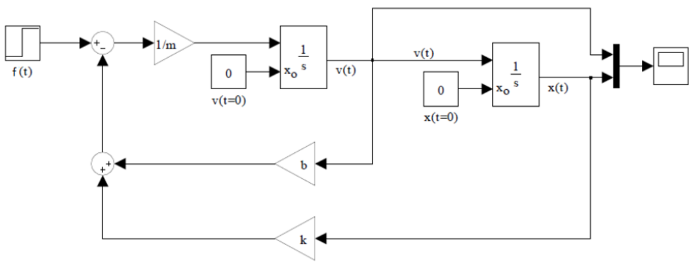
Mess- und Regelungstechnik 1

Fabian Starc

Version: July 17, 2025

Grundlagen

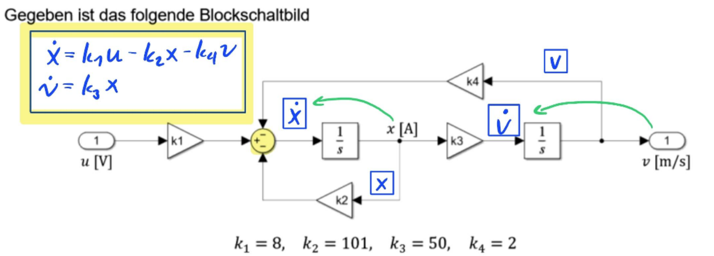
Regelkreis



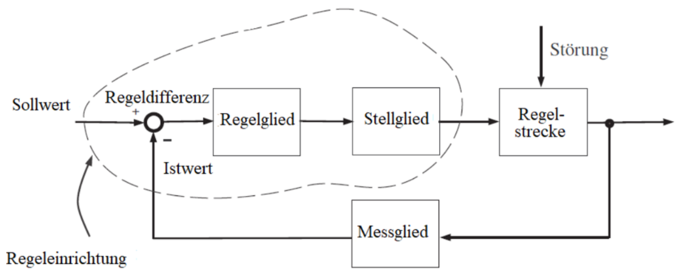
Der Istwert (auch Regel- oder Ausgangsgrösse) ist die physikalische Grösse, die unter Kontrolle gebracht werden muss.

Der Sollwert ist der vorgegebene Wert der Regelgrösse.

DGL aus Blockschaltbild

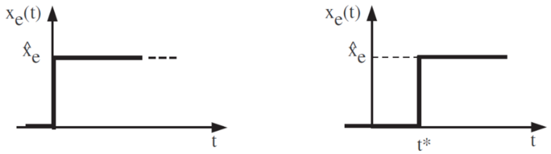


Regelkreis Blockschaltbild



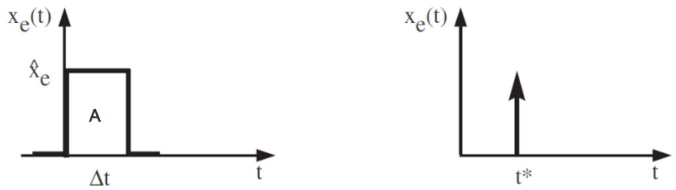
Istwert: Muss unter Kontrolle gebracht werden
Regeldifferenz: Differenz von Soll- und Istwert
Regelglied: Erzeugt Korrektursignal
Stellglied: Schnittstelle von Regler zu Reglerstrecke / Stellt die nötige Grösse ein
Regelstrecke: Maschine/Anlage (zB. Motor als Physikalsiche Einheit)
Messglied: Verarbeitet das vom Sensor erfasste Signal
Störgrösse: Unbekannt / weicht vom Sollwert ab (zB. Last)

Sprungfunktion



Stellt z.B. einen Schalter dar, der zum Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = t^*$ eingeschaltet wird.

