Fluid- und Thermodynamik 3

Fabian Starc

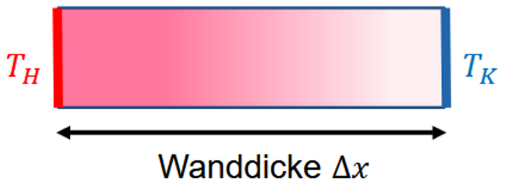
Version: July 17, 2025

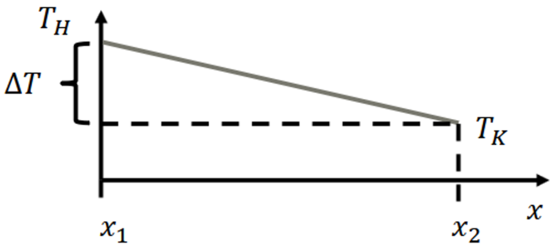
Wärmeleitung

Wärmeleitung in Dickenrichtung einer ebenen Platte. Aufgrund der Temperaturdifferenz zwischen innen und aussen entsteht ein **Wärmestrom** $\dot{Q}$ $[W]$ mit **Wärmestromdichte** $\dot{q}$ $[\frac{W}{m^2}]$

$$\boxed{\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda \cdot \frac{T_K - T_H}{x_2 - x_1}}$$

λ: **Wärmeleitfähigkeit** in $[\frac{W}{mK}]$
(gross = schlechter Isolator, klein = guter Isolator)





Wenn die Stelle x in der Wand gesucht ist an der eine Temperatur T erreicht ist:

$$\boxed{\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{T - T_H}{x} \Longleftrightarrow \dot{Q} = -\lambda A \frac{T - T_H}{x}}$$

$$\boxed{\frac{\vartheta(x) - \vartheta(x_1)}{x - x_1} = \frac{\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Wärmestromdichtevektor

$$\boxed{\vec{\dot{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \frac{\Delta T}{\Delta x} \\ \frac{\Delta T}{\Delta y} \end{pmatrix}}$$

allgemeiner Fall:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Fouriersches Gesetz

eindimensionaler Fall:

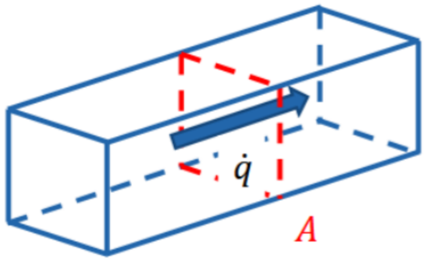
$$\boxed{\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}}$$

dreidimensionaler Fall:

$$\boxed{\vec{\dot{q}} = -\lambda \nabla T = -\lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

Wenn ∇T räumlich konstant und $\vec{A}$ eine Ebene ist, berechnet sich der Wärmestrom $\dot{Q}$ in $[W]$:

$$\boxed{\dot{Q} = -\lambda \vec{A} \cdot \nabla T}$$



Wärmestrom

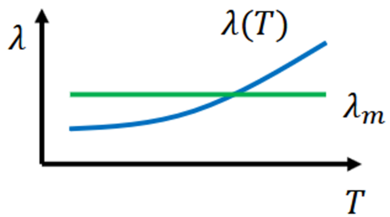
Ist der Wärmestrom variabel oder $\vec{A}$ keine Ebene so wird integriert gemäss:

$$\boxed{\dot{Q} = \int_A \vec{\dot{q}} d\vec{A} = \int_A -\lambda \cdot \nabla T \cdot d\vec{A}}$$

Variable Wärmeleitfähigkeit

Wird mit einer mittleren Wärmeleitfähigkeit gearbeitet, so lässt sich dies ausdrücken als:

$$\dot{q} = -\lambda_m \nabla T \Leftrightarrow \lambda_m = -\frac{\dot{q}}{\nabla T}$$



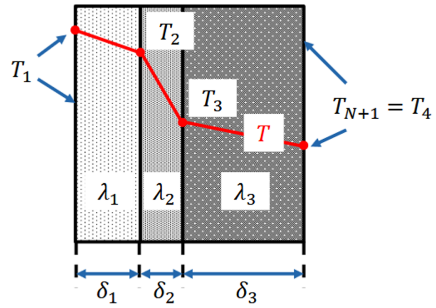
im 1D-Fall:

$$\dot{q} = -\lambda(T) \frac{dT}{dx}$$

Temperaturverlauf erhält man aus:

$$\int_0^x \dot{q} dx = -\int_{T_k}^T \lambda(T) dT$$

Ebene Platte



Kopplungsbedingungen:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{\delta_1} A(T_1 - T_2) = \frac{\lambda_2}{\delta_2} A(T_2 - T_3) = \frac{\lambda_3}{\delta_3} A(T_3 - T_4)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} * A(T_1 - T_4)$$

allgemein:

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{A(T_1 - T_{N-1})}{\sum_{n=1}^N \frac{\delta_n}{\lambda_n}}}$$

k: **Wärmedurchgangskoeffizient** in $[\frac{W}{m^2 K}]$

$$\boxed{k = \frac{1}{\sum_{n=1}^N \frac{\delta_n}{\lambda_n}} \Rightarrow \dot{Q} = kA\Delta T}$$

R: **Wärmewiderstand** $[\frac{K}{W}]$

$$\boxed{R = \frac{1}{kA} = \frac{|\Delta T|}{\dot{Q}} \Rightarrow \dot{Q} = \frac{\Delta T}{R}}$$

für N hintereinandergeschaltete Wände:

$$\boxed{R_{ges} = \frac{T_1 - T_{N-1}}{\dot{Q}} = \frac{1}{A} \sum_{n=1}^N \frac{\delta_n}{\lambda_n} = \frac{1}{kA}}$$

Zusammenfassend

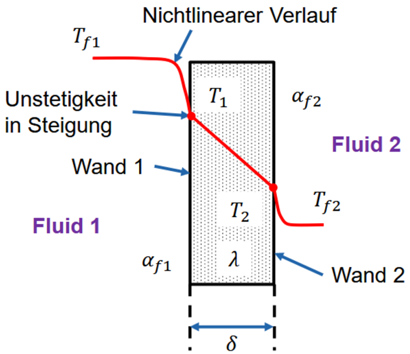
$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\sum_n R_n} \quad \dot{q} = \frac{T_1 - T_{N+1}}{A \sum_n R_n}$$

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_{N+1})}{R_{ges}} \quad \dot{q} = \frac{(T_1 - T_{N+1})}{A R_{ges}}$$

$$\dot{Q} = kA(T_1 - T_{N+1}) \quad \dot{q} = k(T_1 - T_{N+1})$$

Einschichtige Ebene

α: **Wärmeübergangskoeffizient** in $[\frac{W}{m^2K}]$



für die Wärmestromdichte gilt:

$$\dot{q} = \alpha_{f1}(T_{f1} - T_1)$$

für die Platte gilt weiterhin:

$$\dot{q} = \alpha(T_1 - T_2) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\delta}$$

thermische Kopplungsbedingungen:

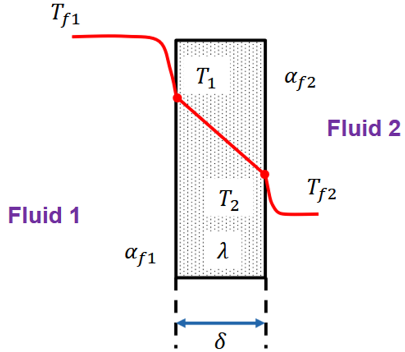
$$\dot{Q} = A\alpha_{f_1}(T_{f_1} - T_1) \qquad \dot{Q} = A\alpha_{f_2}(T_2 - T_{f_2})$$

$$\dot{Q} = A\frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_2) \qquad \dot{Q} = kA(T_{f_1} - T_2)$$

daraus der Gesamtwärmewiderstand:

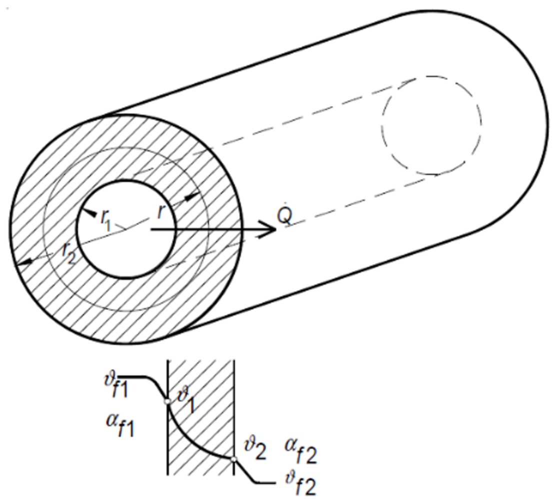
$$\boxed{R_{ges} = \frac{1}{A}\underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_{f_1}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{f_2}}\right)}_{=\frac{1}{k}} = \frac{1}{A}\underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_{f_1}} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_{f_2}}\right)}_{=\frac{1}{k}}}$$

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{ges}} = kA(T_{f1} - T_{f2})}$$



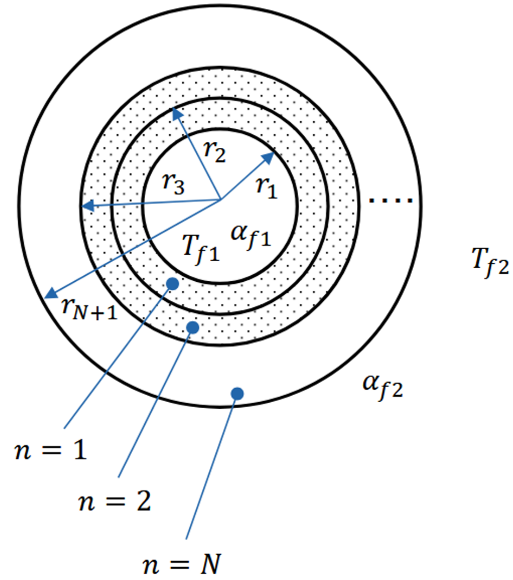
Wärmeleitung in Zylindern

Wärmeleitung in Zylindern EINSCHICHTIG:



auf die **Aussenfläche** bezogener Wärmedurchgangskoeffizient:

$$\boxed{\frac{1}{k} = \frac{d_2}{d_1}\frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_2\ln(d_2/d_1)}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha_{f2}}}$$



Wärmeleitung in Zylindern MEHRSCHICHTIG:

- Der Zylinder besteht aus N Schichten mit $N+1$ Wänden/ Schichttrennungen. $n = 1$ ist stets die innerste Schicht.
- Das Fluid im Zylinder hat die Temperatur T_{f1}, das Fluid in der Umgebung T_{f2}
- Im Zylinderinneren ist die Wärmeübergangszahl α_{f1}, an der Aussenwand α_{f2}

$$\boxed{\frac{1}{k} = \frac{d_{N+1}}{d_1}\cdot\frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^{N}\frac{d_{N+1}}{2\lambda_i}\ln\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right) + \frac{1}{\alpha_{f2}}}$$

einzelne **Wärmeübergangszahlen**:

$$\alpha_{Wa,i} = \frac{2\lambda}{d_{N+1}\ln(\frac{d_{i+1}}{d_i})}$$

für die **Temperaturdifferenzen** gilt:

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{N+1}}{d_1}\cdot\frac{k}{\alpha_{f1}}$$

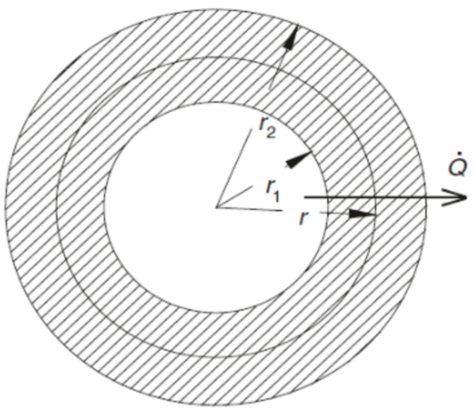
$$\frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{Wa,i}}$$

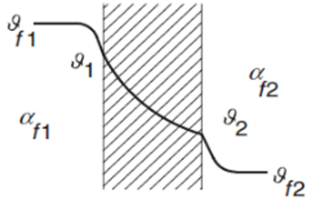
$$\frac{\vartheta_{N+1} - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}}$$

Der Wärmeverlust pro Lauflänge lässt sich rechnen durch:

$$\boxed{\frac{\dot{Q}}{L} = k\pi D(\vartheta_i - \vartheta_a)}$$

Wärmeleitung in Kugeln





Wärmeleitung in der Kugel EINSCHICHTIG:
mit bekannten Fluidtemperaturen: (auf die **Aussenfläche** bezogener Wärmedurchgangskoeffizient)

$$\boxed{\frac{1}{k} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{1}{\alpha_{Wa}} + \frac{1}{\alpha_{f2}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{k} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_2\left(\frac{d_2}{d_1} - 1\right)}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha_{f2}}}$$

Wärmeleitung in der Kugel MEHRSCHICHTIG:

$$\boxed{\frac{1}{k} = \left(\frac{d_{N+1}}{d_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{d_{N+1}^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right) + \frac{1}{\alpha_{f2}}}$$

Die einzelnen Wärmeübergangszahlen:

$$\alpha_{Wa,i} = \frac{2\lambda}{d_{N+1}^2\left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right)}$$

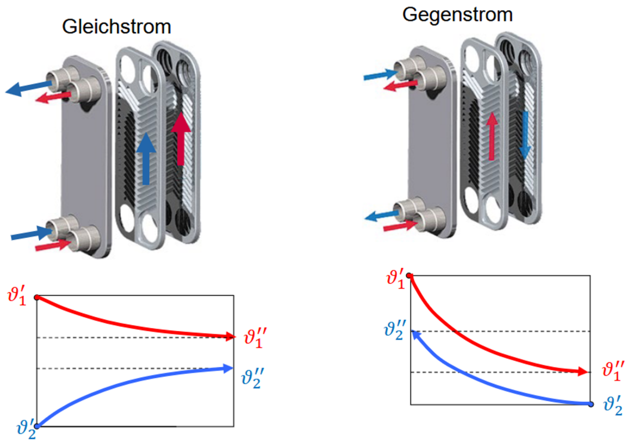
Für die Temperaturdifferenzen gilt dann:

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \left(\frac{d_{N+1}}{d_1}\right)^2 \cdot \frac{k}{\alpha_{f1}}$$

$$\frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{Wa,i}}$$

$$\frac{\vartheta_{N+1} - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}}$$

Wärmeübertrager



Konventionen:

- Eingangsgrössen: '
- Ausgangsgrössen: "
- Fluid 1 kühlt sich ab: $\vartheta_1'' < \vartheta_1'$
- Fluid 2 erwärmt sich: $\vartheta_2'' > \vartheta_2'$

Nachrechnung durch Betriebscharakteristik:

gegeben:

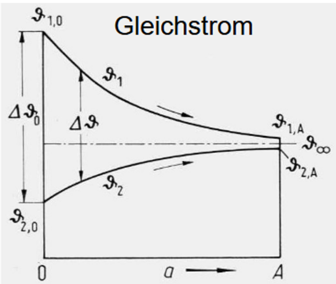
- Eintrittstemperaturen
- Massenströme
- Medien
- Geometrie

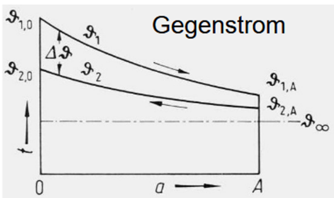
gesucht:

- Austrittstemperatur

Mittlere logarithmische Temperaturdifferenz

$$\boxed{\dot{Q} = kA\Delta\vartheta_m = kA\frac{\Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl}}{\ln\frac{\Delta\vartheta_{gr}}{\Delta\vartheta_{kl}}}}$$





NTU-Methode

dimensionslose Kennzahlen:

dimensionslose Temperaturänderung:

$$P_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} \qquad P_2 = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}$$

$$P_1 = \frac{1 - \exp(-NTU_1(1 + R_1))}{1 + R_1}$$

$$P_2 = \frac{1 - \exp(-NTU_2(1 + R_2))}{1 + R_2}$$

dimensionslose mittlere Temperaturdifferenz:

$$\Theta = \frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}$$

$$\Theta = \frac{\text{Mittlere logarithmische Temperaturdifferenz}}{\text{maximale Temperaturdifferenz im System}}$$

Anzahl der Übergangseinheiten (Number of Transfer Units):

$$NTU_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\Delta\vartheta_m} = \frac{kA}{\dot{W}_1}$$

$$NTU_2 = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\Delta\vartheta_m} = \frac{kA}{\dot{W}_2}$$

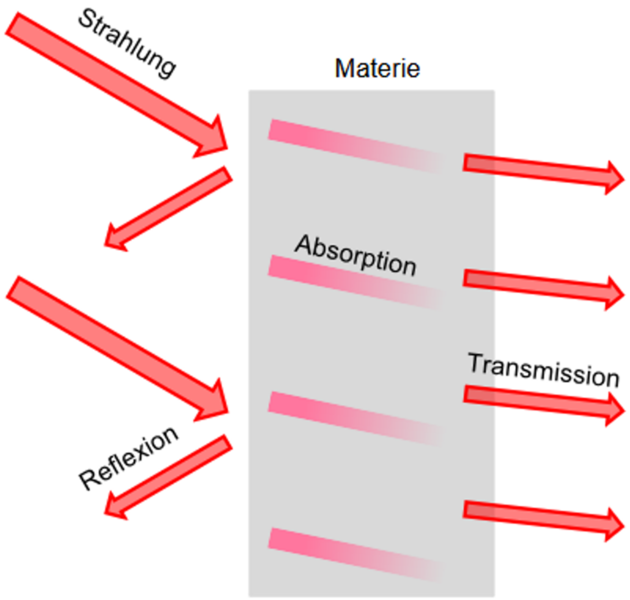
$$\dot{W} = \dot{m} \cdot c_p$$

Wärmekapazitätsstromverhältnis:

$$R_1 = \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} = \frac{1}{R_2}$$

