Analysis 3

Fabian Starc

Version: July 29, 2025

Komplexe Zahlen

$$j^2 = -1$$

$$\boxed{z = x + jy}$$

Die konjugierte Komplexe Zahl $z^* = x - jy$ zu einer gegebenen komplexen Zahl z findet man durch **Spiegelung an der Reellen Achse**. Dabei muss die Imaginäre Komponente mit -1 multipliziert werden.

$$\boxed{|z| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Der Betrag der komplexen Zahl ist der Betrag des entsprechenden Ortsvektors in der Gaussschen Zahlenebene.

$$\boxed{a = \left|\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Der Abstand a auf zwischen zwei komplexen Zahlen ist der Betrag des entsprechenden Verbindungsvektors.
Rechnen mit Komplexen Zahlen:

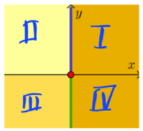
$$\boxed{z + z^* = 2Re(z)}$$

$$\boxed{z - z^* = 2Im(z) \cdot j}$$

$$\boxed{z * z^* = |z|^2}$$

Trigonometrische Form komplexer Zahlen

atan2(y;x)	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$y > 0$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$y = 0$		nicht def.	
$y < 0$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	



Je nach Quadranten wo sich die Zahl befindet, wird die entsprechde Formel für den Zwischenwinkel φ angewendet.

Somit kann z auch folgendermassen dargestellt werden:

$$\boxed{z = r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))}$$

$$\boxed{z = r \cdot cis(\varphi)} \qquad \boxed{e^{j\varphi} = r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))}$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot cis(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Die Beträge werden **multipliziert** und die Argumente **addiert**.
$a \cdot z_1$ ist equivalent zur Streckung des Ortsvektors um a.
$j \cdot z_2$ ist equivalent zur Drehung des Ortsvektors um $\frac{\pi}{2}$ um den Ursprung.

Potenzen und Wurzeln von komplexen Zahlen

$$\boxed{z^n = r^n \cdot cis(n \cdot \varphi)}$$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r} \cdot cis\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right)}$$

für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$

Die n-te Wurzel von z hat n verschiedene Lösungen:

$$j^k = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = 4n \\ j & \text{für} \quad k = 4n+1 \\ -1 & \text{für} \quad k = 4n+2 \\ -j & \text{für} \quad k = 4n+3 \end{cases} \qquad n \in N$$

Vektoren in der Gaussischen Zahlenebene

$$\boxed{y(t) = A \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right) \leftrightarrow \vec{y}(t) = A \cdot exp\left(j \cdot (\omega t + \varphi)\right)}$$

bei $t = 0$ kann folgende Umformung gemacht werden:

$$\boxed{exp(j\varphi) = cis(\varphi)}$$

danacht können mit der definition von $cis(\varphi)$ die Reelle und Imaginäre Komponenten des Vektors $\vec{y}(t)$ berechnet werden:

$$\boxed{cis(\varphi) = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)}$$

Addition harmonischer Schwingungen

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \qquad y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$y_1(t=0) \to A_1 \cdot cis(\varphi_1) \qquad y_2(t=0) \to A_2 \cdot cis(\varphi_2)$$

$$y_1 + y_2 = y$$

$$y = a + bj$$

$$|y| = \sqrt{a^2 + b^2} = A'$$

$$arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \varphi'$$

$$y(t) = A' \sin(\omega t + \varphi')$$

Laplace Transformation

Definition:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) * e^{-st}$$

$s \in \mathbb{C}$ variabel

$$s = Re(s) + j \cdot Im(s)$$

Konstante Faktoren können vor die Laplace-Transformation gezogen werden:

$$\mathcal{L}\{c \cdot f(t)\} = c \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Verschiebungssatz:

$$\mathcal{L}\{f(t - \hat{a})\} = \exp(-\hat{a}s) \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Dämpfungssatz:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s + a) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Bsp.:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \\ \cos(2t - 2) + 2(t - i)^3 - \frac{1}{e} \cdot e^t & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