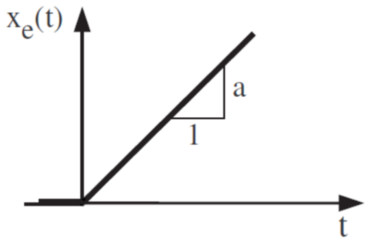
Impulsfunktion



Der tatsächliche Wert von $x_e(t)$ kann hier durch berechnung der Fläche A bestimmt werden:

$$x_e(t) = A = \hat{x}_e \cdot \Delta t$$

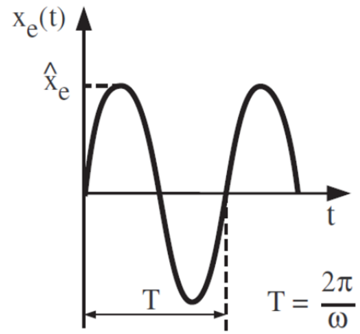
Lineare Variation



Wenn die Rampe als $r(t)$ gekennzeichnet wird, gibt es die wichtigen Zusammenhänge:

$$\frac{dr(t)}{dt} = \sigma(t) \qquad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t)$$

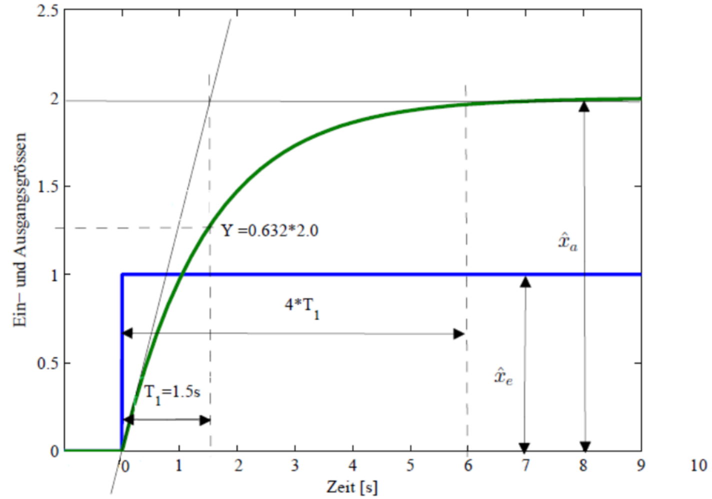
Sinusfunkion



PT1-Glied

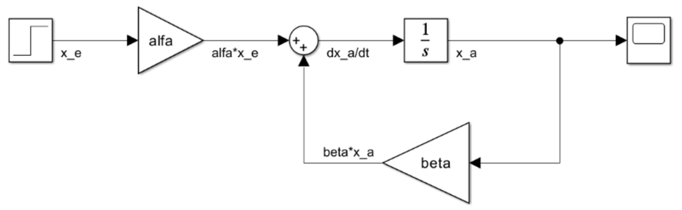
$$\frac{dx_a(t)}{dt} = \alpha \cdot x_a(t) + \beta \cdot x_e(t)$$

Zeitkonstante: $T_1 = -\frac{1}{\alpha}$
Statische Verstärkung: $K_s = -\frac{\beta}{\alpha}$
T_1 beinflusst die Reaktionszeit: gross = langsam



$$K_s = \frac{\hat{x}_a(t)}{\hat{x}_e(t)} = G(0)$$

Blockschaltbild PT1



Sprungfunktion PT1

$$x_a(t) = K_s\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot x_e(t)$$

Übertragungsfunktion PT1

$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

Pol-/Nullstellenform:

$$G(s) = K_s \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_1)}$$

TR: Menu 3,3

Zeitkonstantenform:

$$G(s) = K_s \frac{(T_{zm}s + 1)(T_{zm-1}s + 1) \dots (T_{z1}s + 1)}{(T_{pn}s + 1)(T_{pn-1}s + 1) \dots (T_{p1}s + 1)}$$

→ $G(s)$ in Pol-/Nullstellenform bringen
→ jeden Faktor (auch im Zählerpolynom) durch seine Pol-/Nullstelle teilen

DGL-Darstellung PT1

$$\frac{dx_a(t)}{dt} = \alpha \cdot x_a(t) + \beta \cdot x_e(t)$$

→ K_s und T_1 einfügen:

$$\frac{dx_a(t)}{dt} = \frac{-1}{T_1} \cdot x_a(t) + \frac{K_s}{T_1} \cdot x_e(t)$$

