

Mess- und Regelungstechnik 2

Fabian Starc

Version: July 29, 2025

Allgemein

Rückkopplungssystem:

- Das Allgemeine Prinzip für die Regelung eines Systems.
- Man wirkt auf ein System um ein bestimmtes Resultat zu erhalten (der Istwert soll dem Sollwert folgen).
- Der Ausgang vom System wurde gemessen.
- Je nachdem ob der Ausgang zu gross oder zu klein ist im Vergleich zum Sollwert, wird die Wirkung auf das System automatisch entsprechend angepasst

Stabilität linearer Systeme:

- Grundlegendes Konzept der Systemtheorie
- Systeme können mittels Übertragungsfunktionen dargestellt werden
- Die Stabilität eines Systems lässt sich anhand dessen Übertragungsfunktion untersuchen

Stabilität—Definition

- Ein lineares System heisst eingangs/ausgangsstabil, wenn jedes endliche Eingangssignal zu einem endlichen Ausgangssignal führt.
- Ein System ist stabil, wenn alle Pole dessen Übertragungsfunktion in der offenen linken komplexen Halbebene liegen

Hurwitz Kriterium

Methode um herauszufinden ob alle Pole der Übertragungsfunktion einen negativen Realteil haben:

Gegeben ist das Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Hurwitz Kriterium:

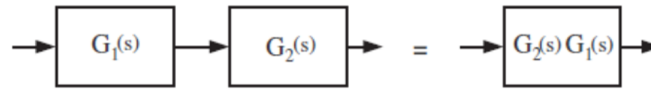
- alle $a_i > 0$ (wenn alle a_i negativ sind kann -1 vorgeklammert werden)
- alle Unterdeterminanten $\det(H_i) > 0, i = 1 \dots n$
Bei 2×2 Matrix oder Polynom dritten Grades:
 $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
- Die Matrix H_i ist gleich der Matrix H_{i+1} wenn man die letzte Spalte und Zeile von H_{i+1} eliminiert.

Wenn alle Kriterien erfüllt sind ist das System stabil.

Blockschaltbildalgebra

- Blockdiagramme können für die Darstellung von Differentialgleichungen verwendet werden (MRT1)
- Für die Bestimmung der Übertragungsfunktion eines Regelkreises muss man mit den einzelnen Übertragungsfunktionen der Blöcke arbeiten

Serienschaltung:

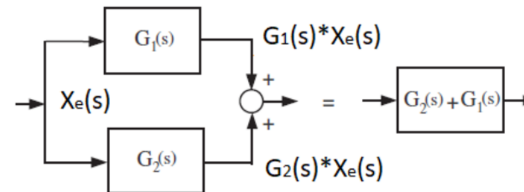


Ausgang vom ersten Block ist $G_1(s) \cdot X_e(s)$
Ausgang vom zweiten Block ist $G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot X_e(s)$

Gesamtübertragungsfunktion:

$$G_1(s) \cdot G_2(s)$$

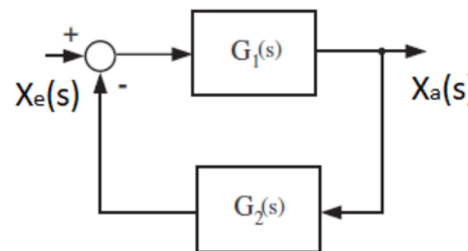
Parallelschaltung:



Ausgang ist die Summe von den 2 Blöcken:

$$G_1(s) + G_2(s)$$

Kreisschaltung:



Das rückführende Signal ist $G_2(s) \cdot X_a(s)$
Die Differenz ist gleich $X_e(s) - G_2(s) \cdot X_a(s)$

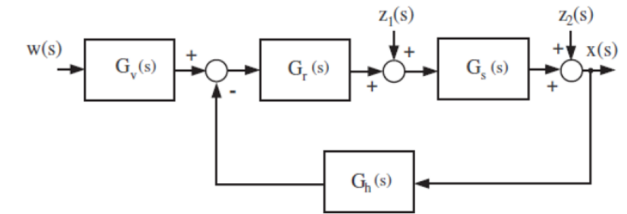
Für den Ausgang gilt:

$$G_1(s) \cdot (X_e(s) - G_2(s) X_a(s)) = X_a(s)$$

Die Gesamtübertragungsfunktion:

$$\frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)}$$

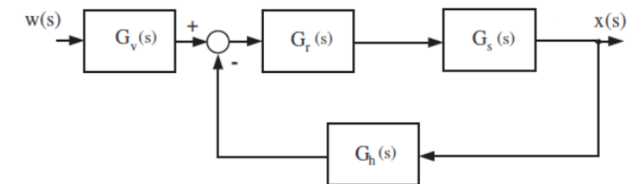
allgemeine Darstellung eines Regelkreises



Regler: $G_r(s)$
Regelstrecke: $G_s(s)$
Sensor: $G_h(s)$

Zusätzlicher Block: $G_v(s)$
Störungen: $Z_1(s)$ und $Z_2(s)$

Wenn $Z_1(s) = Z_2(s) = 0$



Kreisschaltung von $G_1(s)$ mit $G_h(s)$:

$$G_2(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) G_h(s)} = \frac{G_s(s) G_r(s)}{1 + G_s(s) G_r(s) G_h(s)}$$

Serienschaltung von $G_s(s)$ mit $G_2(s)$:

$$G(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = G_v(s) \frac{G_s(s) G_r(s)}{1 + G_s(s) G_r(s) G_h(s)}$$

Führungs- und Störverhalten eines Regelkreises:

$$\text{Führungsverhalten: } \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_s(s) G_r(s)}{1 + G_s(s) G_r(s)}$$

$$\text{Störverhalten 1: } \frac{X(s)}{Z_1(s)} = \frac{G_s(s)}{1 + G_s(s) G_r(s)}$$

$$\text{Störverhalten 2: } \frac{X(s)}{Z_2(s)} = \frac{1}{1 + G_s(s) G_r(s)}$$

Open und Closed loop

Für einen Regelkreis wird das Produkt

$$G_{ol}(s) = G_r(s)G_s(s)$$

als **offener Regelkreis** bezeichnet.

Der **geschlossene Regelkreis** kann entsprechend auch wie folgt ausgedrückt werden:

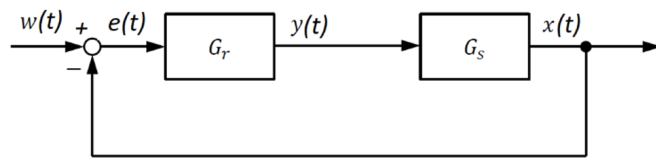
$$G_{cl} = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}}$$

G_{ol} entspricht der Übertragungsfunktion von W bis X wenn es die Rückkopplung nicht gäbe.

$1 + G_{ol} = 0$ Entspricht der **Charakteristischen Gleichung** des geschlossenen Regelkreises.

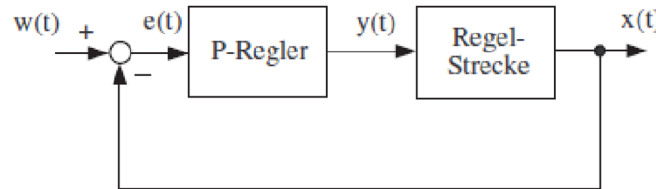
Reglertypen

Alle Regler beziehen sich auf dieselbe allgemeine Darstellung:



Das allgemeine Ziel ist dass der Ausgang x dem Sollwert w folgt.

P-Regler



Der Proportionalregler (P-Regler) erzeugt ein Ausgangssignal, das proportional zur Regeldifferenz ist:

$$y(t) = K_p \cdot e(t)$$

Übertragungsfunktion:

$$G_r(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = K_p$$

Proportionalregler in Kombination mit einem System erster Ordnung:

$$G_s = \frac{K_s}{T_1 s + 1}$$

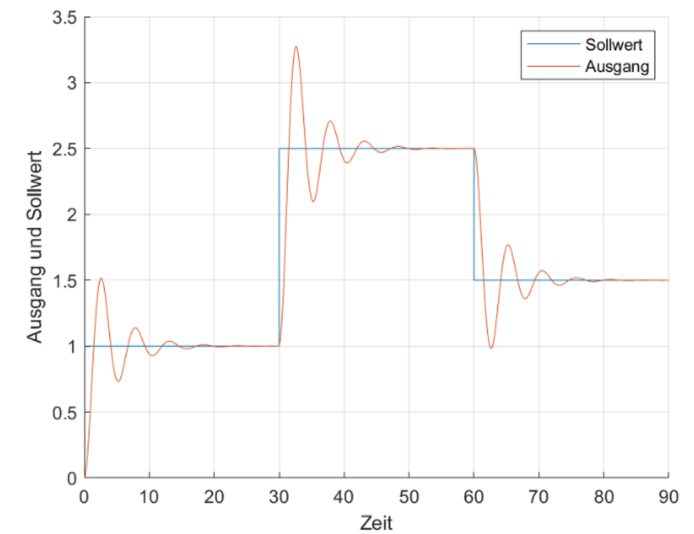
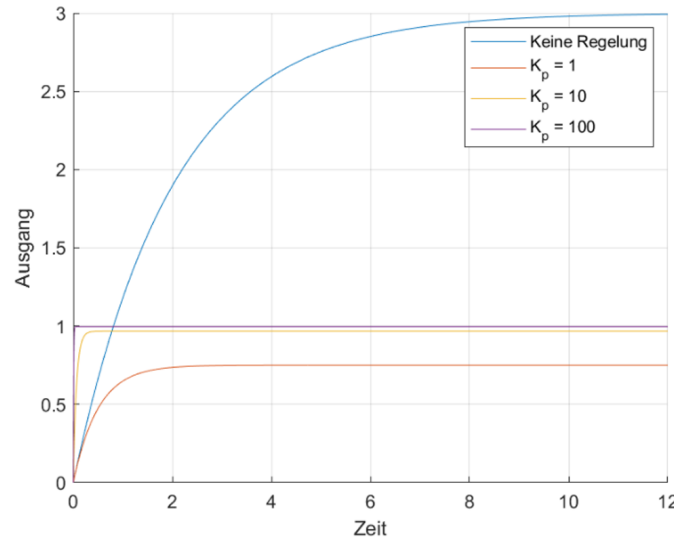
Für den geschlossenen Regelkreis hat man:

$$G_{cl}(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_s(s)G_r(s)}{1 + G_s(s)G_r(s)} = \frac{K_s K_p}{T_1 s + 1 + K_p K_s}$$

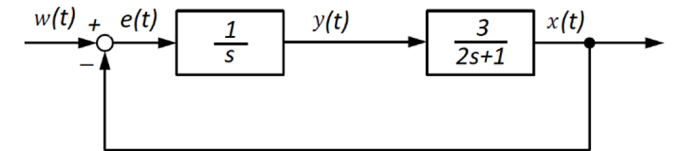
Die Antwort auf einen Einheitssprung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \frac{K_s K_p}{T_1 s + 1 + K_p K_s} = \frac{K_s K_p}{1 + K_p K_s}$$

P-Regler Beispiel:



Das System folgt dem Sollwert ohne Abweichung.



Mit $G_s = \frac{3}{2s+1}$ und K_p als unterschiedliche Werte.

Ohne Regelung nimmt der Endwert die größe der Verstärkung an. Hier wäre der Endwert = 3

I-Regler

I-Regler hat eine integrale Wirkung:

Mathematisch:

$$y(t) = K_i \int_0^{\infty} e(t) dt$$

Übertragungsfunktion der I-Reglers:

$$G_r(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Für den geschlossenen Regelkreis hat man:

$$G_{cl}(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_s(s)G_r(s)}{1 + G_s(s)G_r(s)} = \frac{K_s K_i}{s^2 T_1 + s + K_i K_s}$$

Die Antwort auf einen Einheitssprung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{K_s K_i}{s^2 T_1 + s + K_i K_s} = \frac{K_s K_i}{K_s K_i} = 1$$

PI-Regler

- I-Regler werden meistens in Kombination mit P-Reglern verwendet
- Der PI-Regler hat eine proportional-integrale Wirkung
- Sein Ausgang entspricht der Summe aus einem P- und einem I-Anteil

$$y(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^{\infty} e(t) dt$$

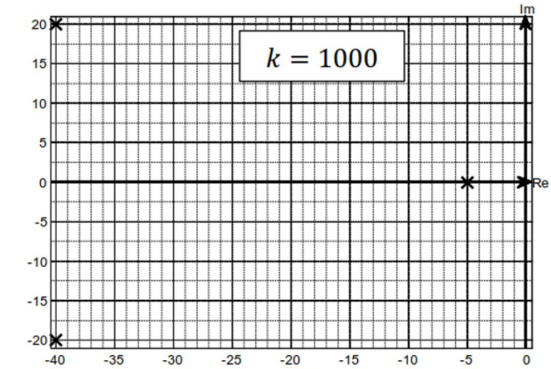
- K_i wird auch als $K_i = \frac{K_p}{T_n}$ ausgedrückt wo T_n die Nachstellzeit ist

$$y(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_n} \int_0^{\infty} e(t) dt = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_n} \int_0^{\infty} e(t) dt \right)$$

Übertragungsfunktion:

$$G_r(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n s} \right)$$

Pollage



Ein System ist durch seine Pol-/Nullstellenlage in und einem Gain k eindeutig beschrieben.

allgemein:

$$G = \frac{k}{(s+a)(s^2+bs+c)}$$

Wenn $p_{2,3}$ konjugiert komplexes Polpaar ist:

Polstellenform: $\rightarrow G = \frac{k}{(s-p_1)(s^2 - 2\operatorname{Re}(p_{2,3})s + |p_{2,3}|^2)}$

Zeitkonstantenform: $\rightarrow G = \frac{\frac{k}{a \cdot c}}{(\frac{1}{a}s + 1)(\frac{1}{c}s^2 + \frac{b}{c}s + 1)}$

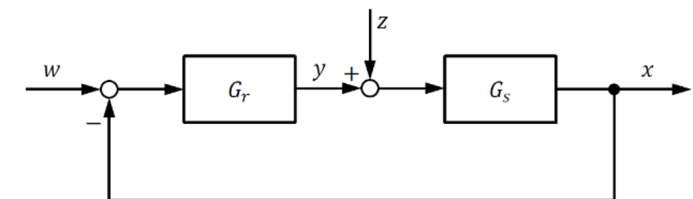
Polynomform: $\rightarrow G$ ausmultiplizieren [TR: Menu 3,3]

Dominante Pole

Regelstrecken mit dominanten Polen bzw. größeren Zeitkonstanten T_1 weisen ein langsames Zeitverhalten auf.

Der Pol ist näher der imaginären Achse.

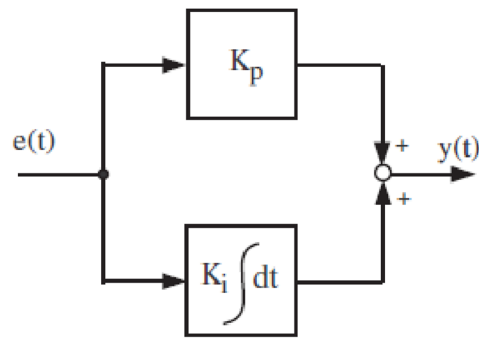
Störverhalten



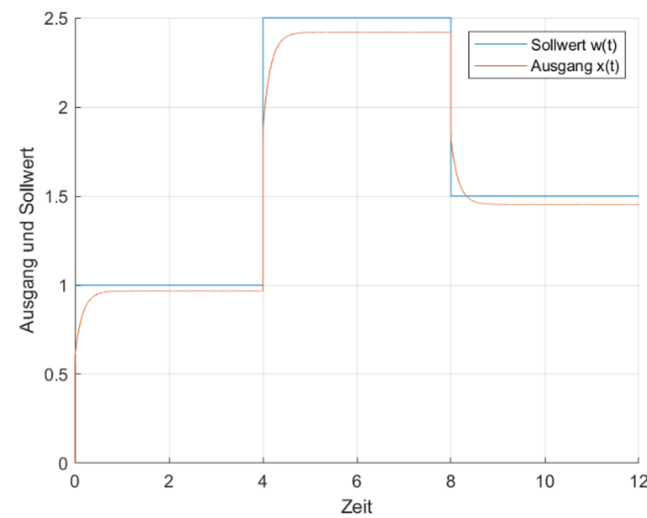
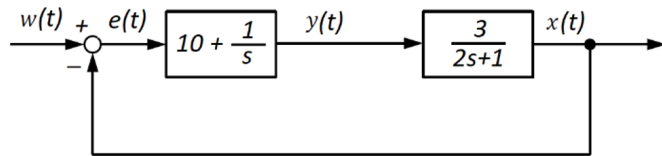
Für einen Regelkreis mit Störung z und $w = 0$ hat man

$$(-X(s)G_r(s) + Z(s))G(s) = X(s)$$

$$G_{zx} = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{G_s(s)}{1 + G_r(s)G_s(s)}$$



PI-Regler Beispiel:



PID-Regler

Kombination aus I-, P- und D-Anteil:

$$y(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^\infty e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Übertragungsfunktion:

$$G_r(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s \right)$$

oder:

$$G_r(s) = K_p \frac{T_v T_n s^2 + T_n s + 1}{T_n s}$$

PD-Regler

- Ein PD-Regler besitzt einen proportionalen und einen Differenzieranteil

$$y(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- K_d kann auch mit dem Parameter T_v als $K_d = K_p T_v$ ausgedrückt werden

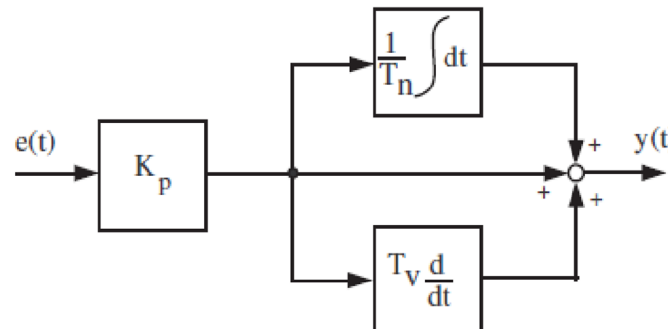
$$y(t) = K_p \left(e(t) + T_v \frac{de(t)}{dt} \right)$$

- Der Parameter T_v wird als Vorhaltzeit bezeichnet.

Übertragungsfunktion:

$$G_r(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = K_p + K_d s = K_p (1 + T_v s)$$

PD-Regler Beispiel: Für $G_s(s) = \frac{3}{2s+1}$ mit $G_r(s) = \frac{K_p + K_d}{T_f s + 1}$



wenn $w \neq 0$ hat man

$$X(s) = G_{zx}(s)Z(s) + G_{wx}(s)W(s) = \frac{G_s(s)}{1 + G_r(s)G_s(s)}Z(s) + \frac{G_r(s)G_s(s)}{1 + G_r(s)G_s(s)}W(s)$$

Bleibender Regelfehler bei Störgrösse $\hat{z}$:

1. Endsignal System $G_s(0)$
2. Endsignal Regler $G_r(0)$
3. $G_{zx}(0) = \frac{-G_s(0)}{1 + G_s(0)G_r(0)}$
4. Regelfehler: $x_\infty = G_{zx}(0) \cdot \hat{z}$

Polvorgabe

- Mit der Kompensationsmethode zielt man darauf ab, dominante Pole zuerst zu eliminieren
- Bleibende Reglerparameter dienen für die Kalibrierung
- Mit der Polvorgabe will man direkt Pole vorgeben, die gewissen dynamischen Eigenschaften entsprechen

Pole des geschlossenen Regelkreises sind die Nullstellen vom charakteristischen Polynom:

$$\phi(s) = s^2 + \frac{1 + K_p K_s}{T_1} s + \frac{K_p K_s}{T_1 T_n}$$

kann auch so geschrieben werden:

$$\phi(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2$$

auflösen nach K_p und T_n :

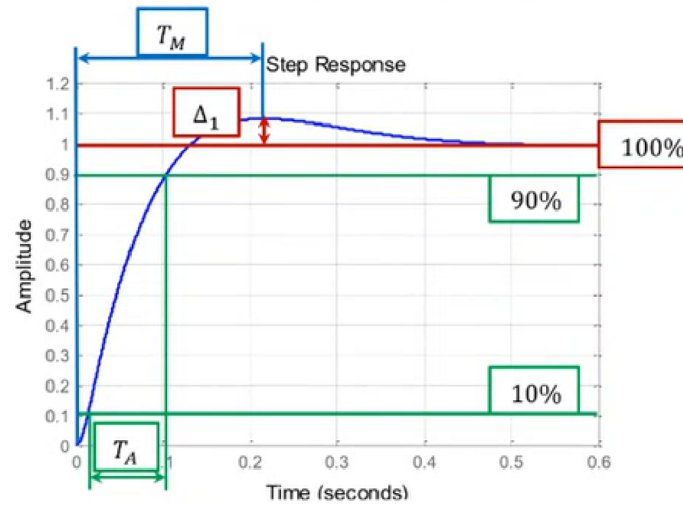
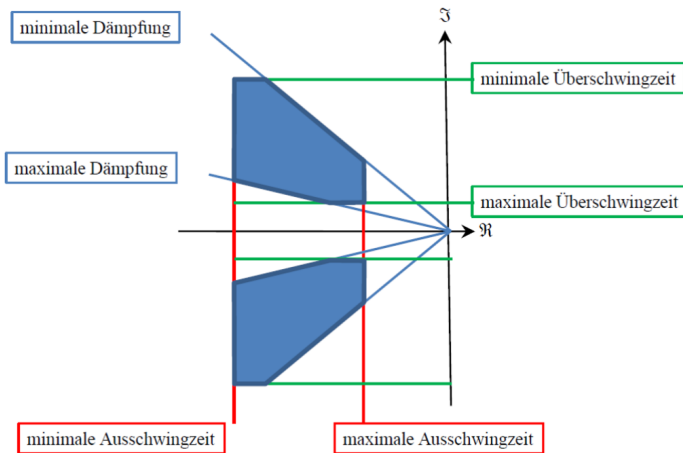
$$K_p = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)T_1 - 1}{K_s} \quad T_n = \frac{K_p K_s}{T_1 \lambda_1 \lambda_2}$$

bei konjugiert komplexem Polpaar:

$$\phi(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$K_p = \frac{2\xi\omega_n T_1 - 1}{K_s} \quad T_n = \frac{K_p K_s}{T_1 \omega_n^2}$$

Gewünschtes Polgebiet für dominantes Polpaar:



Reglerentwurf mit Polvorgabe

System:

$$G_S = \frac{k}{s^2 + as + b}$$

vorgegebene Polstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$:

1. Monische Form des Systems (erster Koeffizient = 1)
2. Gleichung 1:
3. Ordnung System: n , Ordnung Regler: m

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = 0$$

$$m = n - 1 \quad G_R = \frac{d_1 s + d_0}{s + c_0}$$

4. Ordnung Regelkreis $G_{CL} \rightarrow l = m + n$
5. charakteristisches Polynom Regelkreis, Gleichung 2:

$$\phi(s) = 1 + G_R G_s = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + (c_0 + a)s^2 + (ac_0 + b + kd_1)s + (bc_0 + kd_0) = 0$$

6. Koeffizientenvergleich mit Gleichung 1 und Gleichung 2 um Reglerparameter c_0, d_0, d_1 herauszufinden:

vorgegebene Parameter $\xi, \omega_0, D, \omega_d \dots$:

1. Monische Form des Systems (erster Koeffizient = 1)
2. $\omega_0 = 2\pi \cdot$ (Bandbreite $\approx$ Eigenfrequenz)
3. Weitere reelle Pole um Faktor f dynamischer: $\omega_d = f \cdot \omega_0$
4. Gleichung 1:

$$(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2)(s + \omega_d) = 0$$

$$s^3 + (2D\omega_0 + \omega_d)s^2 + (\omega_0^2 + 2D\omega_0\omega_d)s + \omega_d\omega_0^2 = 0$$

5. Ordnung Regelkreis $G_{CL} \rightarrow l = m + n$
6. Ordnung System: n , Ordnung Regler: m

$$m = n - 1 \quad G_R = \frac{d_1 s + d_0}{s + c_0}$$

7. charakteristisches Polynom Regelkreis, Gleichung 2:

$$\phi(s) = 1 + G_R G_s = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + (c_0 + a)s^2 + (ac_0 + b + kd_1)s + (bc_0 + kd_0) = 0$$

8. Koeffizientenvergleich mit Gleichung 1 und Gleichung 2 um Reglerparameter c_0, d_0, d_1 herauszufinden:

Einstellverfahren Reglerparameter

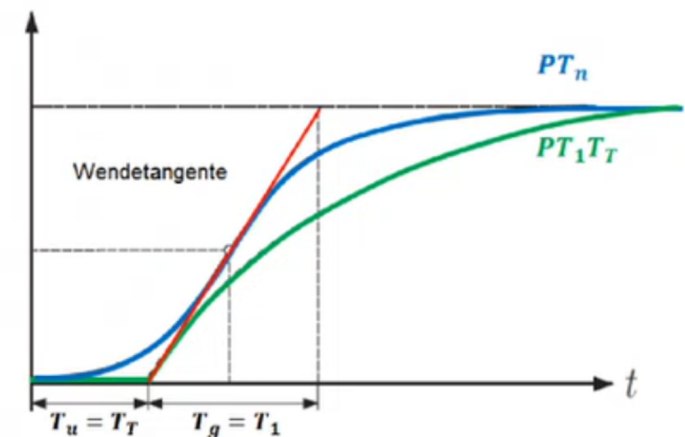
Anforderungen	$K_p \uparrow$	$T_n \uparrow$	$T_v \uparrow$
Anregelzeit	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
max. Überschwingweite	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Ausregelzeit	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Bleibende Abweichung	$\downarrow$	0	—

Reglerparameter:

- K_p und T_n sind fast immer gegensätzlich als Auswirkung.
- T_v hat prinzipiell fast immer eine positive Auswirkung, kann jedoch nicht direkt umgesetzt werden.
- Hinweise entsprechen allgemeinen Richtlinien, die mit ein bisschen Vorsicht zu geniessen sind

Verfahren 1: Ziegler und Nichols

- Viele Regelstrecken können durch eine Reihenschaltung eines PT1- Gliedes mit einem reinen Totzeitglied angenähert werden
- Die Parameter der Regelstrecken K_s, T_1 und T_t können der Sprungantwort entnommen werden
- Für eine PTn-Strecke kann die Verzugszeit T_u gleich der Totzeit T_t und die Ausgleichzeit T_g gleich der Zeitkonstante T_1 gesetzt werden



Für eine PTn-Strecke kann die Verzugszeit T_u gleich der Totzeit T_t und die Ausgleichszeit T_g gleich der Zeitkonstante T_1 gesetzt werden
Einstellungen wie folgt bestimmen:

P-Regler	$K_p = 1.0 \frac{T_1}{K_s T_t}$
PI-Regler	$K_p = 0.9 \frac{T_1}{K_s T_t} \quad T_n = 3.3 T_t$
PID-Regler	$K_p = 1.2 \frac{T_1}{K_s T_t} \quad T_n = 2.0 T_t \quad T_v = 0.5 T_t$

Verfahren 2: Ziegler und Nichols

- Basiert auf der kritischen Verstärkung des Regelkreises
- Zuerst wird die Strecke mit einem reinen P-Regler in Betrieb genommen
- nschliessend wird die K_p so weit erhöht, bis der geschlossene Regelkreis an den Rand der Instabilität kommt
- In diesem Zustand schwingt der Regelkreis mit einer Periode T_{krit}
- Die entsprechende Verstärkung ist $K_p = K_{krit}$

Die Parameter können wie folgt bestimmt werden:

P-Regler	$K_p = 0.50 K_{krit}$
PI-Regler	$K_p = 0.45 K_{krit} \quad T_n = 0.85 T_{krit}$
PID-Regler	$K_p = 0.60 K_{krit} \quad T_n = 0.50 T_{krit} \quad T_v = 0.12 T_{krit}$

CHR-Verfahren

- Wurde für eine PTn-Strecke ebenfalls empirisch ermittelt
- Kann zwischen der Verbesserung des Führungs- und des Störverhaltens unterscheiden
- Man kann zwischen einem aperiodischen Regelverlauf und einem Regelverlauf mit 20% Überschwingen wählen

	Aperiodischer Regelvorgang						Regelvorgang mit 20% Überschwinger					
	Führungs-verhalten			Stör-verhalten			Führungs-verhalten			Stör-verhalten		
	K_p	T_N	T_V	K_p	T_N	T_V	K_p	T_N	T_V	K_p	T_N	T_V
P	$\frac{0.3 T_g}{K_S T_u}$	–	–	$\frac{0.3 T_g}{K_S T_u}$	–	–	$\frac{0.7 T_g}{K_S T_u}$	–	–	$\frac{0.7 T_g}{K_S T_u}$	–	–
PI	$\frac{0.35 T_g}{K_S T_u}$	$1.2 T_g$	–	$\frac{0.6 T_g}{K_S T_u}$	$4 T_u$	–	$\frac{0.6 T_g}{K_S T_u}$	T_g	–	$\frac{0.7 T_g}{K_S T_u}$	$2.3 T_u$	–
PID	$\frac{0.6 T_g}{K_S T_u}$	T_g	$0.5 T_u$	$\frac{0.95 T_g}{K_S T_u}$	$2.4 T_u$	$0.42 T_u$	$\frac{0.95 T_g}{K_S T_u}$	$1.35 T_g$	$0.47 T_u$	$\frac{1.2 T_g}{K_S T_u}$	$2 T_u$	$0.42 T_u$

Latzel

- Einstellregeln nach Latzel stützen sich auf die Sprungantwort der Strecke
- Aus dem stationären Endwert bestimmt man die statische Verstärkung der Strecke K_s
- Die Zeitpunkte t_{10} , t_{50} und t_{90} , die 10%, 50% und 90% des stationären Endwertes entsprechen, muss man auch ablesen
- Der Wert $\mu = \frac{t_{10}}{t_{90}}$

μ	n	a_{10}	a_{50}	a_{90}
0.137	2	1.880	0.596	0.257
0.174	2.5	1.245	0.460	0.216
0.207	3	0.907	0.374	0.188
0.261	4	0.573	0.272	0.150
0.304	5	0.411	0.214	0.125
0.340	6	0.317	0.176	0.108
0.370	7	0.257	0.150	0.095
0.396	8	0.215	0.130	0.085
0.418	9	0.184	0.115	0.077
0.438	10	0.161	0.103	0.070

Mit den erhaltenen Werten kann man die mittlere Zeitkonstante T_m berechnen:

$$T_m = \frac{a_{10\%} t_{10\%} + a_{50\%} t_{50\%} + a_{90\%} t_{90\%}}{3}$$

PI:

n	$\frac{T_n}{T_m}$	$K_p K_s$ 10% Überschwingen	$K_p K_s$ 20% Überschwingen
2	1.55	1.650	2.603
2.5	1.77	1.202	1.683
3	1.96	0.884	1.153
4	2.30	0.656	0.812
5	2.59	0.540	0.654
6	2.86	0.468	0.561
7	3.10	0.417	0.497
8	3.32	0.379	0.451
9	3.53	0.349	0.413
10	3.73	0.325	0.384

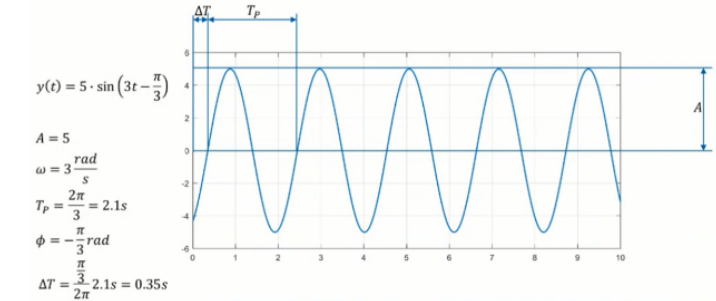
PID:

n	$\frac{T_n}{T_m}$	$\frac{T_v}{T_m}$	$K_p K_s$ 10% Überschwingen	$K_p K_s$ 20% Überschwingen
3	2.47	0.66	2.543	3.510
3.5	2.71	0.76	1.832	2.522
4	2.92	0.84	1.461	1.830
5	3.31	0.99	1.109	1.337
6	3.66	1.13	0.914	1.082
7	3.97	1.25	0.782	0.922
8	4.27	1.36	0.689	0.812
9	4.54	1.47	0.617	0.727
10	4.80	1.57	0.559	0.660

Fourier-Transformation

- Die Fourier-Transformation ist Zentral für die **Frequenzganganalyse**
- Methode basiert auf periodischen Signalen und deren Eigenschaften
- stellt eine Art Erweiterung der Fourierreihe dar

Sinus-Funktion:



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

A: Amplitude
 ω : Kreisfrequenz [$\frac{rad}{s}$]
 ϕ : Phasenverschiebung [rad]
 T_p : Periodendauer [s]
 ΔT : Zeitverschiebung [s]
 f : Frequenz [Hz]

$$\omega = 2\pi f \quad T_p = \frac{1}{f}$$

$$phi = -\frac{\Delta T}{T_p} 2\pi$$

$$y = A \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T_p} - 2\pi \frac{\Delta T}{T_p}\right)$$

Fourieranalyse:
Jedes periodische Signal lässt sich durch eine Summe von sinusförmigen Signalen darstellen. (siehe Schema AN3)

Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

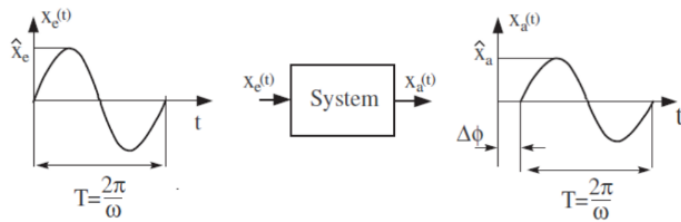
Inverse Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} dt$$

Frequenzgang

Umwandlung der Übertragungsfunktion: Bsp. PT1-Glied:

$$G(s) = \frac{K_s}{T_1 s + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{K_s}{T_1 j\omega + 1}$$



- Der Frequenzgang ist eine Eigenschaft eines linearen und zeitinvarianten Systems
- Hängt von der Frequenz ω und nicht von der Zeit ab
- Beschreibt den Zusammenhang zwischen den Ein- und Ausgangssignalen des Systems, wenn das Eingangssignal eine Sinusfunktion ist
- Der Frequenzgang wird erst definiert, wenn das Ausgangssignal sich in einem eingeschwungenen Zustand befindet
- Bei diesem Zustand ist der Verlauf des Ausgangssignals auch sinusförmig
- Ausgangssignal hat die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal, aber mit einer anderen Amplitude und Phasenlage
- Kann direkt von der Übertragungsfunktion hergeleitet werden

Frequenzgang bestimmen:

Eingang: $x_e(t) = \hat{x}_e \sin(\omega t)$

Exponentialdarstellung: $\hat{x}_e(t) = \hat{x}_e e^{j\omega t}$

Ausgang: $x_a(t) = \hat{x}_a \sin(\omega t + \phi)$

Exponentialdarstellung: $\hat{x}_a(t) = \hat{x}_a e^{j\omega t + \phi}$

Quotient:

$$G(j\omega) = \frac{\hat{x}_a(t)}{\hat{x}_e(t)} = \frac{\hat{x}_a e^{j\phi}}{\hat{x}_e}$$

Amplitudengang: $|G(j\omega)|$
Phasengang: $\angle G(j\omega)$

Eigenschaften des Frequenzganges und Frequenzänderung:

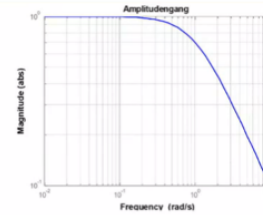
1. Frequenz ist immer dieselbe
2. Transiente, dann schwingt das System ein
3. Mit steigender Frequenz hat man eine Reduktion der Amplitude
4. Mit steigender Frequenz wird die Amplitude beliebig klein
5. Mit steigender Frequenz hat man eine Phasenverschiebung nach rechts
6. Mit steigender Frequenz hat man eine Phasenverschiebung die sich $-\pi/2$ annähert

Bodediagramme und Dezibel

Bodediagramme:

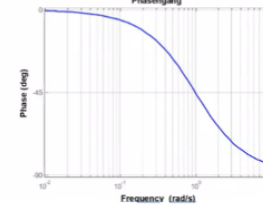
Amplitudengang:

- Amplitude vs. Frequenz
- Verhältnis der Amplituden des Ein- und des Ausgangssignales



Phasengang:

- Phase vs. Frequenz
- Phasenlage zwischen Ein- und Ausgangssignal



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} \right) = 20 \log_{10} (|G(j\omega)|)$$

Der Amplitudengang für die PT1-Strecke:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{K_s}{j\omega T_1 + 1} \right| = \frac{K_s}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}}$$

Die entsprechende Phase:

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{K_s}{j\omega T_1 + 1} = -\arctan(\omega T_1)$$

Elementare Bode-Glieder

P-Glied: $G(s) = K$

$$|G(j\omega)| = K \Rightarrow 20 \log_{10}(K), \quad \varphi = 0^\circ$$

I-Glied: $G(s) = \frac{K}{s}$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega} \Rightarrow -20 \log_{10}(\omega), \quad \varphi = -90^\circ$$

D-Glied: $G(s) = Ks$

$$|G(j\omega)| = K\omega \Rightarrow +20 \log_{10}(\omega), \quad \varphi = +90^\circ$$

PT1-Glied: $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad \varphi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

PT2-Glied: $G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2}}, \quad \varphi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \right)$$

Weitere Glieder

PI-Glied:

$$|G(j\omega)| = K \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega T_i} \right)^2}, \quad \arg(G(j\omega)) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega T_i} \right)$$

PD-Glied:

$$|G(j\omega)| = K \sqrt{1 + (\omega T_d)^2}, \quad \arg(G(j\omega)) = \tan^{-1}(\omega T_d)$$

PID-Glied: Übertragungsfunktion:

$$G(j\omega) = K \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i} + j\omega T_d \right)$$

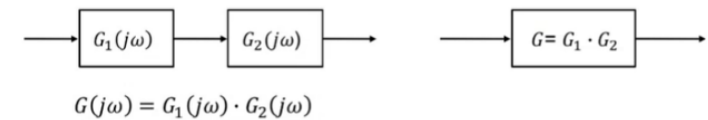
Amplitude:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega T_i} \cdot \sqrt{1 + (\omega T_i(1 + \omega T_d))^2}$$

Phase:

$$\arg(G(j\omega)) = \tan^{-1}(\omega T_i(1 + \omega T_d)) - 90^\circ$$

Serienschaltung von Systemen



Gesamtsystem:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j(\phi_1 + \phi_2)} = A e^{j\phi}$$

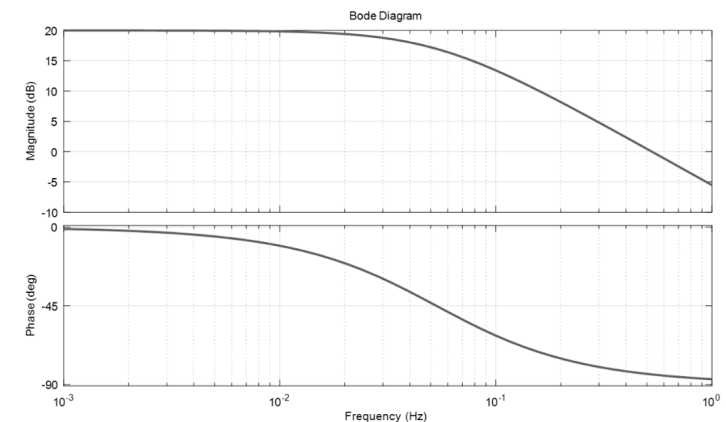
Amplitude und Phase:

$$20 \log_{10} A = 20 \log_{10}(A_1 A_2) = 20 \log_{10} A_1 + 20 \log_{10} A_2$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} + |G_2(j\omega)|_{dB}$$

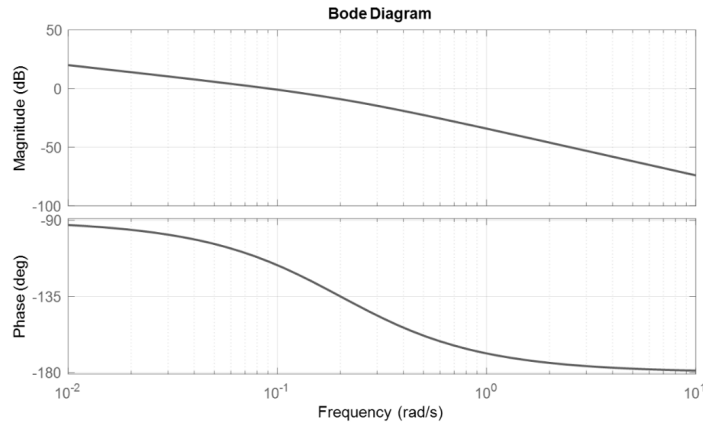
$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

Systemverhalten aus Bodediagrammen



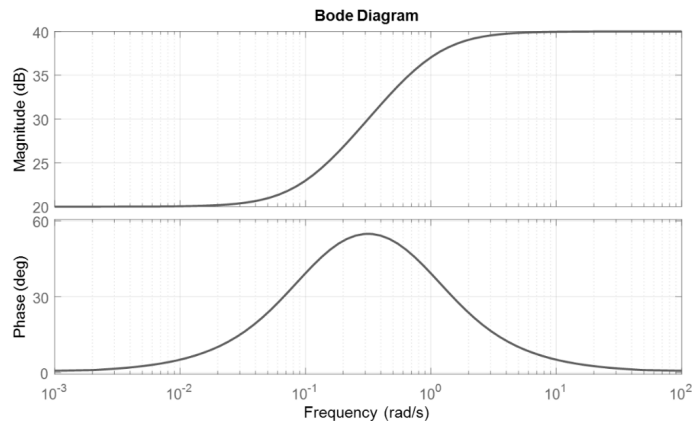
- PT1-Verhalten
- Endwert (links) = 20dB
- $20 \log_{10}(K_s) = \text{Endwert}$
- Eckfrequenz f_1 bei Phase = $-45^\circ \rightarrow \omega_1 = 2\pi f_1$
- $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$
- Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K_s}{T_1 s + 1}$$



- IT1-Verhalten
- Start mit negativer Steigung von $-20 \frac{dB}{D} \rightarrow$ Integrierend: $\frac{w_r}{s}$
- Zweite Steigung $\rightarrow$ Knick nach unten $\rightarrow$ Polstelle: $\frac{1}{\omega_1 s + 1}$
- Übertragungsfunktion:

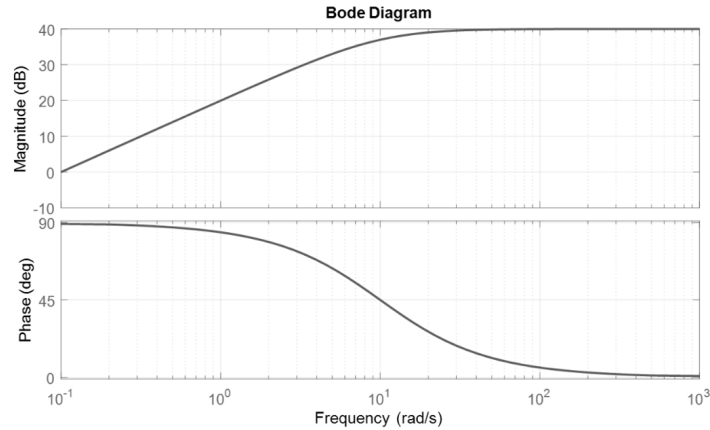
$$G(s) = \frac{\omega_r}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\omega_1} s + 1}$$



- PD-T1 Verhalten
- Endwert: 20dB
- $20 \log_{10}(K_s) = \text{Endwert}$

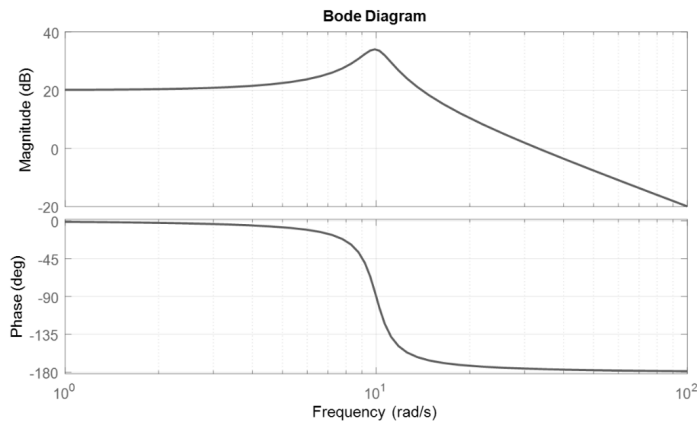
- Anfangswert: 40dB
- $20 \log_{10}(G(s \rightarrow \infty)) = \text{Anfangswert}$
- Knick nach oben $\rightarrow$ Nullstelle
- bei $\omega_1 = 0.1\text{rad/s}$: $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$
- Knick nach unten $\rightarrow$ Polstelle
- bei $\omega_2 = 1\text{rad/s}$: $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$
- Übertragungsfunktion:

$$G(s) = K_s \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$



- Endwert: 0dB
- Anfangswert: $20 \log_{10}(G(s \rightarrow \infty)) = \text{Anfangswert}$
- Durchtrittsfrequenz: ω_r bei $0.1\text{rad/s} \rightarrow T_r = \frac{1}{\omega_r}$
- Eckfrequenz: $\omega_1 \rightarrow T_1 = \frac{1}{\omega_1}$
- Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{T_r s}{T_1 s + 1}$$

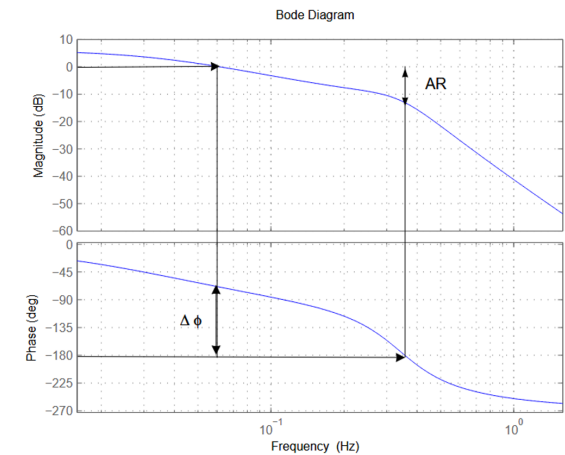


- PT2-Verhalten
- Delta des Zipfels = $20 \log_{20}(\frac{1}{2\xi})$
- ω_n bei Zipfel
- Endwert: $20\text{dB} \rightarrow 20 \log_{10}(K_s) = \text{Endwert}$
- Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K_s \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

Phasen- und Amplitudenreserve

Die Amplitudenreserve AR entspricht im Amplitudengang dem Abstand zu 0dB bei derjenigen Frequenz, bei welcher die Phase $\pm 180^\circ$ erreicht. Die Phasenreserve $\Delta\phi$ entspricht im Phasengang dem Abstand zu $\pm 180^\circ$ bei derjenigen Frequenz, bei welcher die Amplitude 0dB erreicht.



Nyquist Diagramm

Die Amplitudenreserve entspricht dem Kehrwert des Abstandes vom Nullpunkt zum Schnittpunkt der Ortskurve mit der horizontalen Achse. Die Phasenreserve entspricht dem Winkel zwischen Horizontaler Achse und dem Schnittpunkt der Ortskurve mit dem Einheitskreis.