Wärmestrahlung

Strahlung wird beschrieben durch die Wellenlänge λ in $[m]$ und die Frequenz f oder ν in $[\frac{1}{s}]$



Absorption:
Elektromagnetische Strahlungsleistung wird in die innere Energie umgewandelt.
Absorptionskoeffizient α.
Transmission:
Elektromagnetische Strahlung tritt durch den Körper durch ohne mit ihm zu interagieren.
Transmissionskoeffizient τ
Reflexion:
Elektromagnetische Strahlung wird reflektiert.
Reflexionskoeffizient ρ

Strahlungsleistung:

$$\boxed{\dot{Q}_s = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4}$$

ε: Emissionskoeffizient $[-]$
σ: Stefan-Boltzmann-Konstante $[\frac{W}{m^2K^4}]$
$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} W/m^2K^4$
T: Temperatur $[K]$
A: Fläche $[m^2]$

Die Übertragung der Energie erfolgt über Photonen (Teilchen!) von denen jedes die diskrete Energie:

$$E_{Photon} = h \cdot \nu$$

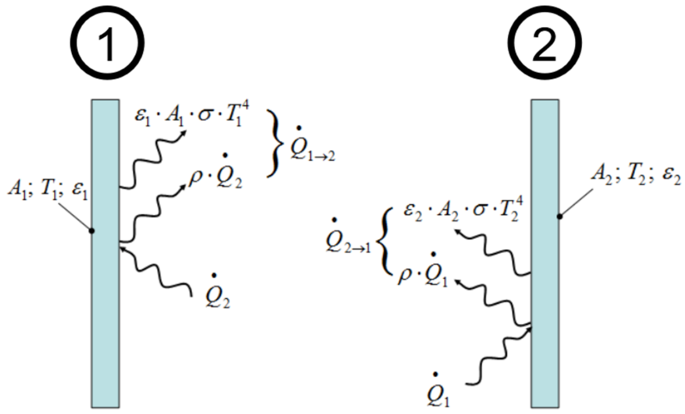
$h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$

Strahldichte:

$$\boxed{L = \frac{\partial^2 \dot{Q}_s}{\cos(\varphi) \partial A \partial \Omega} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial \Omega}}$$

$L[\frac{W}{m^2 \cdot sr}]$

Beispiel



$$\dot{Q}_{1\to 2} = A_1 \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1-\varepsilon_1)\dot{Q}_{2\to 1}$$

$$\dot{Q}_{2\to 1} = A_2 \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1-\varepsilon_2)\dot{Q}_{1\to 2}$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{1\to 2} - \dot{Q}_{2\to 1}$$

$$\boxed{\dot{Q}_s = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} = A \cdot C_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4)}$$

Strahlungsaustauschzahl:

$$C_{12} = \frac{\sigma}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$$

Für Zylinder und Kugeln:

$$\boxed{\dot{Q}_s = \frac{A_1 \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = A_1 \cdot C_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4)}$$

mit:

$$C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

Das **Stahlungsgleichgewicht** muss gelten:

$$\boxed{\dot{Q} = \dot{Q}_s + \dot{Q}_{konv}}$$

$$\dot{Q}_{konv} = \alpha_{konv} \cdot A \cdot (T_1 - T_L)$$

instationäre Wärmeleitung

unter Annahme konstanter Stoffwerte ergibt sich die eindimensionale instationäre **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

mit der **Temperaturleitfähigkeit:**

$$a = \frac{\lambda}{\varrho \cdot c_{(p)}}$$

im dreidimensionalen Fall:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T}$$

typische Wärmeleitfähigkeiten je nach Stoff:

Material	$a\,[10^{-6}\frac{m^2}{s}]$
Kupfer	117
Aluminium	99
Eisen	23
Luft	20
Glas, Beton	0.5
Holz	0.1
Kunststoffe	0.1 - 0.2
Wasser	0.15

Wird die volumetrische Heiz- bzw. Kühlleistung beispielsweise in $\dot{\dot{Q}}[\frac{W}{m^3}]$ so lässt sich der Quellterm S_Q schreiben als

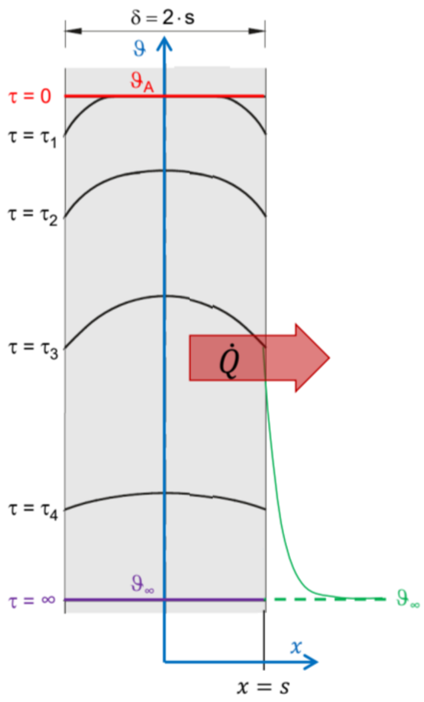
$$S_Q = \frac{\dot{\dot{Q}}}{\varrho c}$$

Wärmeleitungsgleichung wird zu:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{\dot{\dot{Q}}}{\varrho c}}$$

bei nicht konstanter Wärmeleitfähigkeit:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(a \nabla T) + \frac{\dot{\dot{Q}}}{\varrho c}}$$



$\delta = 2s \qquad \vartheta_\infty < \vartheta_A \qquad \vartheta_A = \vartheta(t=0)$

gesucht: $\vartheta(x, \tau)$

notwengige Kennzahlen:

$$\Theta = \frac{\vartheta - \vartheta_\infty}{\vartheta_A - \vartheta_\infty} \qquad \bar{\Theta} = \frac{\bar{\vartheta} - \vartheta_\infty}{\vartheta_A - \vartheta_\infty}$$

$$\Theta_m = \frac{\vartheta_m - \vartheta_\infty}{\vartheta_A - \vartheta_\infty} \qquad \Theta_O = \frac{\vartheta_O - \vartheta_\infty}{\vartheta_A - \vartheta_\infty}$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot s}{\lambda}$$

$$Fo = \frac{a \cdot t}{s^2}$$

Θ_m: **Mittentenperatur**
$\bar{\Theta}$: **Mitteltemperatur**

Die bis zum Zeitpunkt t abgegebene Wärme berechnet sich aus:

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot (\vartheta_A - \bar{\vartheta}(t))$$

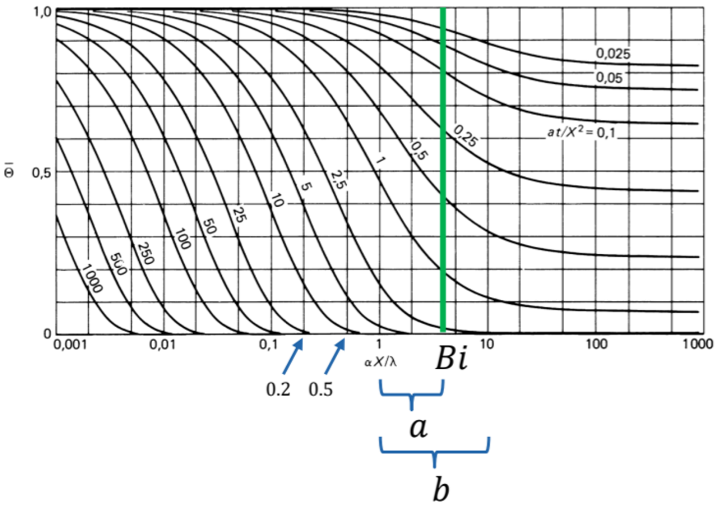
Vorgehen:
gesucht: ϑ zum Zeitpunkt t

1. Biotzahl bestimmen und Vertikale im richtigen Diagramm ziehen
2. Mit gefordertem Zeitpunkt t Fourierzahl bestimmen
3. Θ herauslesen und nach gesuchter Grösse auflösen

gesucht: t bei bestimmtem Θ

1. Biotzahl bestimmen und Vertikale im richtigen Diagramm ziehen
2. Θ bestimmen und horizontale ziehen
3. Schnittpunkte der Geraden bestimmen und so Fourierzahl ablesen daraus t bestimmen

genaue Bestimmung der Achsenposition:



$$\frac{a}{b} = \frac{\log(Bi) - \log(\text{Anfangswert})}{\log(10) - \log(1)}$$

(Nennerterm wird immer 1 ergeben)

Instationäre Wärmeleitung im Zylinder:
Analoge Vorgehensweise mit

$$Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} \qquad Fo = \frac{a \cdot t}{R^2}$$

R sei der Radius des Zylinders

Instationäre Wärmeleitung in der Kugel:
Analoge Vorgehensweise mit

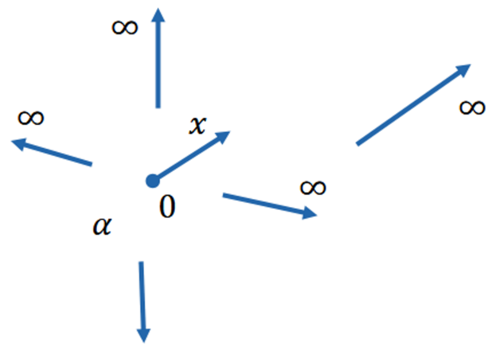
$$Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} \qquad Fo = \frac{a \cdot t}{R^2}$$

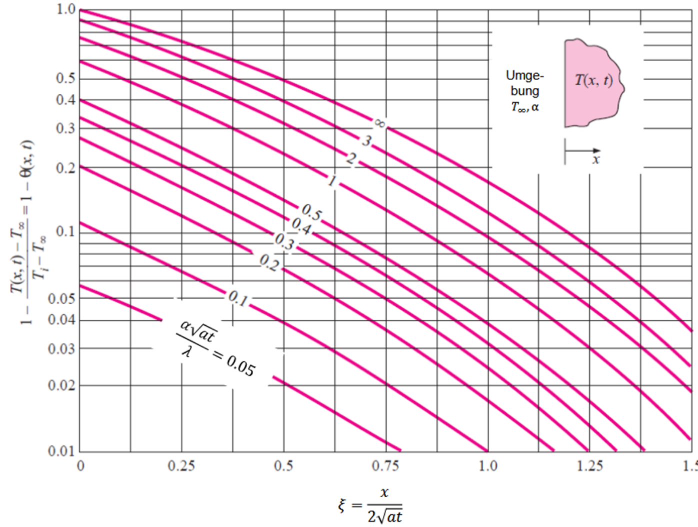
R sei der Radius der Kugel

Wärmeleitung eines unendlich ausgedehnten Körpers:
x bezeichnet dabei die Tiefe relativ zur bzw. die Entfernung von der Oberfläche. Die dimensionslose Temperatur lässt sich schreiben als:

$$1 - \Theta(x, t) = 1 - \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

T_∞: Umgebungstemperatur
T_A: Anfangstemperatur





$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{at}} \qquad \text{Laufparameter: } \frac{\alpha\sqrt{at}}{\lambda}$$

Kontakttemperatur:
Bei Berührung zweier halbundenlicher Körper mit Anfangstemperaturen $\vartheta_{A1}, \vartheta_{A2}$ kann die Kontakttemperatur folgendermassen berechnet werden:

$$\vartheta_K = \frac{b_1 \cdot \vartheta_{A1} + b_2 \cdot \vartheta_{A2}}{b_1 + b_2}$$

mit dem **Wärmeeindringkoeffizienten** b:

$$b = \sqrt{\lambda \cdot \varrho \cdot c}$$

Analytische Lösungen für instatinnäre Wärmeleitung:
Für kurze Zeiten beschreibt eine einzelne Funktion die Verteilungen allerdings nicht. Der Lösungsansatz erfolgt wieder über eine Trennung der Variablen. Es ergibt sich dann eine unendliche Reihe gemäss

$$\boxed{\Theta(Fo,\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(m_i) f(m_i \xi) e^{-m_i^2 Fo}}$$

kalorische Mitteltemperatur:

$$\boxed{\overline{\Theta}(Fo) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(m_i) D_i(m_i) e^{-m_i^2 Fo}}$$

abgegebene Wärme:

$$\boxed{Q(t) = \varrho c V (T_A - T_\infty)(1 - \overline{\Theta})}$$

Ausrechnen über Nullstellensuche
oder aus Tabelle auf F. 20 ablesen

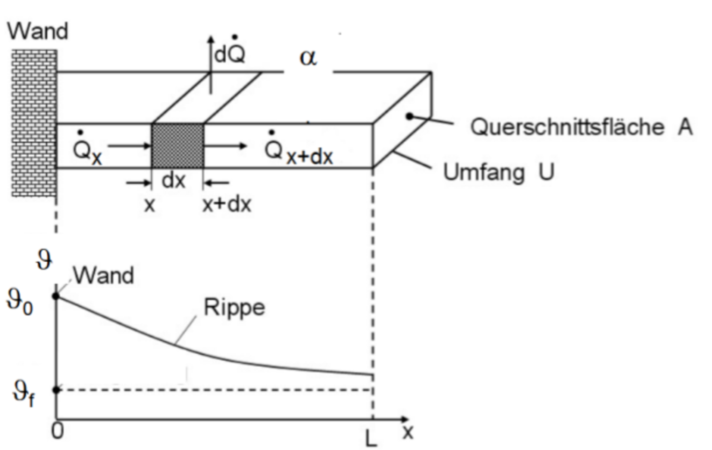
E2. Tabelle 2 a. Temperaturfeld bei eindimensionalem Wärmestrom in Platte, Zylinder und Kugel nach sprunghafter Änderung der Umgebungstemperatur von (der konstanten Anfangstemperatur des Körpers) ϑ_A auf den festen Wert ϑ_∞ bei einem konstanten vorgegebenen Wert des äußeren Wärmeübergangskoeffizienten α_a (Randbedingung 3. Art)

	m_i zu bestimmen aus:	$C_i(m_i)$	$D_i(m_i)$	$f(m_i \xi)$
Platte	$m_i = \frac{\alpha_a X}{\lambda} \frac{\cos m_i}{\sin m_i}$	$2 \frac{\sin m_i}{m_i + \sin m_i \cos m_i}$	$1 \frac{\sin m_i}{m_i}$	$\cos\left(m_i \frac{x}{X}\right)$
Zylinder[a]	$m_i = \frac{\alpha_a R}{\lambda} \frac{J_0(m_i)}{J_1(m_i)}$	$2 \frac{J_1(m_i)}{m_i (J_0^2(m_i) + J_1^2(m_i))}$	$2 \frac{J_1(m_i)}{m_i}$	$J_0\left(m_i \frac{r}{R}\right)$
Kugel	$m_i = \left(1 - \frac{\alpha_a R}{\lambda}\right) \frac{\sin m_i}{\cos m_i}$	$2 \frac{\sin m_i - m_i \cos m_i}{m_i - \sin m_i \cos m_i}$	$3 \frac{\sin m_i - m_i \cos m_i}{m_i^3}$	$\frac{\sin\left(m_i \frac{r}{R}\right)}{m_i \frac{r}{R}}$

[a]Tafeln und Schaubilder der Funktionen J_0 und J_1 (Zylinderfunktionen oder Besselsche Funktionen) findet man in [8] und [9].

s. Folie 21

Rippen



Annahmen:

- **Fluidtemperatur** ϑ_f ist konstant und kleiner als die **Rippentemperatur** $\vartheta(x)$
- **Querschnittsfläche** A **Wärmeleitfähigkeit** λ und **Wärmeübergangskoeffizient** α sind über die Rippenlänge konstant
- $\vartheta_0 = \vartheta(x = 0)$ sei bekannt
- $\dot{Q}(x = L) \stackrel{!}{=} 0$ durch die Stirnfläche der Rippe fliesst kein Wärmestrom

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A}}$$

(m ist die Kopplung der geometrischen Eigenschaften mit den Materialeigenschaften) der **dimensionslose Temperaturverlauf:**

$$\boxed{\frac{\Delta\vartheta(x)}{\Delta\vartheta_0} = \frac{cosh(m(L-x))}{cosh(mL)}}$$

Temperatur am Ende der Rippe:

$$\boxed{\vartheta(x = L) = \vartheta_f + \Delta\vartheta_0 \cdot \frac{1}{cosh(mL)}}$$

Wärmestrom an der Rippenwurzel:

$$\boxed{\dot{Q}(x = 0) = \lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta_0 \cdot m \cdot tanh(mL)}$$

man beachte:

$$\cosh(mL) = \frac{e^{mL} + e^{-mL}}{2} \qquad \tanh(mL) = \frac{e^{2mL} + 1}{e^{2mL} - 1}$$

Der Wirkungsgrad einer Rippe:

$$\eta_{Ri} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

Auslegungsproblematik:

Kurze Rippen ➢ Tiefes A und $\dot{Q}$ ➢ Hoher Wirkungsgrad	Lange Rippen ➢ Hohes A und $\dot{Q}$ ➢ Tiefer Wirkungsgrad
Dünne Rippen ➢ Hohes A (mehr Rippen) ➢ Tiefer Wirkungsgrad	Dicke Rippen ➢ Tiefes A (weniger Rippen) ➢ Hoher Wirkungsgrad
Wenige Rippen ➢ Tieferes A ➢ Hoher Durchfluss	Viele Rippen ➢ Hohes A ➢ Tiefer Durchfluss

Konvektive Wärmeübertragung

Definitionen:

Reynoldszahl:

Verhältnis zwischen Trägheits- und Reibungskräften

$$Re = \frac{w \cdot L}{\nu}$$

Prandtlzahl:

eine reine Funktion von Stoffeigenschaften und deshalb im allgemeinen temperatur- und druckabhängig.

$$\Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$$

Nusseltzahl:

Verhältnis zwischen einer charakteristischen Länge L und einer gedachten ruhenden Ersatzschicht mit Dicke δ_T^* und demselben Temperaturgefälle ΔT, die den Wärmestrom $\dot{q}$ erzeugt.

$$Nu = \alpha \cdot \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{\delta_T^*}$$

Grashofzahl:

Die Grashofzahl ist ein Mass für das Verhältnis von freier Auftriebskraft F_A und Reibungskräften F_R. Sie lässt sich schrei- ben als

$$Gr = \frac{L^2 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T}{w \cdot \nu} \cdot Re$$

Rayleighzahl:

Sie stellt das Verhältnis zwischen dem Wärmetransport durch freie Konvektion und dem Wärmetransport durch Wärmeleitung dar. Bei grossem Ra dominiert die konvektive Wärmeüber- tragung, bei kleinem Ra ist es umgekehrt.

$$Ra = Gr \cdot \Pr = \frac{L^3 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T}{\nu \cdot a}$$

Grenzschichtdicken

Die Grenzschichtdicke ist im laminaren Fall:

$$\delta_W = \frac{4.91x}{\sqrt{Re_x}}$$

für tubulente Grenzschichten gilt:

$$\delta_W = \delta_T = \frac{0.37x}{{Re_x}^{0.2}}$$

Das Verhältnis der Grenzschichtdicken für eine laminare Strömung ist schätzungsweise:

$$\frac{\delta_T}{\delta_W} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Pr}}$$

δ_T: Thermische Grenzschicht
δ_W: hydrodynamische Grenzschicht

Um herauszufinden welche Grenzschicht grösser ist:

$$\Pr = \left(\frac{\delta_T}{\delta_W}\right)^3 < 1 \rightarrow \delta_W \text{ grösser}$$

Rohrströmung

Python Scripts zur Berechnung der Nusseltzahlen im jeweiligen Fall.

Nusseltzahl:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot d_i}{\lambda}$$

Reynoldszahl:

$$Re = \frac{w \cdot d_i}{\nu}$$

mittlere Wärmeübergangskoeffizient:

$$\alpha_m = \frac{\dot{q}}{\Delta\vartheta_m}$$

Temperaturdifferenzen:

$$\Delta\vartheta_{\max} = \vartheta_W - \vartheta_E \qquad \Delta\vartheta_{\min} = \vartheta_W - \vartheta_A$$

- Laminare Rohrströmung, hydrodynamisch voll ausgebildet: (Python Script)
  1. Konstante Wandtemperatur, lokale Nusseltzahl
  2. Konstante Wandtemperatur, mittlere Nusseltzahl
  3. Konstante Wandwärmestromdichte, lokale Nusseltzahl
  4. Konstante Wandwärmestromdichte, mittlere Nusseltzahl

- Transition/Übergangsbereich:

$$Nu_m = (1-\gamma)\cdot Nu_{m,L,(Re=2300)} + \gamma \cdot Nu_{m,\vartheta,(Re=4000)}$$

mit

$$\gamma = \frac{Re-2300}{4000-2300} \qquad 0 \le \gamma \le 1$$

und

$$Nu_{m,\vartheta,(Re=4000)} = \frac{(0.040268)\cdot 3000 \cdot \mathrm{Pr} \cdot \left(1+\left(\frac{d_i}{l}\right)^{2/3}\right)}{1+12.7\cdot\sqrt{0.04026/8}\cdot(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)}$$

Konstante Wandtemperatur, mittlere Nusseltzahl:

$$Nu_{m,L,(Re=2300)} = \left[49.371 + (Nu_{m,\vartheta,2,2300} - 0.7)^3 + (Nu_{m,\vartheta,3,2300})^3\right]^{1/3}$$

$$Nu_{m,\vartheta,2,2300} = 1.615 \cdot \left(2300 \cdot \mathrm{Pr} \cdot \frac{d_i}{l}\right)^{1/3}$$

$$Nu_{m,\vartheta,3,2300} = \left(\frac{2}{1+22\cdot \mathrm{Pr}}\right)^{1/6} \cdot \left(2300 \cdot \mathrm{Pr} \cdot \frac{d_i}{l}\right)^{1/2}$$

Konstante Wärmestromdichte, mittlere Nusseltzahl:

$$Nu_{m,L,(Re=2300)} = \left[83.326 + (Nu_{m,q,2,2300} - 0.6)^3 + (Nu_{m,q,3,2300})^3\right]^{1/3}$$

$$Nu_{m,q,2,2300} = 1.953 \cdot \left(2300 \cdot \mathrm{Pr} \cdot \frac{d_i}{l}\right)^{1/3}$$

$$Nu_{m,q,3,2300} = 0.924 \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \cdot \left(2300 \cdot \frac{d_i}{l}\right)^{1/2}$$

- Turbulente Rohrströmung, hydrodynamisch voll ausgebildet: $Re > 2300$

Konstante Wandtemperatur oder konstante Wandwärmestromdichte, lokale Nusseltzahl:

$$Nu_x = \frac{(\xi/8)\cdot(Re-1000)\cdot \mathrm{Pr}}{1+12.7\cdot\sqrt{(\xi/8)}\cdot(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{d_i}{x}\right)^{2/3}\right]$$

mit

$$\xi = (1.8 \cdot \log_{10}(Re) - 1.5)^{-2}$$

Konstante Wandtemperatur oder konstante Wandwärmestromdichte, mittlere Nusseltzahl:

$$Nu_m = \frac{(\xi/8)\cdot(Re-1000)\cdot \mathrm{Pr}}{1+12.7\cdot\sqrt{\xi/8}\cdot(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)}\left[1+\left(\frac{d_i}{L}\right)^{2/3}\right]$$

Ebene Platte

Nusseltzahl:

$$Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} \qquad Nu_l = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}$$

Reynoldszahl:

$$Re_x = \frac{w \cdot x}{\nu} \qquad Re_l = \frac{w \cdot l}{\nu}$$

l: Plattenlänge

Kritisches Reynoldszahl:

$$Re > 5 \cdot 10^5 \Longrightarrow \text{turbulent}$$

- **Laminare Plattenströmung:**

  für $Re < 10^5$ **und** $0.6 \le \mathrm{Pr} \le 2000$**:**

  Konstante Wandtemperatur, lokale Nusseltzahl:

  $$Nu_{x,lam} = 0.332 \cdot \sqrt{Re_x} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$$

  Konstante Wandtemperatur, mittlere Nusseltzahl:

  $$Nu_{l,lam} = 0.664 \cdot \sqrt{Re_l} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$$

  Konstanter Wandwärmestrom, lokale Nusseltzahl:

  $$Nu_{x,lam} = 0.460 \cdot \sqrt{Re_x} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$$

- **Turbulente Plattenumströmung:**

  für $10^5 < Re < 10^7$ **und** $0.5 \le \mathrm{Pr} \le 2000$**:**

  Konstante Wandtemperatur, lokale Nusseltzahl:

  $$Nu_{x,turb} = \frac{(\zeta/8)\cdot Re \cdot \mathrm{Pr}}{1+12.7\cdot\sqrt{\zeta/8}\cdot(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)}$$

  ξ ist dabei der Widerstandsbeiwert. Bei einer ebenen Platte angegeben als:

  $$(\xi/8) = 0.0296 \cdot Re_x^{-0.2}$$

  Konstante Wandtemperatur, mittlere Nusseltzahl:

  $$Nu_{l,turb} = \frac{0.037 \cdot Re_l^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}}{1+2.443\cdot Re_l^{-0.1}\cdot(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)}$$

  $$(\xi/8) = 0.037 \cdot Re_l^{-0.2}$$

- **Darstellung im gesamten Re-Bereich:**

  Um auch den Bereich $10^5 < Re_l < 5 \cdot 10^5$ abzudecken, lässt sich die **mittlere Nusseltzahl** schreiben als:

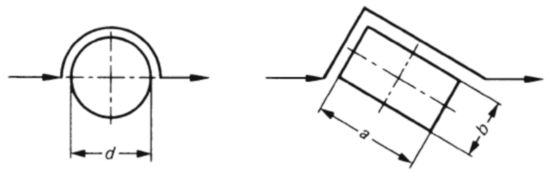
  $$Nu_{l,0} = \sqrt{Nu_{l,\mathrm{lam}}^2 + Nu_{l,\mathrm{turb}}^2}$$

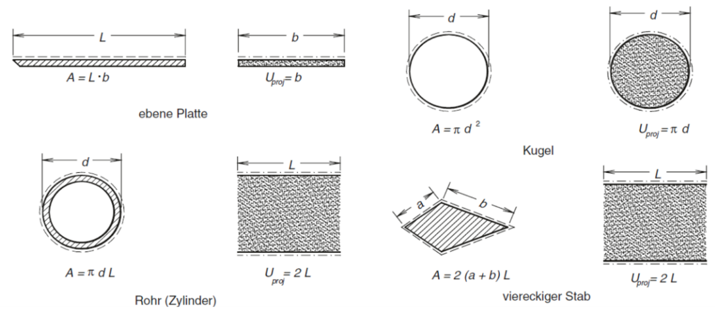
- **Korrektur für Temperaturabhängigkeit**
  1. Stoffwerte einsetzten:
     $$\vartheta_m = \frac{\vartheta_E - \vartheta_A}{2}$$
     (bei freier Anströmung: $\vartheta_m = \vartheta_\infty$)
  2. Die Temperaturabhängigkeit wird berücksichtigt gemäss:
     $$Nu_l = K \cdot Nu_{l,0}$$
     bei Flüssigkeiten:
     $$K = K_F = \left(\frac{\mathrm{Pr}_m}{\mathrm{Pr}_W}\right)^{0.25}$$
     bei Gasen:
     $$K = K_F = \left(\frac{T_m}{T_W}\right)^{0.12}$$
     In Kelvin rechnen!!

Queranströmung von Einzelkörpern

$$L_{ch} = \frac{A}{U_{proj}} \xrightarrow{\text{Einsetzten}} Re$$

Dies ist die charakteristische Länge (auch Umströmlänge), die ein strömendes Teilchen entlang der Oberfläche zurücklegen kann, A ist die gesamte Oberfläche, und U_{proj} ist der Umfang der Schattenfläche in Anströmrichtung.





- **Laminare Strömung:**

  $$Nu_{L,lam} = 0.664 \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$$

- **Turbulente Strömung:**

  $$Nu_{L,\mathrm{turb}} = \frac{0.037 \cdot Re^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}}{1+2.443\cdot Re^{-0.1}\cdot(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)}$$

- **Gesamter Reynoldszahlbereich:**

  $$Nu_{L,0} = 0.3 + \sqrt{Nu_{L,\mathrm{lam}}^2 + Nu_{L,\mathrm{turb}}^2}$$

Korrektur für Schräganströmung:

φ	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°
$Nu_{L,\varphi}/Nu_L$	1,0	1,0	0,99	0,95	0,86	0,75	0,63	0,50