→ Laplace Transformation:

$$sX_a(s) = -\frac{1}{T_1} \cdot X_a(s) + \frac{K_s}{T_1} \cdot X_e(s)$$

→ Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{X_a}{X_e} = \frac{K_s}{T_1} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}}$$

Anfangs- und Endwertsatz PT1

Bei gegebener Übertragungsfunktion $G(s)$ muss meistens erst die Eingangsfuntkion $X_e(s)$ mithilfe der Eingangs-Sprungantwort $\sigma(t)$ berechnet werden:

$$X_e(s) = \mathcal{L}\{x_e(t)\}$$

$$X_a(s) = G(s) \cdot X_e(s)$$

Anfangswertsatz:

$$x_a(0) = \lim_{s \to +\infty} sX_a(s) = s\frac{K_s \hat{x}_e}{T_1} \frac{1}{(s + 1/T_1)} \frac{1}{s}$$

Endwertsatz:

$$x_a(\infty) = \lim_{s \to 0} sX_a(s) = s\frac{K_s \hat{x}_e}{T_1} \frac{1}{(s + 1/T_1)} \frac{1}{s} = K_s \hat{x}_e$$

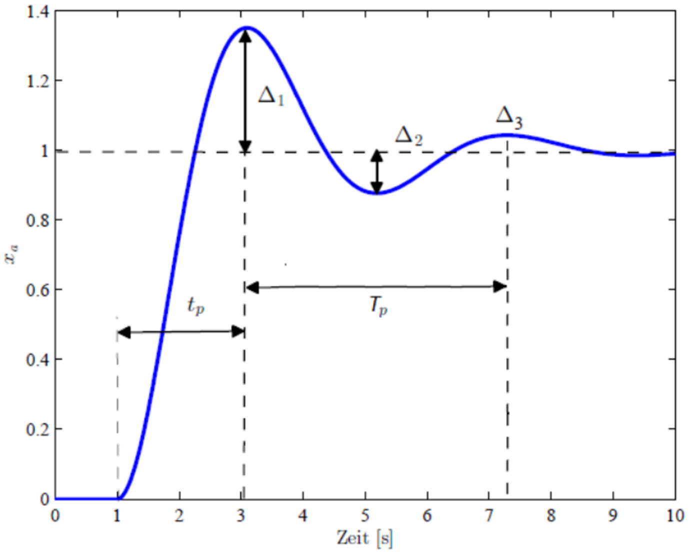
PT2-Glied

Bsp.: Feder-Masse-Dämpfer:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

$$m\frac{d^2x_a}{dt^2}x + b\frac{dx_a}{dt}x + kx_a = kx_e$$

$$\rightarrow \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{k}{ms^2 + bs + k}$$



Allgemeine DGL PT2:

$$\ddot{x}_a + 2\xi\omega_n\dot{x}_a + \omega^2 x_a = K_s\omega_n^2 x_e$$

Parameter PT2

$$x_a(t) = K_s\hat{x}_e\left(1 - \frac{\omega_n}{\omega_d}\exp(-\xi\omega_n t) \cdot \sin(\omega_d t + \Phi)\right)$$

Natürliche Eigenfrequenz: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = T_p$
logarithmisches Dekrement: $\vartheta = \ln(\frac{\Delta_1}{\Delta_2})$
Dämpfungsgrad: $\xi = \frac{b}{2\sqrt{mk}} = \frac{\vartheta}{\sqrt{\pi^2 - \vartheta^2}} = \cos(\Phi)$
Gedämpfte Eigenfrequenz: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$
Periodendauer: $T_P = \frac{2\pi}{\omega_d}, f = T_P^{-1}$
Überschwingzeit: $\frac{T_P}{2}$

erste Überschwingung: $\Delta_1 = \exp(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}) = \exp(-\vartheta)$

maximale Überschwingung: $\Delta_{\max} = \exp(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}) \cdot 100$

maximale Auslenkung: $\Delta_{\max} = x(\infty) + \Delta_1$

Zeitkonstante: $T_1 = \frac{1}{\xi\omega_n}$

Abklingrate: $\Upsilon(t) = \exp(-\xi\omega_n t)$

Übertragungsfunktion PT2

$$G(s) = K_s\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

explizit für Feder-Masse-Dämpfer:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1/m}{s^2 + (b/m)s + k/m}$$

