Numerik

fischal

Version: June 26, 2025

Fehler

absoluter Fehler:

$$|\Delta a| = |\tilde{a} - a|$$

relativer Fehler:

$$\delta_a = \frac{|\tilde{a} - a|}{|a|}$$

$\tilde{a}$ = Geschätzter Wert (anzustrebender Wert)
a = Effektiver Wert

Vektornormen

P-Norm:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

∞-Norm, maximale absolute Zeilensumme

$$\boxed{\|B\|_\infty = \max \sum_{i=1}^{n} |b_{i,k}|}$$

(**Achtung** Betrag des Eintrags der Matrix zur berechnung nehmen)
Bsp.:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \|B\|_\infty = \max\{1+2, 3+4, 5+6\} = 11$$

Bei Vektoren:

$$\|\vec{v}\|_\infty = \max\{v_1, v_2, v_3\}$$

1-Norm, maximale absolute Spaltensumme

$$\boxed{\|B\|_1 = \max \sum_{i=1}^{m} |b_{i,k}|}$$

$$\|B\|_1 = \max\{1+3+5, 2+4+6\} = 12$$

Bei Vektoren:

$$\|\vec{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + |v_3|$$

2-Norm, Spektralnorm

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}}$$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit Eigenwerten } \lambda_{1,2} = 2$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{2}$$

Bei Vektoren:

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2}$$

Eine Norm erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. **Positivität:** $\|x\| > 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
2. **Homogenität:** $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ für jede (reelle bzw. komplexe) Zahl α.
3. **Dreiecksungleichung:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$.

Numerisch Differenzieren

Gegeben: Punkte x_i mit $i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
Funktionswerte $f(x_i)$
Konstanter Abstand zwischen Punkten: $h = x_i - x_{i-1}$

Vorwärtsdifferenz

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \quad \text{Fehlerordnung: } \mathcal{O}(h)$$

Rückwärtsdifferenz

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} \quad \text{Fehlerordnung: } \mathcal{O}(h)$$

Zentraldifferenz

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} \quad \text{Fehlerordnung: } \mathcal{O}(h^2)$$

Einseitige Differenzenformel 3. Ordnung

$$f'(x_i) \approx D_f(x_i, h) = \frac{2f(x_i + h) + 3f(x_i) - 6f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{6h}$$

2. Ableitung – Numerische Differenzen

Vorwärtsdifferenz

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2} \quad \text{Fehlerordnung: } \mathcal{O}(h)$$

Rückwärtsdifferenz

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{h^2} \quad \text{Fehlerordnung: } \mathcal{O}(h)$$

Zentraldifferenz

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} \quad \text{Fehlerordnung: } \mathcal{O}(h^2)$$

Kondition

Konditionszahl

$$\boxed{\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x_0)}{f(x_0)} \right| \approx \kappa_{rel}(x_0) * \left| \frac{(\tilde{x} - x_0)}{x_0} \right|}$$

mit

$$\boxed{\kappa_{rel}(x_0) = \left| f'(x_0) * \frac{x_0}{f(x_0)} \right|}$$

Die Zahl

$$\kappa_{rel}(x_0)$$

heisst **relative Konditionszahl** des Problems f an der stelle x_0 und beschreibt die maximale Verstärkung des relativen Eingabefehlers. Entsprechend bezeichnet man mit

$$\kappa_{abs}(x_0) = |f'(x_0)|$$

die **absolute Konditionsszahl** des Problems f.

Kondition

Mit der relativen / absoluten Kondition eines durch f beschriebenene Problems bezeichnet man das Verhältnis:

$$\boxed{\kappa_{rel} = \frac{\delta_y}{\delta_x}} \qquad \boxed{\kappa_{abs} = \frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X}}$$

Ist ein Mass für die Sensitivität unter Störung der Eingabedaten.

Gleitpunktarithmetik

Bei der Berechnung in z.B. "3-Stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik" wir mit 3 signifikanten Stellen gerechnet. Ergebnisse werden auf 3 signifikante Stellen gerundet.

Zahlendarstellung

Darstellung von dezimalen Zahlen als n-stellige Gleitpunktzahlen:

$$x = m * 10^e$$

m: Mantisse
e: Exponent (Stellenverschiebung)
n: Anzahl der signifikanten Dezimalstellen in der Mantisse

1. normierte Gleitpunktdarstellung (wissenschaftliche Schreibweise)
2. Zählen der Signifikanten Ziffern $(= n)$

Lineare Gleichungen

Allgemein

Eingabe:

$$\vec{b} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow[A*\vec{x}=\vec{b}]{} \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

lineare Abbildung:
Die Kondition der aufgabe ist durch die Konditionsszahl von A gegeben.
Numerisches Verfahren zur Lösung von LGS $\longrightarrow$ DIREKTE Verfahren:

Eingabegrössen: $\vec{b}, A$ **Ausgabe:** $\tilde{\vec{x}} \approx \vec{x}$

Algorithmen zur Lösung von LGS

Spaltenpivotisierung

Das Element a_{ii} muss immer das grösste **(im Betrag)** aller ersten Einträge der Spalten sein. Ist es das nicht, werden die Zeilen untereinander getauscht.

Gauss-Elimination

- gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $b \in \mathbb{R}^n$, wobei $\det(A) \neq 0$
- Für $j = 1, 2 \cdots, n-1$ und falls $a_{j,j}^{(j)} \neq 0$ ist
- für $i = j+1, j+2 \cdots, n$
- subtrahiere (Ab) Zeile j mit Faktor $l_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}}$ von Zeile i

gegeben sei: $A * \vec{x} = \vec{a}$

1. **Eliminationsschritt 1:**

   Pivot-Element: a_{11}

   Skalierungsfaktoren:

   l_{21}(für Zeile 2) $= \frac{a_{21}}{a_{11}}$
   l_{31}(für Zeile 3) $= \frac{a_{31}}{a_{11}}$
   l_{n1}(für Zeile n) $= \frac{a_{n1}}{a_{11}}$

2. **Zeile 2 Z_2 der neuen Matrix $A^{(2)}$**

   Elemente der Zeile 2 $= Z_2$

   $$Z_2' = Z_2 - l_{21} * Z_1$$

3. **Zeile 3 Z_2 der neuen Matrix $A^{(2)}$**

$$Z_3' = Z_3 - l_{31} * Z_1$$

4. **Durch Zeilentausch auf obere Dreiecksform bringen (Matrix R).**
5. **Rückeinsetzen** und nach x_1, x_2, x_3 auflösen

LR-Zerlegung

$$A = L \cdot R$$

Schritt 1:

$$A = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Gauss Verfahren anwenden. L und R Matrix befüllen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

Achtung: Faktoren der L-Matrix immer $\cdot -1$ rechnen.

Schritt 3: Falls nötig: Spaltenpivotisierung → ergibt Permutationsmatrix

$$A \cdot x = b, \qquad P \cdot A = L \cdot R$$
$$L \cdot y = P \cdot b, \qquad R \cdot x = y$$

Dabei ist:

- L ist eine Normierte untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

- R eine obere Dreiecksmatrix mit den Einträgen aus "Gauss-Elimination"

Vorwärtseinsetzen

Das Vorwärtseinsetzen ist eine Methode zum Lösen linearer Gleichungssysteme, wenn die Koeffizientenmatrix L eine **untere Dreiecksmatrix** ist. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen

Das Rückwärtseinsetzen löst ein Gleichungssystem der Form

$$R\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix R:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

LR-Zerlegung mit Skalierung und Spaltenpivotisierung

Idee: Kondition verbessern durch Matrizeneinträge gleicher Grössenordnung

$$P \cdot D \cdot A = L \cdot R$$

P = Permutationsmatrix (Zeilentausch)
D = Diagonalmatrix (Skalierung)
A = Gegebene-/Ausgangsmatrix
L = Linke untere Dreiecksmatrix
R = Rechte obere Dreiecksmatrix

$$D = diag(d_1, d_2, d_n), d_i = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right)^{-1}$$

1 Eliminationsschritt beinhaltet:

1. Pivotisierung
2. LR-Zerlegung mittels Gauss Elimination

Anzahl Eliminationsschritte: mindestens 1, maximal 2 (3×3 Matrix)

Cholesky-Zerlegung

Die **Cholesky-Zerlegung** ist eine Zerlegung für symmetrische, positiv definite Matrizen. Es gilt:

$$A = L \cdot D \cdot L^\top$$

Dabei ist:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix
- $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine untere Dreiecksmatrix
- $L^\top$ die Transponierte von L
- D die Diagonalmatrix:

$$d_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{k,j}^2 \cdot d_{j,j}$$

$$A = L \cdot L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Einträge:
$l_{11} \rightarrow \quad l_{11} \cdot l_{11}$
$l_{21} \rightarrow \quad l_{11} \cdot l_{21}$
$l_{31} \rightarrow \quad l_{11} \cdot l_{31}$
$l_{22} \rightarrow \quad l_{21} \cdot l_{21} + l_{22} \cdot l_{22}$
$l_{32} \rightarrow \quad l_{31} \cdot l_{21} + l_{32} \cdot l_{22}$
$l_{33} \rightarrow \quad l_{31} \cdot l_{31} + l_{32} \cdot l_{32} + l_{33} \cdot l_{33}$

Nach jeweiligem Eintrag auflösen!

Inverse berechnen mit LR zerlegung

$$P \cdot A = L \cdot R$$
$$A = L \cdot R \cdot P^{-1}$$
$$A^{-1} = L^{-1} \cdot R^{-1} \cdot P$$

Lineare Ausgleichsrechnung

Gesucht sei die Ausgleichsgerade durch gegebene Punkte $P(x_i; y_i)$ mit Grundfunktion $y = mx + b$:

Normalengleichungen:

$$\boxed{A^T A\lambda = A^T y}$$

$$\boxed{A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}}$$

$$\lambda = (m, b)^T$$

Steigung m und Y-Achsenabschnitt b

$$\boxed{A^T y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}}$$

⇒ **Gleichungssystem lösen ergibt m und b**

minimale Fehlerquadratsumme:

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{n} (y_i\text{-}mx_i\text{-}b)^2}$$

Gilt nur für die Funktion $m \cdot x + b$
Für andere Funktionen müssen die Einträge in der Matrix A angepasst werden.

Nichtlineare Gleichungen

Numerische Lösung einer Nicht Linearen Gleichung wird unterteilt in Fixpunktproblem und Nullstellenproblem.

Nullstellenproblem (Newton-Iteration)

- Keine gesicherte Konvergenz
- Hohe Konvergenzgeschwindigkeit

$$x_0 \in I \subseteq D_{f1}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Fixpunktproblem (Fixpunktiteration)

Gesucht: Schnittpunkt von 2 Funktionen.
Gegeben: 2 Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$

Schritt 1: Funktion umformen sodass:

$$x = F(x)$$

Schritt 2: Rekursionsformel zur Interation:

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

Schritt 3: Abbruchkriterium:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon \quad (\epsilon \text{ z.B. } 0.0001)$$

Banachscher Fixpunktsatz

Liefert Garantie, dass eine Fixpunktiteration konvergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind.
Bedingung 1: Lipschitz Stetigkeit (Kontraktion)

$$|F(x) - F(y)| \leq K \cdot |x - y|$$
$$|F'(x)| \leq K \leq 1$$

mit K (Verkleinerungsfaktor) im Intervall $(0; 1)$

Dann gibt es genau einen Fixpunkt:

$$x^\star = F(x^\star)$$

a priori Fehlerabschätzung:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1 - K} \cdot |x_1 - x_0|$$

Berechnung benötigter Iterationsschritte mit gegebener Fehlertoleranz f_t:

$$\frac{K^n}{1 - K} \cdot |F(x_0) - x_0| < f_t$$

Auflösen nach n:

$$n > \ln\left(\left|\frac{f_t(1-K)}{F(x_0)-x_0}\right|\right) \cdot \frac{1}{\ln(K)}$$

a posteriori Fehlerabschätzung:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{K}{1-K} \cdot |x_n - x_{n-1}|$$

Bisektionsverfahren (Intervallhalbierungsverfahren)

Das Intervall wird Schrittweise halbiert ⇒ einschachtelung der Nullstelle.
Voraussetzungen: f ist auf dem Intervall $[a,b]$ stetig und hat mindestens **eine Nullstelle.**
Kontrolle: $f(a)$ und $f(b)$ haben **unterschiedliche Vorzeichen.**

Startwert:

$$f(x_0) \quad \text{mit} \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$$

Prüfen:

$$f(a_0)\cdot f(x_0) > 0 \Rightarrow [a_1;b_1] = [x_0;b_0]$$
$$f(a_0)\cdot f(x_0) < 0 \Rightarrow [a_1;b_1] = [a_0;x_0]$$

Für den nächsten Iterationsschritt:

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$$

Solange bis:

$$f(a_0)\cdot f(x_n) = 0 \Rightarrow x_n = \text{Nullstelle}$$

oder **Abbruchkriterien:**

$$|x_k - x^\star| \leq \frac{|b_0-a_0|}{2^{k+1}}$$

mit Fehlertoleranz f_t (bspäls Dezimalzahl):

$$\frac{|b_0-a_0|}{2^{k+1}} < f_t$$

Nach k auflösen für Anzahl Iterationsschritte.

Nichtlineare Gleichungssysteme

Newtonsches Verfahren

Allgemein:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J_f(\vec{x}_n)^{-1} \cdot f(\vec{x}_n)$$

Schritt 1: $J_f(x)$ ist die Jacobi-Matrix der Funktion f:

$$J_f = \begin{pmatrix} -\nabla f_1 - \\ -\nabla f_2 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Gleichungssystem lösen:

$$J_f(k)\cdot \delta_k = -f_k$$

Schritt 3: Iteration addieren:

$$x_{k+1} = x_k + \delta_k$$

Schritt 3: Jacobi-Matrix und f_k Vektor mit x_{k+1} berechnen. Schritte wiederholen.

Vereinfachtes Newton-Verfahren

Jacobi Matrix wird nur einmal ausgerechnet.

Schritte 1: Jacobimatrix der Funktion f bestimmen

Schritt 2: LR Zerlegung der Jacobi Matrix und Gleichungssystem lösen

$$L\cdot R\cdot \delta_k = -f_k$$

$$L\cdot y = -f(x)$$

$$R\cdot \delta_k = y$$

Schritt 3: Iteration addieren

Schritt 4: Vektor f_k wird mit x_{k+1} berechnet. Jacobi Matrix wird **NICHT** aktualisiert.

Nichtlineare Ausgleichsrechnung

Kontrolle, ob Funktion linear:
Funktion muss in der Form $f(x) = \alpha_1\cdot\beta_1(x)+\alpha_2\cdot\beta_2(x)+\ldots+\alpha_n\cdot\beta_n(x)$ vorliegen.

Falls nicht: Transformation → quadrieren/log-/Potenzgesetze.

Lineare Systeme: Direkte berechnung durch $A\cdot\lambda = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1(x_1) & \beta_2(x_1) & \beta_n(x_1) \\ \beta_1(x_2) & \beta_2(x_2) & \beta_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1(x_n) & \beta_2(x_n) & \beta_n(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\lambda} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n)$$

Nicht lineare Systeme: Gauss Newton Verfahren mit Jacobi Matrix.

Gauss-Newton-Verfahren

Ziel: Nichtlineares Kleinste-Quadrate-Problem lösen:

$$\min_{\vec{\lambda}} \sum_{i=1}^{m} \left[f(t_i;\vec{\lambda}) - y_i\right]^2$$

Vorgehen: Iterative Linearisierung des nichtlinearen Modells um $\vec{\lambda}^{(k)}$, Lösung eines linearen Ausgleichsproblems.

Residuenvektor:

$$\vec{F}(\vec{\lambda}) = \begin{bmatrix} f(t_1;\vec{\lambda}) - y_1 \\ \vdots \\ f(t_m;\vec{\lambda}) - y_m \end{bmatrix}$$

Jacobi-Matrix:

$$J_F(\vec{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_2(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_m(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_n} \end{pmatrix}$$

Update-Schritt:

$$\Delta\vec{\lambda} = -\left(J_F^T J_F\right)^{-1} J_F^T \vec{F}(\vec{\lambda}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\lambda}^{(k+1)} = \vec{\lambda}^{(k)} + \Delta\vec{\lambda}$$

Abbruchkriterium:

$$\|\Delta\vec{\lambda}\| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \|\vec{r}\| \text{ minimal}$$

Hinweis: Gute Startwerte notwendig. Bei starker Nichtlinearität oder schlechter Konvergenz → **Levenberg-Marquardt-Verfahren** verwenden.

Interpolation und Quadratur

Lagrange Interpolation

Bsp.: $f(x) = y = \cos(x)$ mit 4 Stützpunkten → $n = 4$

i	0	1	2	3	4
x_i	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Lagrange-Polynom

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

$$\Updownarrow$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$

Beispiel:
Gegeben:

$$(x_0,y_0) = (1,2), \quad (x_1,y_1) = (2,3), \quad (x_2,y_2) = (4,1)$$

Dann ist:

$$p_3(x) = y_0\cdot L_0(x) + y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x)$$

mit:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{-2}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

$$p_3(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 3x - \frac{1}{3}$$

Newton-Côtes-Quadraturformeln, Numerische Integration

Für $n+1$ äquidistante Stützstellen $x_i = a + i\cdot h$, mit $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

Name	m	w_i						
Trapezregel	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
Simpsonregel	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$				
$3/8-$Regel	3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$			
Milneregel	4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$		
	5	$\frac{95}{288}$	$\frac{125}{96}$	$\frac{125}{144}$	$\frac{125}{144}$	$\frac{125}{96}$	$\frac{95}{288}$	
Weddleregel	6	$\frac{41}{140}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{68}{35}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{41}{140}$

Einfache Trapezregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2}\cdot(f(a)+f(b))$$

Zusammengesetzte Trapezregel:

$I = [a,b]$ wird zerlegt in n Teilintervalle der Länge $h = \dfrac{b-a}{n}$

Daraus berechnen sich die Stützstellen:

$$x_0 = a \qquad x_1 = a+h \qquad x_2 = a+2\cdot h \qquad \ldots \qquad x_n = b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right)$$

Einfache Simpsonregel:

$$h=\frac{b-a}{2},\quad m=\frac{a+b}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot f(a)+\frac{4}{3}\cdot f(m)+\frac{1}{3}\cdot f(b)\right)$$

Zusammengesetzte Simpsonregel:

$I=[a,b]$ in n Teilintervalle der Länge $h=\dfrac{b-a}{n}$, $n+1$ muss gerade sein

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{3}f(a)+\frac{4}{3}f(a+h)+\frac{2}{3}f(a+2h)+\ldots+\frac{4}{3}f(b-h)+\frac{1}{3}f(b)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)}_{\text{ungerade } i}+2\underbrace{\sum_{i=2}^{n-2} f(x_i)}_{\text{gerade } i}+f(x_n)\right]$$

Spline-Interpolation

Berechnung mit Momenten (nicht Prüfungrelevant) Gegeben: n Stützpunkte $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$
Gesucht: $n-1$ Splinefunktionen/Intervalle
Benachbarte Punkte werden mittels kubischem Polynom interpoliert.

1. **Intervalllängen berechnen:**
$$h_i = x_{i+1}-x_i$$
2. **Systemmatrix aufstellen für innere Punkte** $i=1,\ldots,n-1$**:**
$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}$$
3. **Randbedingungen (natürlich):**
$$M_0=0,\quad M_n=0$$
Dabei sind M_i die gesuchten 2. Ableitungen $S''(x_i)$
4. **Splinefunktionen ausrechnen:**
$$S_i(x)=\frac{M_{i+1}(x-x_i)^3+M_i(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+\left(\frac{y_{i+1}}{h_i}-\frac{M_{i+1}h_i}{6}\right)(x-x_i)$$
$$+\left(\frac{y_i}{h_i}-\frac{M_ih_i}{6}\right)(x_{i+1}-x)$$

Spline-Interpolation mit Kubischem Ansatz (Verständnis-Prüfungrelevant)

gegeben:

x_i mit $i=0,1,2,3\ldots$
$f(x_i)$

Bei n gegebenen Punkten suchen wir $n-1$ Splinefunktionen.
Je zwei benachbarte Punkte werden durch werden durch ein kubisches Polynom interpoliert.

1. $S_i(x)$ und deren Ableitungen aufstellen mit Koeffizienten a_i bis d_i (beginnend bei 0)
$$S_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i$$
$$S_i'(x)=3a_ix^2+2b_ix+c_i$$
$$S_i''(x)=6a_ix+2b_i$$
2. **Interpolationsbedingungen:**
$$S_i(x_i)=y_i$$
$$S_i(x_{i+1})=y_{i+1}$$
3. **Stetigkeitsbedingungen:**
$$S_i'(x_{i+1})=S_{i+1}'(x_{i+1})$$
$$S_i''(x_{i+1})=S_{i+1}''(x_{i+1})$$
4. **Randbedingungen:**
   - Typ 1: keine Krümmung an Intervallenden: (natürliche Splinefunktionen)
   $S_0''(x_0)=0$
   $S_n''(x_n)=0$
   - Typ 2: periodische Kubische splines:
   $S_1'(x_0)=S_n'(x_n)$ und $S_1''(x_0)=S_n''(x_n)$
   - Typ 3: clamped Splines oder Hermite (vollständige) kubische Splines:
   $S_1'(x_0)=q_a$ und $S_n'(x_n)=q_b$
   $q_a=f'(x_0)$ und $q_b=f'(x_n)$

Bei n gegeben Messpunkten $(x_0$ bis $x_n)$ gibt es $(n-1)$ Splinefunktionen und damit $4\cdot(n-1)$ Gleichungen für die Unbekannten.

Anfangswertprobleme

Problemstellung:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=f(x,y(x)),\quad y(0)=y_0$$

Gesucht:

$y(x)$ für $x\in I=[a;b]$ in k Schritten

Explizites Euler-Verfahren

Ordnung: $\mathcal{O}(h)$

$$h=\frac{b-a}{k}$$

$$y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k;y_k)$$

oder

$$r_1=f(x_k,\,y_k)=f(x_k+0\cdot h,\,y_k+0\cdot h)$$
$$y_{k+1}=y_k+1\cdot h\cdot r_1$$

Stufe $s=1$

0	0
	1

Vorgehen k-mal wiederholen

Stabilitätskriterium des Expliziten Euler Verfahrens

Durch die Eigenwerte λ_i der Jacobimatrix J_f des Gleichungssystems können wir folgende Stabilitätskriterien für das Explizite Euler Verfahren herleiten:

$$h_{krit}<\frac{2}{\max|\lambda_i|}\qquad\text{für}\qquad\lambda_i\in\mathbb{R}$$

$$h_{krit}<\min\left[\frac{2\cdot|Re(\lambda_i)|}{|\lambda_i|^2}\right]\qquad\text{für}\qquad\lambda_i\in\mathbb{C}$$

Implizites Euler-Verfahren

Ordnung: $\mathcal{O}(h)$

$$h=\frac{b-a}{k}$$

$$y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_{k+1},y_{k+1})$$

oder

$$r_1=f(x_k+h,\,y_{k+1})=f(x_k+1\cdot h,\,y_k+1\cdot h\cdot r_1)$$
$$y_{k+1}=y_k+1\cdot h\cdot r_1$$

Stufe $s=1$

1	1
	1

Vorgehen k-mal wiederholen

Runge-Kutta Verfahren

Verwendung einer Linearkombination von S Steigungswerten.

Verfahren von Runge

Explizit und konvergent von Ordnung 2.
Ordnung: $\mathcal{O}(h^2)$

$$r_1=f(x_k,y_k)$$
$$r_2=f\left(x_k+\frac{1}{2}h,\;y_k+\frac{1}{2}h\cdot r_1\right)$$
$$y_{k+1}=y_k+h\cdot r_2$$

Stufe $s=2$

0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	1

Klassisches Runge-Kutta Verfahren

Ordnung: $\mathcal{O}(h^4)$

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- A ist immer Dreiecksmatrix
- Wenn $a_{jj}=0$, so ist RKV explizit
- $$\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$$

$$r_1=f(x_k,y_k)$$
$$r_2=f\left(x_k+\frac{h}{2},\;y_k+\frac{h}{2}r_1\right)$$
$$r_3=f\left(x_k+\frac{h}{2},\;y_k+\frac{h}{2}r_2\right)$$
$$r_4=f(x_k+1h,\;y_k+1hr_3)$$
$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}(r_1+2r_2+2r_3+r_4)$$

Butcher Tableau

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{c}&\mathbf{A}\\\hline&\mathbf{b}^T\end{array}\right)\quad\text{respektive}\quad\left(\begin{array}{c|ccc}c_1&a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1s}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_s&a_{s1}&a_{s2}&\ldots&a_{ss}\\\hline&b_1&b_2&\ldots&b_s\end{array}\right)$$

Analysis und Algebra

Transponierte einer Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Die Transponierte A^{T} ergibt sich durch Vertauschen der Zeilen und Spalten:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Inverse einer 2 x 2 Matrix

Gegeben sei:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Die Inverse (falls sie existiert) berechnet sich durch:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

mit:

$$\det A = ad - bc \neq 0$$

Hinweis: Die Inverse existiert nur, wenn die Determinante ungleich Null ist.

Additionstheoreme (Trigonometrie)

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

Ableitungsregeln (Grundfunktionen)

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$
$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$
$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \quad (a > 0)$$
$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Integrationsregeln (Grundfunktionen)

$$\int c \, dx = cx + C$$
$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$
$$\int e^x \, dx = e^x + C$$
$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0)$$
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(u) \, du \quad \text{mit } u = g(x)$$

Additionstheoreme (Trigonometrie)

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$