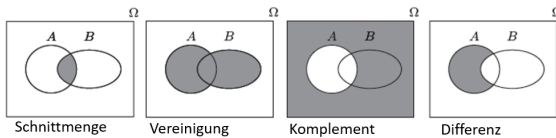


Einführung

Grundbegriffe	
Zufallsexperiment	Versuch, bzw. eine Situation, wo das Ergebnis nicht deterministisch vorbestimmt ist.
Ergebnis (Elementarereignis)	Ausgang eines Zufallsexperiments
Ergebnisraum Ω	Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments
Mächtigkeit $ \Omega $	Anzahl Elemente im Ergebnisraum Ω
Ereignis A	Teilmenge mehrerer Ergebnisse

Mengenoperationen	
A^C	Gegenereignis / Komplement von A
$A \cap B$	Schnittmenge
$A \cup B$	Vereinigung
$A \setminus B$	Differenz
A und B disjunkt	falls $A \cap B = \emptyset$ (Schnittmenge ist leer)



Axiome von Kolmogorov	
Eine Wahrscheinlichkeit muss die folgenden 3 Axiome erfüllen:	
Axiom 1:	$P(A) \geq 0$ für jedes Ereignis (A)
Axiom 2:	$P(\Omega) = 1$
Axiom 3:	Falls $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Rechenregeln	
$P(A) = 1 - P(A^C)$	
Wenn $A \subseteq B$, so gilt $P(A) \leq P(B)$	
Additionsatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls A und B disjunkt	

Modell von Laplace	
Annahme: Alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich	
$P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$	

Kombinatorik

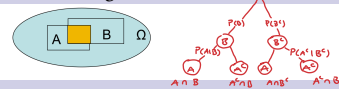
Gesucht ist die Anzahl Möglichkeiten eine Auswahl von k Objekten aus insgesamt n Objekten anzuordnen bzw. auszuwählen.

Kombinatorik		
	Ohne Wiederholung bzw. Zurücklegen	Mit Wiederholung bzw. Zurücklegen
Auswahl: $k = n$ Reihenfolge wichtig	Permutation ohne Wiederholung $z = n!$	Permutation mit Wiederholung $z = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_g!}$
Auswahl: k Reihenfolge wichtig	geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen (Es gilt: $k < n$) $z = \frac{n!}{(n-k)!} = nPr$	geordnete Stichprobe mit Zurücklegen (k beliebig) $z = n^k$
Auswahl: k Reihenfolge unwichtig	ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen (Es gilt: $k < n$) $z = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = nCr$	ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen (k beliebig) $z = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

R: Fakultät $n! = \text{factorial}(n)$ und Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \text{choose}(n, k)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

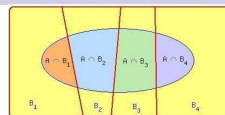
Definition	
Frage:	Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit von A, wenn B eingetreten ist?



Wahrscheinlichkeit von A gegeben B:	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
	$A \subseteq B$

Rechenregeln	
Es gelten die Regeln für Wahrscheinlichkeiten:	
Bsp: $P(A^C B) = 1 - P(A B)$	
Achtung: $P(A B) \neq 1 - P(A B^C)$	
$P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$	

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit	
Annahme	$B_1, B_2, \dots, B_k$ paarweise disjunkt und $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = \Omega$



$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Satz von Bayes	
Die bedingte Wahrscheinlichkeit umkehren:	

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C)$$

Verknüpft mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^k P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

Unabhängigkeit

stochastisch unabhängig $\rightarrow$ Korrelation = 0, aber nicht umgekehrt!

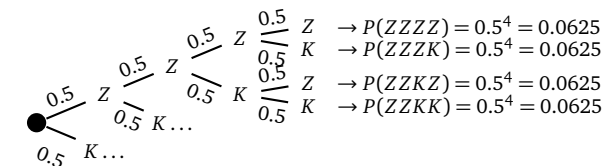
Definitionen	
Zwei Ereignisse A und B heissen stochastisch unabhängig, falls	
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	
Oder mittels bedingter Wahrscheinlichkeit	
$P(A B) = P(A)$ $P(B A) = P(B)$	
Eintreten von B hat keinen Einfluss auf A	

Ereignisbäume

Mit dem Ergebnisbaum können mehrstufige Zufallsexperimente dargestellt werden. Jede Kante von der Wurzel bis zu einem Endknoten entspricht einem Elementarereignis

Rechenregeln	
Wahrscheinlichkeit an den Endknoten: Multiplikation der W'keiten entlang des Pfades (Produktregel).	
Endwahrscheinlichkeiten aller Blätter addieren sich zu 1	
Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses welches durch mehrere Pfade beschrieben ist, ist gleich der Summe der einzelnen Blätter (Summenregel)	

Beispiel: 4-facher Münzwurf



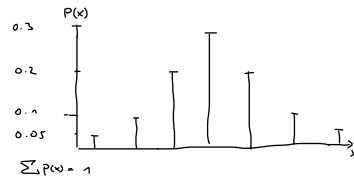
$$P(\text{Erste 3 Würfe Z}) = P(ZZZZ) + P(ZZZK) = 0.0625 + 0.0625$$

Verteilungen

Das Ergebnis eines Zufallsexperiments soll durch eine einzelne Zahl beschrieben werden. Hierfür haben wir Zufallsvariablen eingeführt:

Definition

Eine **Zufallsvariable** X ist eine Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sie ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments einen Wert zu.



Diskret und Stetig

	Diskrete Zufallsvariable	Stetige Zufallsvariable
Wertebereich	endlich oder unendlich abzählbar viele Werte an $W = \{x_1, x_2, \dots\}$	kann jeden beliebigen Wert eines Intervalls annehmen
Wahrscheinlichkeitsverteilung Dichte	Zu jedem möglichen Wert x_i gibt die Funktion die entsprechende Wahrscheinlichkeit p_i an: $P(X = x_i) = p_i$ Es gilt: $\sum_i p_i = 1$	Funktion $f(x) \geq 0$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ Achtung: $f(x)$ gibt keine W'keiten an, $f(x) > 1$ möglich
Kumulative Verteilungsfunktion	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = [F(u)]_{-\infty}^x$
Wahrscheinlichkeiten	$P(X = x_k) = p_k$	$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(u) du = F(b) - F(a)$
Erwartungswert (Lagemass, was man "im Schnitt" bei unendlich vielen Realisierungen von X erhält)	$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ <i>← konvergenz Verteilung</i> <i>← unkonvergenz Verteilung</i>
Varianz (Streuungsmaß, "Breite" der Verteilung)	$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E[X])^2 p_i$	$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$

Transformationen

Dichte funktion: $f_X(x) = F_X'(x)$

Gegeben: Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$

Gesucht: Verteilung der Zufallsvariable $Y = g(X)$ $Y = X^2 \Rightarrow g(x) = x^2$

Transformationsfunktion $g(x)$: Inverse: $g^{-1}(y)$

Transformationsregeln

Wenn g streng monoton **abnehmend** (d.h. $u > v \Rightarrow g(u) < g(v)$), dann gilt:

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Wenn g streng monoton **zunehmend** (d.h. $u > v \Rightarrow g(u) > g(v)$), dann gilt:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_X(u) du$$

Transformation der Dichte

(egal, ob g monoton steigend oder fallend):

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Standardisierung: Transformiert man X mit der linearen Transformationsfunktion $g(x) = \frac{x - \mu}{\sigma}$ erhält man solch eine Zufallsvariable Z mit $E(Z) = 0$ und $Var(Z) = 1$.

Rechenregeln Erwartungswert und Varianz

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b \quad E(2 \cdot X) = 2 \cdot \mu$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X) \quad Var(2 \cdot X) = 2^2 \cdot \sigma^2$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

Falls X und Y unabhängig, dann ist $Cov(X, Y) = 0$

Summe von Zufallsvariablen

Summe von Zufallsvariablen

Die Summe S von **unabhängigen** Zufallsvariable $X_1, X_2, \dots, X_n$ kann in folgenden Fällen direkt bestimmt werden:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sind normalverteilt

$$\Rightarrow S \sim \mathcal{N}(\mu_{x1} + \mu_{x2} + \dots + \mu_{xn}, \sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \dots + \sigma_{xn}^2)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sind poisson-verteilt

$$\Rightarrow S \sim \text{Pois}(\lambda_{x1} + \lambda_{x2} + \dots + \lambda_{xn})$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sind binomialverteilt mit gleichem p

$$\Rightarrow S \sim \text{Bin}(n_{x1} + n_{x2} + \dots + n_{xn}, p)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sind exponentialverteilt mit gleichem λ

$$\Rightarrow S \sim G(n, \lambda)$$

Grenzwertsätze

Die nachfolgenden Gesetze gelten für Zufallsvariablen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängig mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$ für alle i

$\sqrt{n}$ Gesetz

Die Standardabweichung des Mittelwerts nimmt mit $1/\sqrt{n}$ ab:

$$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Gesetz der grossen Zahlen

Das arithmetische Mittel nähert sich mit wachsender Stichproben-grösse (n) dem Erwartungswert: **konvergiert zu μ**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu$$

Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS)

Die **Summe oder der Mittelwert** der Zufallsvariablen X_i ist approximativ normalverteilt: **(identisch verteilt, unabhängig)**

$$\text{Mittel: } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\text{Summe: } \text{bzw. } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

Beispiel: Ladegewicht eines Lieferwagens

Der Lieferwagen wird mit 146 Kartoffelsäcken (erwartetes Gewicht 10.25 kg und Varianz 1/12) beladen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Beladen eines Lieferwagens mit 146 Säcken das zulässige Ladegewicht von 1500 kg überschritten wird?

Gesamtmenge auf Lieferwagen: $S_{146} = \sum_{i=1}^{146} X_i$

wobei $X_i = i$ -ter Kartoffelsack mit $E(X_i) = 10.25$ und $Var(X_i) = 1/12$.

Wegen ZGWS ergibt sich für S_{146} die folgende approximative

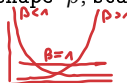
Verteilung: $S_{146} \sim \mathcal{N}(146 \cdot 10.25, 146 \cdot 1/12)$

Damit lässt sich dann die Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$P(S_{146} > 1500) = 1 - P(S_{146} \leq 1500)$$

$$= 1 - \text{pnorm}(1500, \text{mean}=146*10.25, \text{sd}=\text{sqrt}(146/12))$$

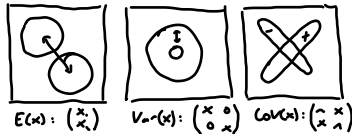
Diskrete Verteilungen					
Verteilung	W'keitsfunktion $P(X=x)$	Wertebereich	R (.. = d/p/q/r)	Erwartungswert und Varianz	Anwendung
Diskrete Gleichverteilung	$P(X = x_i) = p$	$\{x_1, \dots, x_k\}$	<code>werte <- c(x1, x2, ... xk)</code> <code>sample(werte, size = 1)</code>	$E(X) = \sum_i x_i p$ $Var(X) = \sum_{i=1} (x_i - E[X])^2 p$	Alle Ereignisse sind gleich wahrscheinlich. Bsp: Würfeln
Bernoulli $X \sim \text{Bernoulli}(p)$	$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	<code>sample(0:1, size=1,</code> <code>probs = c(1-p, p)</code>	$E(X) = p$ $Var(X) = p(1 - p)$	Indikator, ob ein Ereignis eintritt. Bsp: Münzwurf, Würfeln einer 6
Binomial $X \sim \text{Binom}(n, p)$	$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	<code>..binom(.., size=n, prob=p)</code>	$E(X) = np$ $Var(X) = np(1 - p)$	Anzahl Erfolge in n unabhängigen Bernoulli-Versuchen . Bsp: Anzahl Studenten, die Prüfung bestehen
Poisson $X \sim \text{Pois}(\lambda)$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\{0, 1, \dots, \infty\}$	<code>..pois(.., lambda = λ)</code>	$E(X) = \lambda$ $Var(X) = \lambda$	Anzahl Ereignisse k mit konstanter Eintreffrate λ . <i>über Zeitraum, an einem Ort</i> . Bsp: Anzahl Kunden am Postschalter pro Stunde
Geometrisch $X \sim \text{Geom}(p)$	$P(X = k) = p(1 - p)^k$	$\{0, 1, \dots, \infty\}$	<code>..geom(.., prob = p)</code>	$E(X) = (1 - p)/p$ $Var(X) = (1 - p)/p^2$	Anzahl Misserfolge k bis der erste Erfolg auftritt. Bsp: Anzahl Fehlwürfe, bis man das Haus verlassen bei Eile mit Weile kann
Negativ Binomial $X \sim \text{NBinom}(r, p)$	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1 - p)^k$	$\{0, 1, \dots, \infty\}$	<code>..nbinom(.., size=r, prob=p)</code>	$E(X) = r \cdot (1 - p)/p$ $Var(X) = r \cdot (1 - p)/p^2$	Anzahl Misserfolge bis zum r-ten Erfolg . Bsp: Anzahl erfolgloser Angelversuche bis man 2 Fische gefangen hat
Hypergeometrisch $X \sim \text{Hyp}(m, n, k)$	$P(X = j) = \frac{\binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}}$	$\{0, 1, \dots, \min(k, m)\}$	<code>..hyper(.., m=m, n=n, k=k)</code>	$E(X) = km/(m + n)$ $Var(X) = k \cdot \left(\frac{m}{m+n}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) \cdot \left(\frac{n+m-k}{m+n-1}\right)$	Anzahl Erfolge j in einer Stichprobe der Grösse k bei einer Grundgesamtheit von m (Erfolgselemente) und n (Nicht-Erfolgen). Bsp: Anzahl defekter Schrauben in einer Stichprobe. <i>Wie binomial, nur mit verändernder Wahrscheinlichkeit (ziehen, ohne zurücklegen)</i>