Polstellendarstellung:

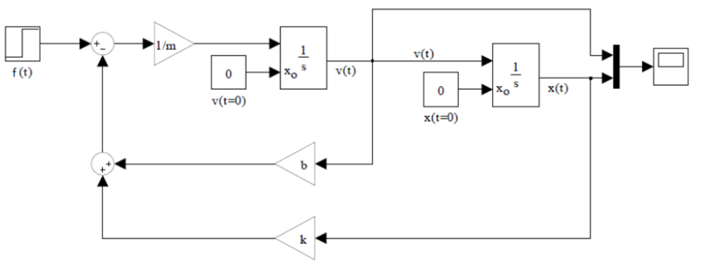
$$G(s) = K_s\frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

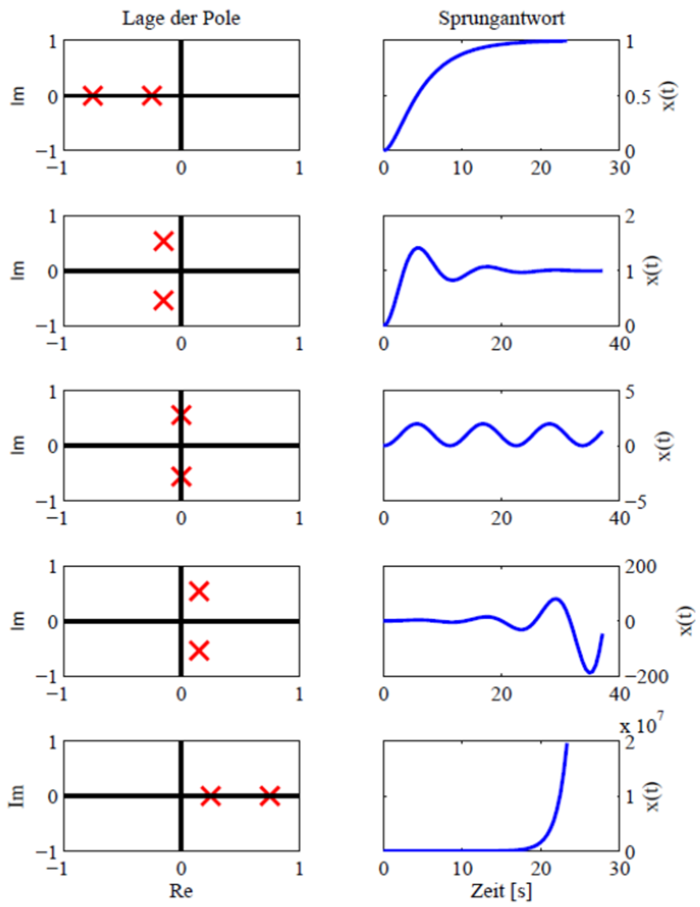
$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$\xi^2 - 1 > 0 \rightarrow$ Reell: nicht schingungsfähig
$\xi = 1 \rightarrow$ doppelt Reell
$\xi = 0 \rightarrow$ doppelt Imaginär

Blockschaltbild PT2



Lage der Pole PT2

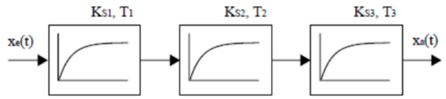


Überschwingweiten Δ_1 der jeweiligen Systeme:

1. $\Delta_1 = 0$ aperiodisch
2. $\Delta_1 = \exp(-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi)$ PT2 periodisch da konjugiert Komplexe Pole
3. $\Delta_1 = 100$ ungedämpfte Schwingung
4. $\Delta_1 \to \infty$ instabiles System

