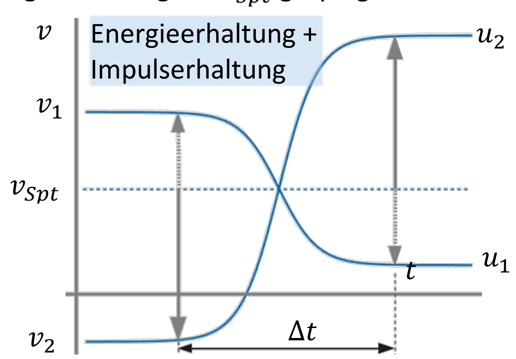
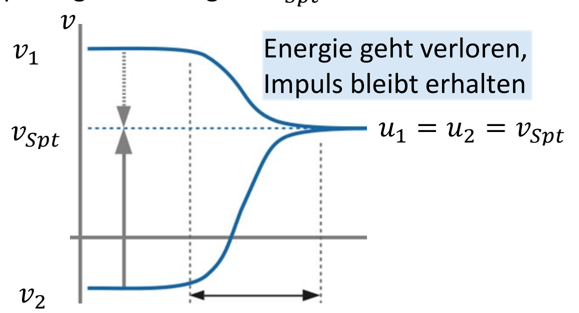
Datum	Themen		Begriffe / Formeln		
2022 W1: 21.2.	**Basics (Repetition)** • Bezugssysteme und Masseinheiten • Rechnen mit Vektoren: Skalarprodukt und Vektorprodukt • Rechnen mit Kurven: Ableitung und Integral **Kinematik** • $\vec{r} \leftrightarrow \vec{v} \leftrightarrow \vec{a}$ • Schnelligkeit $v = \lvert\vec{v}\rvert$ • Kreisbewegung W2: 28.2. → Installation/Einführung Unity	Zeit t in Sekunden s Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in Meter m Oft ist der Ortsvektor von der Zeit abhängig. Dann heisst $\vec{r}(t)$ Trajektorie oder Bahnkurve (englisch Orbit) Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ Beschleunigung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ in $\frac{m}{s^2}$	Ableitungen: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ Diskrete Welt Differenzenquotienten: $\bar{v}_x = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}$ $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$	Integrale (↔ kontinuierliche Welt): $\vec{r}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) \cdot dt$ $\vec{v}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) \cdot dt$ Kontinuierliche Welt Summen: $s = \sum_{i=1}^{k} v_{xi} \cdot \Delta t_i$ oft mit fixem Zeitschritt $\Delta t_i = \Delta t_j = \Delta t$	**Beispiele:** • **Federpendel** (→ harmonischer Oszillator) • **Beschleunigung mit konstanter Kraft** ↔ $\begin{cases} a_x = F_x/m \\ v_x = a_{x0} \cdot t + v_{x0} \\ r_x = \frac{a_{x0}}{2} \cdot t^2 + v_{x0} \cdot t + r_{x0} \end{cases}$ • **Auto beschleunigt/bremst** • **Kolben** • **Freier Fall** (=Beschleunigung mit konstanter Kraft, siehe oben) • **Schiefer Wurf** → Parabel • Bei einer **Kreisbewegung** mit Schnelligkeit v und Radius R gilt: Drehwinkel $\phi = \omega \cdot t$ mit $\omega = v/R$. Eine Kraft ins Zentrum (=Zentripetalkraft) $F_z = m\, v^2/R$ hält das Objekt mit Masse m auf der Kreisbahn. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$ • **Karussell** • **Velofahrer** • **Flugzeug fliegt Looping** • **Kiste schieben** • **Lokomotive**
W3: 7.3.	**Dynamik der Translation** • Kraft $\vec{F}$ in Newton N • Impuls $\vec{p}$ in Ns • Kräfte freischneiden • Integrieren und Ableiten in der diskreten Welt (Unity) • Kreisbewegung	**Newton:** $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ Reaktionsgesetz «actio = reactio»	Abtastrate bei einem fixen Zeitschritt Δt: $f_{sample} = \frac{1}{\Delta t}$ mit der Einheit Hertz Hz Periode T in s, Frequenz $f = 1/T$ in Hz und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ in s^{-1}		**Schwerpunkt** $\vec{r}_S$ (* Spezialfall für Punktmassen): $\vec{r}_S = \frac{1}{M} \iiint_K \vec{r}\ \rho(\vec{r})\ dV \overset{*}{=} \frac{1}{M} \sum_i r_i \cdot m_i$
W4: 14.3. W5: 21.3.	**Kräfte** • Gravitation • Anziehung zwischen Ladungen • Federgesetz • Reibung • Nicht-konservative und konservative Kräfte	**Gravitationsgesetz:** $\vec{F} = G\, \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\, \vec{e}_{12}$ Kraft von Masse m_1 auf Masse m_2 mit Abstand r. Gravitationskonstante $G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg{\cdot}s^2)}$ Auf Erdoberfläche: Erdbeschleunigung $g = G \cdot M_{Erde}/R_{Erde}^2 = 9.81\ m/s^2$	**Coulombsches Gesetz:** $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\, \vec{e}_{12}$ Kraft von Ladung q_1 auf Ladung q_2 mit Abstand r. Elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/(Vm)}$	**Federgesetz**: $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$ mit Federkonstante k in $\mathrm{N/m}$ **Harmonischer Oszillator:** $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$ mit Sinus/Cosinus als mögliche Lösungen: $x(t) = \sin(2\pi f t)$ oder $x(t) = \cos(2\pi f t)$, mit Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	**Trockene Reibung**: $\vec{F}_R = -\mu \cdot F_N \cdot \vec{e}_v$ proportional zur Normalkraft (auf einer Bahn mit Neigung α: Normalkraft $F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$), Reibungskoeffizient μ. Die Richtung $\vec{e}_v$ ist entgegengesetzt zur Geschwindigkeit (Gleitreibung) oder zu angreifenden Kraft (Haftreibung). **Laminare viskose Reibung** für eine Kugel: $\vec{F}_R = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \vec{e}_v$ mit Viskosität η (z.B. Öl ≈ 0,1 Pa · s), Kugelradius r, Geschwindigkeit $\vec{v}$ **Turbulente viskose Reibung**: $\vec{F}_R = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot c_w \cdot \lvert\vec{v}\rvert^2 \cdot \vec{e}_v$ mit Dichte der Luft (bei 20°C) $\rho \approx 1.2\ \mathrm{kg/m^2}$, Stirnfläche A, Widerstandsbeiwert c_w (Kugel ≈ 0,45) und Geschwindigkeit $\vec{v}$
W6: 28.3. W7: 4.4.	**Stösse und Impuls** Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ Drehimpuls $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ Video → Tipps und Tricks zum Integrieren	**Impulserhaltung:** Der Gesamtimpuls eines mechanischen Systems bleibt erhalten, wenn sich die Kräfte, die auf das System wirken, gerade aufheben (d.h. wenn in Summe keine äusseren Kräfte wirken) → *Vorher-Nachher-Analyse* zur Beschreibung von Stossprozessen besonders geeignet für den Fall wenn keine äusseren Kräfte wirken	**Kraftstoss** → Änderung von Impuls und Drehimpuls $\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot dt \overset{*}{=} \vec{F} \cdot \Delta t$ $\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t) \cdot dt \overset{*}{=} \vec{M} \cdot \Delta t$	**Zwei Körper, zentraler elastischer Stoss:** Die Geschwindigkeiten der Stosspartner werden an der Schwerpunktgeschwindigkeit v_{Spt} gespiegelt. 	**Zwei Körper, zentraler inelastischer Stoss** Die Körper kleben zusammen und bewegen sich danach mit der Schwerpunktgeschwindigkeit v_{Spt} 

W8: 11.4.

(W9) (Ostern)

(W10) (Sechseläuten)

Arbeit W (=Kraft mal Weg)
Energie E (=geleistete Arbeit)
...beide mit Einheit Joule J oder Kilowattstunde kWh

Leistung (=Arbeit pro Zeit)

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \leftrightarrow \quad W = \int P\, dt$$

...mit Einheit Watt W

Energieerhaltung:

Energie kann zwischen verschiedenen Energieformen umgewandelt werden, aber in einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aller Energien erhalten.

→ *Vorher-Nachher-Analyse* zur Beschreibung von Stossprozessen besonders geeignet für energieerhaltende Systeme

Arbeit über ein kurzes Wegstücklein $d\vec{x}$:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Arbeit entlang des Weges Γ von a nach b

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{x} \overset{*}{=} F \cdot \ell$$

Zwischen kinetischer Energie, potenzieller Energie und Spannungsenergie in der Feder kann die Energie

- Die **kinetische Energie** setzt sich bei starren Körpern zusammen aus **Translations- und Rotationsenergie:** $E_{\text{kin}} = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$
- **Potenzielle Energie:** $E_{\text{pot}} = mgh$ mit h=Höhendifferenz
- **Spannenergie in einer Feder:** $E_{\text{spann}} = \frac{1}{2}ks^2$ mit s=Auslenkung aus der Ruhelage
- **Energieverlust in der Reibungsarbeit:** $E_{\text{reib}} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{*}{=} F_{\text{reib}} \cdot \ell$
- **Wärmeenergie** $E_{\text{therm}} = c\, m\, \Delta\vartheta$ mit Wärmekapazität c in J/K und Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ in Kelvin K
- **Chemisch gebundene Energie** $E_{\text{chem}} = m \cdot H$ mit H=Heizwert in J/kg

Beispiele:
- Leistung P eines Fahrzeugs gegen eine bremsende Kraft: $P = F_{Brems} \cdot v$
- Pendel

W11: 2.5.

W12: 9.5

W13: 16.5.

W14: 23.5.

Dynamik der Rotation

- Freiheitsgrade starrer Körper
- $\vec{\phi} \leftrightarrow \vec{\omega} \leftrightarrow \vec{\alpha}$
- Umrechnung rad zu °

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

Kreissegment $s = \phi \cdot R$ wenn ϕ in Einheit rad und R = Kreisradius

Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ in der Einheit Newton · Meter = Nm. Mit Skizze auch skalar: $M = r_\perp F$

Drehimpuls $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$ in Einheit Newton · Meter · Sekunde = N m s. Betragsmässig $L = r_\perp p$

Newton für Rotationsbewegung:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$$

Drehwinkel $\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{\phi} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega}(t) \cdot dt$

Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$ $\qquad \vec{\omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\alpha}(t) \cdot dt$

Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Trägheitsmoment J (* Spezialfall für Punktmassen) für eine gewählt Drehachse und mit Einheit kg m^2

$$J = \iiint_K r_\perp^2\ \rho(\vec{r})\, dV \overset{*}{=} \sum_i r_{\perp i}^2 \cdot m_i$$

$r_\perp$ = kürzester Abstand zur Drehachse

Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}$: Im allgemeinen Fall ist der Drehimpuls $\vec{L}$ nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. In diesem Fall wird aus der skalaren Grösse J ein Tensor $\mathbf{\Theta}$ (eine 3×3-Matrix).

Satz von Steiner: Wenn das Trägheitsmoment J_1 für eine Drehachse gegeben ist, dann berechnet man das Trägheitsmoment J_2 für eine parallele Drehachse im Abstand d gemäss $J_2 = J_1 + m \cdot d^2$

Beispiele:
- Looping mit Fahrzeug oder rollender Kugel
- Fadenspule
- Curling
- Billard

Naturkonstanten

Gravitationskonstante	$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$
Vakuumlichtgeschwindigkeit	$c_0 = 2.9979 \cdot 10^8\ \text{m/s}$

Allgemeine Formeln und Konstanten:

Kugelvolumen	$V_{\text{Kugel}} = 4\pi r^3/3$
Kugeloberfläche	$A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$
Kreisumfang	$U_{\text{Kreis}} = 2\pi r$
Kreisfläche	$A_{\text{Kreis}} = \pi r^2$
Erdradius	$R_{\text{Erde}} = 6371$ km
Erdmasse	$M_{\text{Erde}} = 5.972 \cdot 10^{24}$ kg

Funktion $f(x)$	**Stammfunktion** $F(x)$
x^n	$\begin{cases} \frac{1}{n+1}x^{n+1} & \text{wenn } n \neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert & \text{wenn } n = 1 \end{cases}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x
e^{-x^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}(x)$

Häufiger Spezialfall: falls Funktion f *nicht* von x abhängig ist darf man «f vors Integral ziehen»

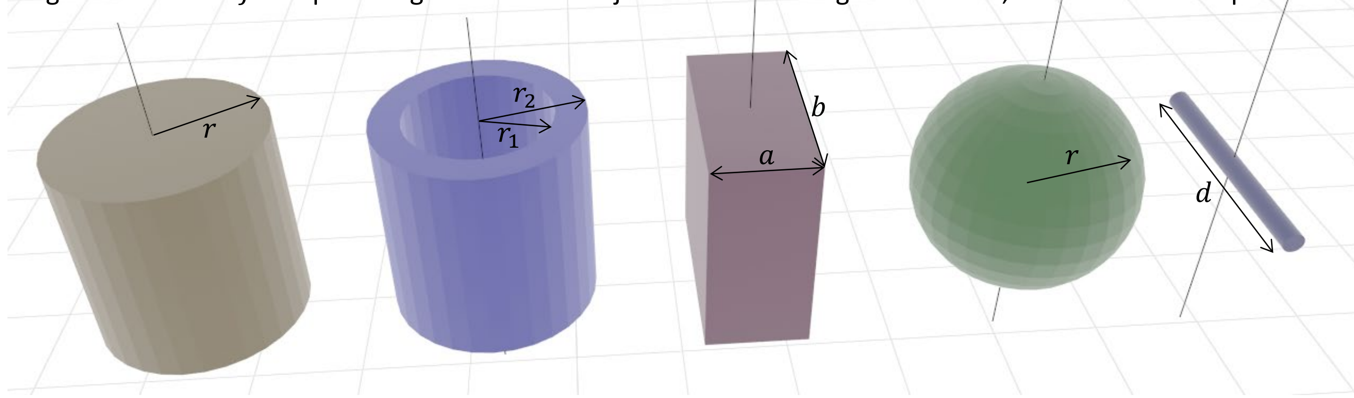
$$\int_{x_1}^{x_2} f \cdot dx = f \int_{x_1}^{x_2} dx = f \cdot (x_2 - x_1)$$

Skalarprodukt: $r = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Vektorprodukt: $\vec{r} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$

Einheitsvektor $\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Trägheitsmomente J für spezielle geometrische Objekte. Drehachsen gemäss Skizze, durch den Schwerpunkt.



Vollzylinder	Hohlzylinder	Quader	Kugel	Stab
$J = \frac{1}{2}mr^2$	$J = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$	$J = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	$J = \frac{2}{5}mr^2$	$J = \frac{1}{12}md^2$