Verschiebungsparameter: $a = 1$

Dämpfungsfaktor: e^{-as} kann vor die Laplace-Trafo genommen werden:

$$F(s) = e^{-s} \cdot \mathcal{L}\{\cos(2t)\} + 2 \cdot \mathcal{L}\{t^3\} - \mathcal{L}\{e^t\}$$

da $\cos(2t - 2) = \cos(2(t-1))$ und $\frac{1}{e}e^t = e^{t-1}$

Laplace zum Lösen von DGLs

Wichtige Laplace Transformationen:

$$\mathcal{L}\{y''(x)\} = s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0) \quad (1)$$
$$\mathcal{L}\{y'(x)\} = s \cdot Y(s) - y(0) \quad (2)$$
$$\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s) \quad (3)$$

Vorgehen:

1. Zum lösen von DGL müssen AWPs der Ordnung 1 und 2 definiert werden:

   Ordnung 1:

   $$y' = ay = g(x)$$

   Ordnung 2:

   $$y'' + ay' + by = g(x)$$

2. linke Seite: **alle Ableitungen**
   rechte Seite: **alle Terme die von x abhängig sind**
3. Laplace-Transformation durchführen.
4. Lösung im Bildbereich (nach $Y(s)$ algebraisch auflösen).
5. Vereinfachung sodass Inverse Laplace-Transformation möglich ist.
6. Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}$.

Funktionen mit mehreren Variabeln

partielle Ableitung

Nach dem Satz von Schwarz gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x;y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x;y)$$

$$f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y)$$

Tangentialebene

Tangentialebene bestimmen

Gleichung zur Formel der Tangentialebene in einem Punkt P:

$$P = (x_P; y_P; z_P) \qquad z = f(x;y)$$

$$\boxed{z = f_x(x_P;y_P)\cdot(x-x_P) + f_y(x_P;y_P)\cdot(y-y_P) + f(x_P;y_P)}$$

Gradient

In welcher Richtung ist es von eineme bestimmen Punkt aus am steilsten?

$$\boxed{grad(f(x:y)) = \vec{\nabla} f(x;y) = \begin{pmatrix} f_x(x;y) \\ f_y(x;y) \end{pmatrix}}$$

Nabla Operator:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Eigenschaften des Gradienten:

1. $\vec{\nabla} f(x_0;y_0)$ steht senkrecht auf der Höhenlinie von f durch $P' = (x_0;y_0)$
2. er Zeigt in die Richtung, in der der Graph von f an der Stelle am steilsten ist.
3. Die zugehörige maximale Steigung ist durch den Betrag des Gradienten gegeben.

Richtungsableitung

Wie gross ist die Steigung in einer vorgegebenen Richtung $\vec{a}$?

Wie ändert sich der zugehörige Funtkionswert, wenn man sich von einem Punkt P' aus in der Richtung des Vektors $\vec{a}$ bewegt?

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{\nabla} f \cdot \vec{a}}$$

Totales Differential

Änderung der z-Koordinate mit Punkten auf der Fläche $z = f(x;y) \rightarrow \Delta z = Q_z - P_z$:

mit:

$$P_z = z_0 = f(x_0, y_0) \qquad Q_z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$$

$$\boxed{\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}$$

Koordinatenänderungen bei einer Verschiebung auf der **Tangentialebene**:

Punkt P wandert in den Punkt $Q' = (x_0 + dx; y_0 + dy; z_0 + dz)$:

$$\boxed{dz = f(x_0;y_0)\cdot dx + f_y(x_0;y_0)\cdot dy}$$

Das Totale Differential:

$$\boxed{\Delta z \approx dz = f_x(x_0;y_0)\cdot dx + f_y(x_0;y_0)\cdot dy}$$

$$\boxed{= \vec{\nabla} f(x_0;y_0) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}}$$

Mehrfachintegrale

Bei Mehrfachintegralen mit Grenzen, die von Integrationsvariabeln abhängig sind, muss nach diesen als erstes integriert werden.

Bsp.:

$$\int_{x_0}^{5} \int_{y=3}^{\sqrt{x}} (x^2 + 2y)\, dydx$$

muss als erstes nach y integriert werden.

Bsp.:

$$\int_{y=2}^{3} \int_{x=1}^{y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{x^3}\right) dxdy$$

muss als erstes nach x integriert werden.

Bereiche (A) von Mehrfachintegralen

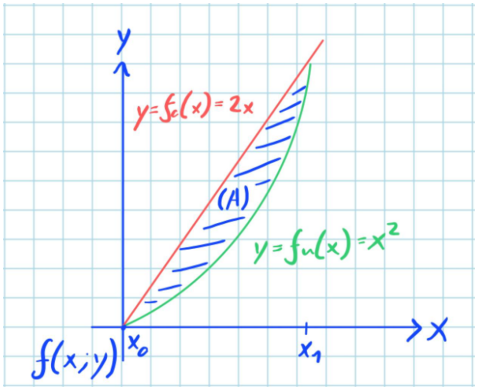
untere Grenzfunktion: $y = f_u(x)$ bestimmen

obere Grenzfunktion: $y = f_o(x)$ bestimmen

Bereich von $x \in [x_0; x_1]$ bestimmen

$$\boxed{\iint_{(A)} f(x;y)\, dA = \int_{x_0}^{x_1} \int_{f_u(x)}^{f_o(x)} f(x;y)\, dydx}$$

Bsp.:



Mehrfachintegrale mit Polarkoordinaten

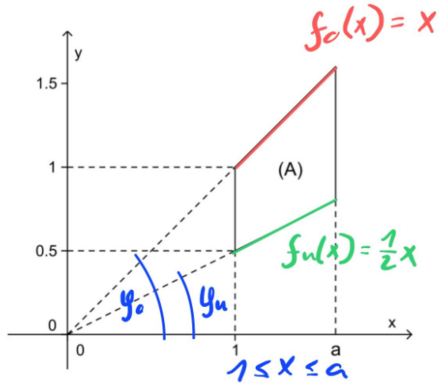
x und y in Polarkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi)$$

dA in Polarkoordinaten:

$$dA = r \cdot drd\varphi$$

Bsp.:



$$\frac{1}{\cos(\varphi)} \leq r \leq \frac{a}{\sin(\varphi)}$$

$$\varphi_u \leq \varphi \leq \varphi_o$$

$$arctan(m_u) \leq \varphi \leq arctan(m_o)$$

(x als r umgerechnet und nach r aufgelöst)

$$arctan\left(\frac{1}{2}\right) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

Flächenträgheitsmomente

$$\boxed{I_x = \iint_{(A)} y^2 dA \quad I_y = \iint_{(A)} x^2 dA}$$

$$\boxed{I_s = I_x + I_y}$$

1. Bereich (A) in einzelteile Aufteilen
2. Grenzen von für x und y einsetzen
3. I als Summe von Doppelintegralen lösen

Satz von Steiner:
Gegeben ist eine Bezugsachse t parallel zu einer Bezugsachse s durch den Schwerpunkt des Bereichs (A). Der Abstand der beiden Achse nist d. Dann gilt:

$$\boxed{I_t = I_s + d^2 \cdot A}$$

Schwerpunkt

$$\boxed{x_s = \frac{1}{A} \iint_{(A)} x\, dA}$$

$$\boxed{y_s = \frac{1}{A} \iint_{(A)} y\, dA}$$

Dreifachintegrale

Volumenbereich (V)

Volumenbereich (V) bestimmen:

1. x und y wie bei Doppelintegralen
2. für z Ansatz machen: $z = rx + sy + t$
3. Schnittpunkte der Achsen einsetzen und auflösen
4. Resultat für z gibt und die obere Grenze

Polarkoordinaten

Transformationsgleichungen:

$$\boxed{x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad z = z}$$

Volumenelement dV:

$$\boxed{dV = r \cdot dr d\varphi dz}$$

(Grenzen von z können als $z_o(r)$ und $z_u(r)$ dargestellt werden, wenn die Hauptachse des Rotationskörpers auf der z-Achse liegt.)

Zylinderkoordinaten

$$\boxed{x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad z = z}$$

Schwerpunkt eines Körpers

$$\boxed{x_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x \, dV} \qquad \boxed{y_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y \, dV}$$

$$\boxed{z_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z \, dV}$$

Massenträgheitsmoment

$$\boxed{J = \iiint_{(V)} \varrho \cdot r_A^2 \, dV}$$

Vektoranalysis

Feldlinien

Feldlinien $\vec{r}(t)$ berechnen:

$$\boxed{det(\vec{v}, d\vec{r}) = 0 \text{ im } \mathbb{R}^2} \qquad \boxed{\vec{F} \times d\vec{r} \text{ im } \mathbb{R}^3}$$

Differentialoperatoren

Nabla-Operator:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

Der Gradient:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot f}$$

Die Divergenz:

$$\vec{v}(x;y;z) = \begin{pmatrix} v_1(x;y;z) \\ v_2(x;y;z) \\ v_3(x;y;z) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{v}(x;y;z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ ist das Skalarfeld.

Die Rotation:

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Satz:
div(rot$\vec{F}$) $= 0$ für jedes Vektorfeld $\vec{F}$:
d.h.**Wirbelfelder sind stets quellenfrei.**

rot(grad$f$) $= \vec{0}$ für jedes Skalarfeld f:
d.h. **Potentialfelder sind stets wirbeldfrei.**

Wirbelfelder und Potentialfelder:
wenn div$\vec{F} = 0$ dann ist $\vec{F}$ ein **Wirbelfeld**.
wenn rot$\vec{F} = 0$ dann ist $\vec{F}$ ein **Potentialfeld**.

Potential eines Vektorfeldes:
Das Potential eines Vektorfeldes $\vec{F}(x;y;z)$ bestimmen:

1. Jeder der einzelnen Komponenten des Vektorfeldes nach x, y, z integrieren.
2. Als Integrationskonstante φ jeweils in Abhängigkeit der anderen beiden Variabeln aufschreiben.
3. φ als neue Funktionen aufschreiben (Argumente beachten)
4. $f(x,y;z)$ als ein mögliches Potential aufschreiben

Kurvenintegrale

Kurvenintegral:

$$\boxed{\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \, dt}$$

Das Wegintegral oder Linienintegral des Vektorfeldes $\vec{F}(x;y;z)$ längs der Kurve C.

Das Integral über $\vec{F}$ längs jedes **geschlossenen Weges** ist Null:

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} \stackrel{!}{=} 0}$$

Parametrisierung einer Kurve wenn Anfangspunkt P_1 und Endpunkt P_2 bekannt sind:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{P1} + t \cdot \vec{r}_{P1P2}$$

$$t_1 = x_{P1} \qquad t_2 x_{P2}$$

Parametrisierung einer Kurve wenn eine Funktion $f(x) = y$ gegeben ist:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Bsp.:

$$y = x^2 - 1 \longrightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Vereinfachung von Kurvenintegralen

Bei gegebenem Vektorfeld $\vec{F}$ kann das Kurvenintegral durch berechnung eines Potentials $f(x;y;z)$ gemacht werden. Bsp. Die Arbeit W in einem konservativen Kraftfeld $\vec{F}$ zwischen zwei Punkten P_1 und P_2:

$$\boxed{W_{12} = \int_C \vec{F} \, d\vec{r} = f(x_{P2}; y_{P2}; z_{P2}) - f(x_{P1}; y_{P1}; z_{P1})}$$

Das Integral ist **Wegunabhängig** wenn rot $\vec{F} = 0$

Oberflächenintegrale

Der Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F}(x;y;z)$ durch die orientierte Fläche A ist gegeben durch:

$$\boxed{\Phi = \iint_A \vec{F} \, dA = \iint_{(A)} \vec{F} \cdot \vec{N} \, dA}$$

$\vec{N}$ ist der Normierte Normalenvektor des Flächenelements dA

Integralsatz von Gauss:
Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{F}(x;y;z)$ und eine Fläche A, die von der geschlossenen Kurve C berandet wird, gilt:

$$\boxed{\Phi = \oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = \iint_{(A)} \text{rot} \vec{F} \, d\vec{A}}$$

Dabei ist die Randkurve C so orientiert, dass sie mitem normalenvektor der Fläche eine **Rechtsschraube** bildet.