PTn-Glied

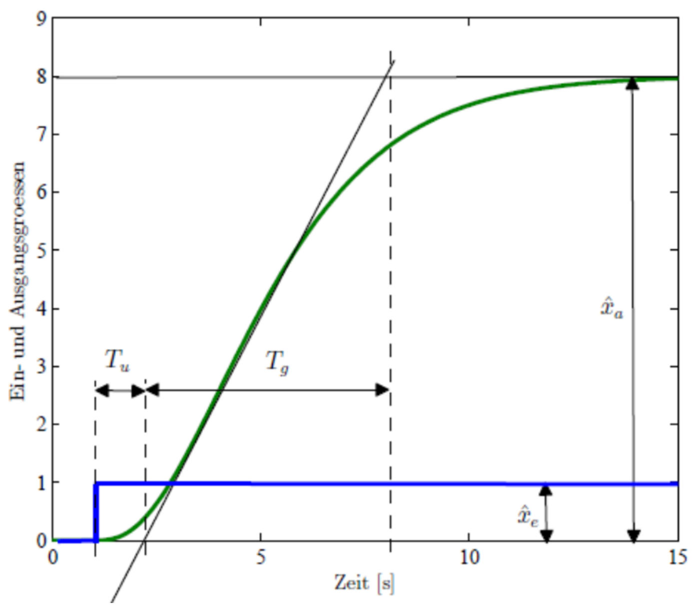
- Für 3 PT1-Blöcke hat man



- Als Übertragungsfunktion erhält man

$$\begin{aligned} G_s(s) &= \frac{K_{s1}}{(T_1 s+1)}\frac{K_{s2}}{(T_2 s+1)}\frac{K_{s3}}{(T_3 s+1)} \\ &= \frac{K_{s1}K_{s2}K_{s3}}{T_1T_2T_3s^3 + (T_1T_3 + T_1T_2 + T_2T_3)s^2 + (T_1 + T_2 + T_3)s + 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{G_s(s) = \frac{K_{sn}}{(T_n s + 1)^n}} \qquad \boxed{K_s = G(0)}$$



Die Statische verstärkung K_{sn} eines PTn-Systems ist definiert durch:

Methode der Wendetangente

Die Sprungantwort eines PTn-Gliedes wird mit einer Verzugszeit T_u und einer Ausgleichszeit T_g gekennzeichnet.

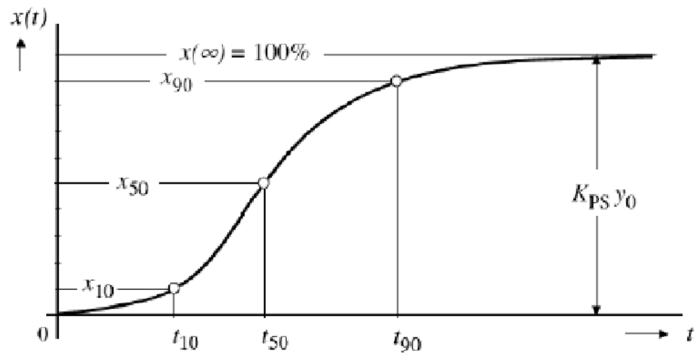
Verzugszeit: T_u
Ausgleichszeit: T_g

Die Ordnung n und äquivalente Zeitkonstante T können anhand des Verhältnisses T_g/T_u mit Hilfe folgender Tabelle bestimmt werden:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_g/T_u	9.71	4.61	3.14	2.44	2.03	1.75	1.56	1.41	1.29
T_g/T	2.72	3.69	4.46	5.12	5.70	6.23	6.71	7.16	7.59
T_u/T	0.28	0.80	1.42	2.10	2.81	3.55	4.30	5.08	5.87

Zeit-Prozentwertverfahren

Man will die Ordnung n, eine äquivalente Zeitkonstante T und eine äquivalente Verstärkung K_s approximiert ermitteln, so dass man das System als $G(s)$ ausdrücken kann:



Mit dem Quotient zweier Zeitwerte t_i/t_k kann man aus dem linken Nomogramm die Ordnung des Systems bestimmen:

Mit dieser Ordnung kann man den Quotient t_i/T aus dem rechten Nomogramm ablesen und die äquivalente Zeitkonstante T feststellen: