'} \\ I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{I'} = \underline{a} \cdot \underline{I} \cdot \underline{a}^T$$

Eigenwertproblem zur Berechnung der Hauptträgheitsmomente:

$$\det \begin{pmatrix} I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{yz} & I_{zz} - I \end{pmatrix} = (I_{yy} - I)(I_{zz} - I) - I_{yz}^2 = 0$$

## Biegespannung

Biegespannung im geraden Balken:

$$\sigma_B(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} \cdot z$$

$M_y(x)$ : Biegemoment  $\rightarrow$  Durch Freischnitt herausfinden

Max. Biegespannung im geraden Balken:

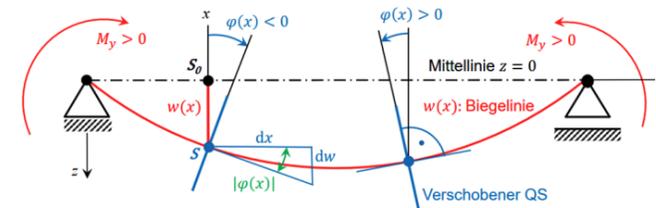
$$\sigma_{B, \max} = \frac{M_{\max}}{I} \cdot \frac{z}{2}$$

Ungültig bei schiefer Biegung (Biegemoment nicht kollinear zum Hauptachsensystem)

Maximale Biegung allgemein:

$$\frac{d\sigma_B}{dx} = 0 \quad , \quad x \text{ einsetzen in } \sigma_B$$

## Biegelinie (2.Ordnung)



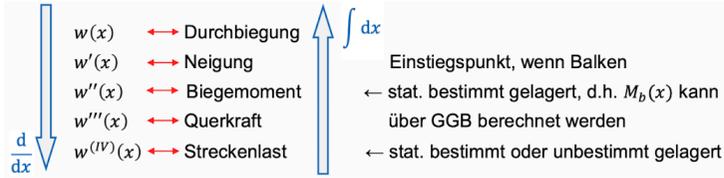
DGL 2. Ordnung

$$\omega''(x) = -\frac{M_y(x)}{E \cdot I_y(x)}$$

Allgemeine Lösung:

$$w(x) = - \iint \frac{M_y(x)}{E \cdot I_y(x)} dx dx + C_1 \cdot x + C_2$$

$EI_y(x)$  = Biegesteifigkeit  
 Integrationskonstanten über Randbedingungen herausfinden.  
 Voraussetzung zur Lösung: **Statische Bestimmtheit**  
 Durchbiegung =  $f$



**Mögliche Randbedingungen**

**1. Einseitig eingespannter Balken (Kragträger)**

$w(0) = 0$  (Null-Durchbiegung an der Einspannung)  
 $w'(0) = 0$  (Null-Neigung an der Einspannung)

**2. Einfach gelagerter Balken (Einfeldträger)**

$w(0) = 0$  (Null-Durchbiegung am linken Lager)  
 $w(l) = 0$  (Null-Durchbiegung am rechten Lager)

**3. Beidseitig eingespannt (Fest-Fest-Lagerung)**

$w(0) = 0$   
 $w'(0) = 0$   
 $w(l) = 0$   
 $w'(l) = 0$

**4. Fest-Los-Lagerung**

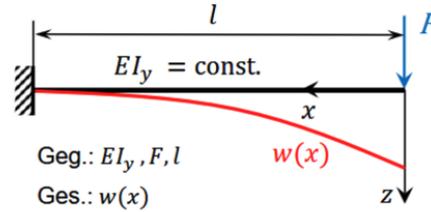
$w(0) = 0$  (Einspannung links)  
 $w'(0) = 0$   
 $w(l) = 0$  (Loslager rechts)

**5. Freies Ende (z. B. Kragträger)**

$M(l) = -w''(x) = 0$  (freies Moment am Ende)  
 $Q(l) = -w'''(x) = 0$  (freie Querkraft am Ende)

System und Lastbild	Q-Verlauf	M-Verlauf

**Biegemoment Beispiel:**



- Biegemoment bestimmen:**  
 $\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y^{(s)} + Fx = 0$   
 $M_y^{(s)} = -Fx$
- DGL lösen:**  
 $w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y(x)}$   
 $w'(x) = \frac{Fx^2}{2EI_y} + c_1$   
 $w(x) = \frac{Fx^3}{6EI_y} + c_1x + c_2$
- Randbedingungen einarbeiten um  $c_i$  zu bestimmen:**  
 $w'(x=l) = 0 \Rightarrow \frac{Fl^2}{2EI_y} + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -\frac{Fl^2}{2EI_y}$   
 $w(x=l) = 0 \Rightarrow \frac{Fl^3}{6EI_y} - \frac{Fl^3}{2EI_y} + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{Fl^3}{3EI_y}$   
 $w(x) = \frac{Fl^3}{6EI_y} \left( \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{3x}{l} + 2 \right)$

**Biegelinie (4. Ordnung)**

$w^{(IV)}(x) \cdot EI_y = q(x)$

4 x Integrieren  
 4 Randbedingungen/Übergangsbedingungen für die Integrationskonstanten finden

**Übergangsbedingungen**

**Biegelinie muss eine stetige Funktion sein:**

$w(x_1 = a) = w(x_2 = 0)$

**Gleiche Tangente (Neigung) auf beiden Seiten:**

$w'(x_1 = a) = w'(x_2 = 0)$

**Momentensprung erlaubt:**

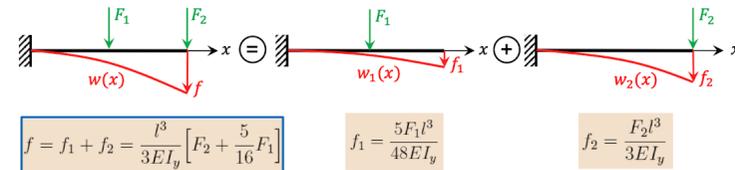
$w''(x_1 = a) - w''(x_2 = 0) = -\frac{M_0}{EI}$

**Querkraftsprung erlaubt:**

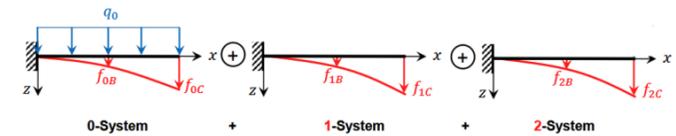
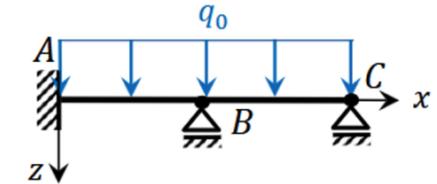
$w'''(x_1 = a) - w'''(x_2 = 0) = -\frac{F_0}{EI}$

**Superposition von Biegelinien**

$w(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x)$  für lineare Teillastfälle



**Lagerreaktionen stat. unbest. Balken**



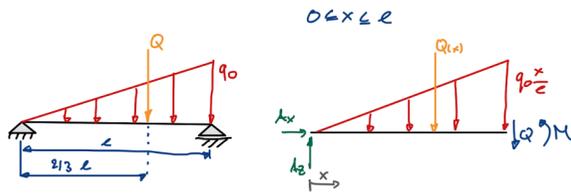
**Kompatibilitätsbedingung:**  
 (Bei Lagern gibt es keine Durchbiegung f):

$f_{0B} + f_{1B} + f_{2B} = 0$

$f_{0C} + f_{1C} + f_{2C} = 0$

Ein n-fach unbestimmtes System braucht n Kompatibilitätsbedingungen.

## Beispiele Biegelinien



$$Q = \frac{q_0 \cdot \ell}{2}$$

$$M = Q \cdot \frac{2}{3} \ell = \frac{q_0 \cdot \ell^2}{3}$$

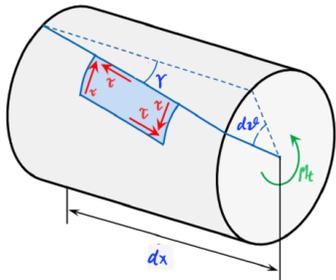
$$M_x = A_z \cdot x - \frac{q_0 \cdot x^3}{6}$$

	→ stat. bestimmt	⇒ $\omega(x) = \frac{q_0 \cdot \ell^4}{24 E I_y} \left[ \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 4 \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 6 \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right]$
	→ stat. bestimmt	⇒ $\omega(x) = \frac{q_0 \cdot \ell^4}{24 E I_y} \left[ \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right]$
	→ stat. unbestimmt	⇒ $\omega(x) = \frac{q_0 \cdot \ell^4}{24 E I_y} \left[ \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{5}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right]$
	→ stat. bestimmt	⇒ $\omega(x) = \frac{5 \cdot F \cdot \ell^3}{48 E I_y}$
	→ stat. bestimmt	⇒ $\omega(x) = \frac{F \cdot \ell^3}{8 E I_y}$

Weitere Beispiele: [Schaeffler S. 255](#), [TM 2 S. 125](#)

## Torsion (Vollquerschnitte)

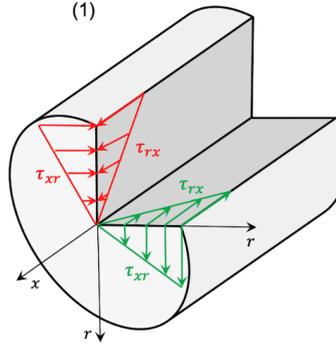
Spannungsverteilung im Zylinder:



$$\tau = G \cdot r \cdot \frac{d\vartheta}{dx}$$

$G$  = Schubmodul  $Mpa$   
 $r$  = Radius  
 $\frac{d\vartheta}{dx}$  = Verdrehung

(1)



$\tau$  wächst linear von innen nach aussen, weil die Verdrehung Konstant ist.

## Verdrehung

Verdrehung allgemein:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M_T}{G I_T(x)} \iff \vartheta(x) = \frac{M_T}{G} \int_0^x \frac{1}{I_T(\bar{x})} d\bar{x}$$

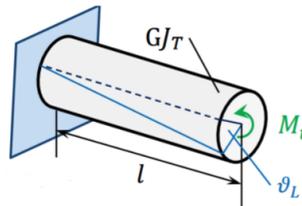
Verdrehung wenn  $M_T = const.$  und  $G I_T = const.$

$$\vartheta_L = \frac{M_T}{G I_T} \int_0^L dx = \frac{M_T}{G I_T} \cdot L$$

Koaxiale Verdrehungen können addiert werden:

$$\vartheta_{ges} = \sum_{i=1}^n \frac{M_T l_i}{I_{T_i} G_i}$$

$l_i$  = Längenabschnitt der jeweiligen Verdrehung



## Torsionsträgheitsmoment / -widerstandsmoment

Schäffler S. 247-248

Torsionsträgheitsmoment:

$$I_T = \int_A r^2 dA$$

$$I_T^{Kreis} = \frac{\pi}{32} d^4, \quad I_T^{Hohlkreis} = \frac{\pi}{32} (d_a^4 - d_i^4), \quad I_T^{Rechteck} \approx \frac{1}{3} b h^3$$

Torsionswiderstandsmoment:

$$W_T = \frac{I_T}{r_{max}}$$

$r_{max}$  = grösster Absand zum Torsionszentrum (äusserer Radius)

$$W_T^{Vollkreis} = \frac{\pi}{16} d^3, \quad W_T^{Rohr} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$$

## Torsionsspannung

Torsionssteifigkeit:

$$G \cdot I_T$$

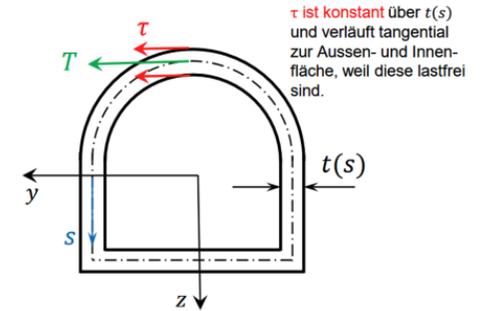
Torsionsspannung

$$\tau = \frac{M_T \cdot r}{I_T} \quad \tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$$

Maximale Torsionsspannung in Kreis und Kreisring:

$$\tau_{max}^{Vollkreis} = \frac{16 M_T}{\pi d^3} \quad \tau_{max}^{Hohlkreis} = \frac{16 M_T \cdot d_a}{\pi (d_a^4 - d_i^4)}$$

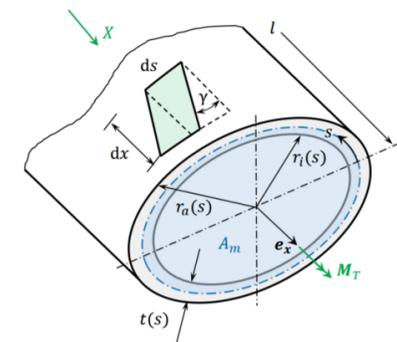
## Torsion (Dünnwandige Querschnitte)



**Schubfluss:** Verläuft tangential zur Profilmittellinie, konstant in Längs-/ Umfangsrichtung

$$T = \tau(s) \cdot t(s)$$

## Erste Formel von Bredt



$$\tau = \frac{M_T}{2 \cdot A_m \cdot t(s)} = \frac{M_T}{W_T}$$

$A_m$  = von der Wandmittellinie umschlossene Fläche

Kontrolle dünnwandige Profile:

$$\frac{t}{r_m} < 0.1$$

- Bei Verhältnis von  $\geq 0.1 \rightarrow$  Unterschätzung der Torsionsspannung um ca. 5%
- Tatsächliche Torsionsspannung mit Faktor  $\alpha$  multiplizieren

$$\alpha = \frac{1 + 0.5\lambda}{1 + 0.25\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{t}{r_m}$$

$$\tau_{\text{kor.}} = \frac{M_T}{W_T} \cdot \alpha$$

## 2. Formel von Bredt

Formänderungsarbeit:

$$W = \frac{1}{2} \frac{M_T^2 l}{GI_t}$$

Torsionsträgheitsmoment:

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{1}{t} ds}$$

Für Profile mit konstanter Wanddicke:

$$\oint \frac{1}{t} ds = \frac{1}{t} \oint ds = \frac{U}{t}$$

$U$  = Umfang der Querschnittsdickenmittellinie

Torsionsträgheitsmoment für konstante Wanddicke:

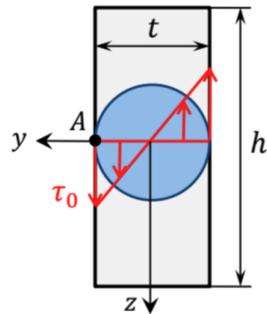
$$I_t = \frac{4A_m^2 t}{U}$$

Verdrehung Dünnwandige Profile:

$$\vartheta_L = \frac{M_T L}{G \frac{4A_m^2}{\oint \frac{1}{t} ds}}$$

## Torsion Dünnwandiger, offener Profile

- Konstruktionselemente: Doppel T/H/L Träger
- Längsträger Karosserie
- Profile in Leicht und Flugzeugbau
- **Voraussetzungen:**  $t \ll h$
- **Annahme:** Schubspannung: Linear über die Dicke  $t$  verteilt



Torsionsspannung:

$$\tau(y) = \frac{2\tau_0}{t} \cdot y$$

Torsionswiderstandsmoment eines schmalen Rechteckquerschnitts:

$$W_T = \frac{1}{3} ht^2$$

Torsionswiderstandsmoment eines aus n schmalen Rechteckquerschnitts:

$$W_T = \frac{I_t}{t_{\text{max}}} = \frac{1}{3 \cdot t_{\text{max}}} \sum_{i=1}^n h_i t_i^3$$

Torsionsträgheitsmoment eines schmalen Rechteckquerschnitts:

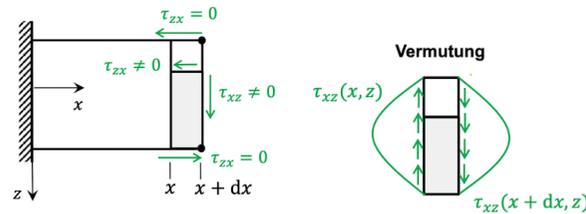
$$I_T = \frac{1}{3} ht^3$$

Torsionsträgheitsmoment eines aus n schmalen Rechteckquerschnitts:

$$I_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i t_i^3$$

Geschlossenes Profil:  $\tau_{\text{max}}$  bei  $t_{\text{min}}$   
Offenes Profil:  $\tau_{\text{max}}$  bei  $t_{\text{max}}$

## Querkraftschub



Spannungsverteilung aufgrund von Querkraft:

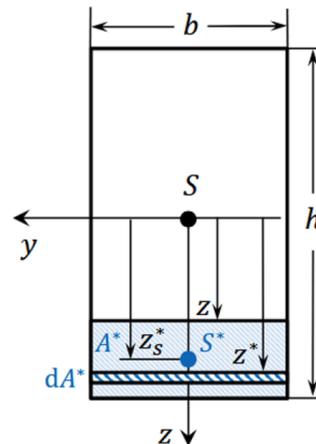
$$\tau_{xz}(x; z) = \frac{Q(x)S(z)}{I_y(x)b(z)}$$

Statisches Moment:

$$S(z) = \int_{A^*} z^* dA^*$$

## Rechteckquerschnitt

$A^*$  = Rechteckquerschnitt in welchem  $z_s^*$  die z-Koordinate des Schwerpunktes ist.



Stat. Moment Rechteckquerschnitt:

$$S_{\text{Rechteck}}(z) = b \left( \frac{h^2}{3} - \frac{z^2}{2} \right)$$

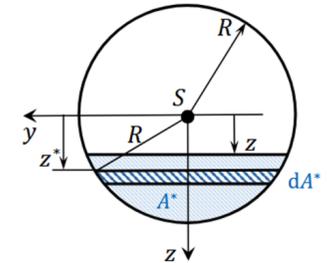
Schubspannung:

$$\tau_{xz} = \frac{Q(x)}{bh^3} \left( \frac{3}{2} h^2 - 6z^2 \right)$$

Max. Schubspannung

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{xz}(z=0) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}$$

## Kreisquerschnitt



Stat. Moment Rechteckquerschnitt:

$$b(z) = 2\sqrt{R^2 - z^2}, \quad I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$S_{\text{Kreis}}(z) = \frac{2}{3} (R^2 - z^2)^{3/2}$$

Schubspannung

$$\tau_{xz} = \frac{4}{3} \frac{Q(x)}{R^2} \left( 1 - \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right)$$

Max. Schubspannung

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{xz}(z=0) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}$$

## Schub vs. Biegung

Kontrolle ob Schub kleiner als Biegung:

$$\frac{h}{4L} \ll 1$$