Stetige Verteilungen				
Verteilung	Dichte $f(x)$	Verteilung $F(X)$	Kennzahlen und Zufallszahlen	Anwendung
Uniform $X \sim \text{Unif}([a, b])$	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a \\ 1/(b-a) & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{falls } x > b \end{cases}$ R: <code>dunif(x, min=a, max=b)</code>	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{falls } x > b \end{cases}$ R: <code>punif(q, min=a, max=b)</code>	$E(X) = (a+b)/2$ $\text{Var}(X) = (b-a)^2/12$ Quantile: R: <code>qunif(p, min=a, max=b)</code> Zufallszahlen: R: <code>runif(n, min=a, max=b)</code>	Wenn alle Werte in einem Bereich gleich wahrscheinlich sind. Bsp: Wartezeit auf Bus, der exakt alle 8 Minuten fährt
Exponential $X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ R: <code>dexp(x, rate = \lambda)</code>	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ R: <code>pexp(q, rate = \lambda)</code> <i>λ auf Zeiteneinheit bezogen wenn E(x) = 100h → λ = 1/100</i>	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ Quantile: R: <code>qexp(p, rate = \lambda)</code> Zufallszahlen: R: <code>rexp(n, rate = \lambda)</code>	Dauer von zufälligen Zeitintervallen (zwischen 2 Poisson-Ereignissen) Besonderheit: Gedächtnislosigkeit, d.h. $P(X > s+t X > s) = P(X > t)$ <i>Lebensdauer Bauteile (Ausfallrate konstant)</i> Bsp: Wartezeit für Kunden, Zeit zwischen Annahmen <i>Callcenter</i>
Weibull $X \sim \text{Weibull}(\beta, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda \beta (\lambda x)^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ R: <code>dweibull(x, shape=\beta, scale=1/\lambda)</code>	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda x)^\beta} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ R: <code>pweibull(q, shape=\beta, scale=1/\lambda)</code> <i>rate = λ β = Formpara.</i> 	$E(X) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + 1/\beta)$ $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} [\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)]$ Quantile: R: <code>qweibull(p, shape=\beta, scale=1/\lambda)</code> Zufallszahlen: R: <code>rweibull(n, shape=\beta, scale=1/\lambda)</code> $\lambda = \Gamma(1 + 1/\beta) / E(x)$	Dauer von zufälligen Zeitintervallen mit Berücksichtigung der Lebensphase ($\beta < 1$ Fehlerrate abnehmend, $\beta = 1$ Fehlerrate konstant und $\beta > 1$ Fehlerrate zunehmend). Bsp: Lebensdauer von Bauteilen und elektrischen Komponenten <i>(Ausfallrate nicht konstant)</i>
Gamma $X \sim G(k, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} \cdot x^{k-1} \cdot \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ R: <code>dgamma(x, shape=k, rate=\lambda)</code>	$F(x) = \int_0^x e^{-\lambda z} \cdot z^{k-1} \cdot \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} dz$ (keine geschlossene Form möglich) <i>Shape = Anzahl exp. verteilte Ereignisse</i> R: <code>pgamma(q, shape=k, rate=\lambda)</code> <i>rate = λ 1/E(x) von einem Ereignis</i>	$E(X) = \frac{k}{\lambda}$ $\text{Var}(X) = \frac{k}{\lambda^2}$ Quantile: R: <code>qgamma(p, shape=k, rate=\lambda)</code> Zufallszahlen: R: <code>rgamma(n, shape=k, rate=\lambda)</code>	Summe von exponentialverteilten Zufallsvariablen <i>k-fache Wiederholung von exp. Ereignissen</i> Bsp: Wartezeit an einer Schalterschleife, Kosten $\sum_{i=1}^k x_i \sim \text{Exp}(\lambda)$
Normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$ R: <code>dnorm(x, mean=\mu, sd=\sigma)</code>	$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dz$ (keine geschlossene Form möglich) R: <code>pnorm(q, mean=\mu, sd=\sigma)</code>	$E(X) = \mu$ $\text{Var}(X) = \sigma^2$ Quantile: R: <code>qnorm(p, mean=\mu, sd=\sigma)</code> Zufallszahlen: R: <code>rnorm(n, mean=\mu, sd=\sigma)</code>	Abweichungen von (Mess-) Werten, Näherung bei grossen Stichproben Bsp: Körpergrösse, Messfehler, Abweichungen vom Soll einer der Produktion, Füllmenge von Packungen, Intelligenz
Lognormal $X \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\log(x)-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$ R: <code>dlnorm(x, mean=\mu, sd=\sigma)</code>	$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma z \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\log(z)-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dz$ (keine geschlossene Form möglich) R: <code>plnorm(q, mean=\mu, sd=\sigma)</code>	$E(X) = e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})}$ $\text{Var}(X) = e^{(2\mu + \sigma^2)}(e^{\sigma^2} - 1)$ Quantile: R: <code>qlnorm(p, mean=\mu, sd=\sigma)</code> Zufallszahlen: R: <code>rlnorm(n, mean=\mu, sd=\sigma)</code>	rechtschiefe Messdaten mit nur positiven Werten Bsp: Geflogene Meilen, Lohn <i>$X \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$</i>

... $\lnorm(1/\mu_x, 1/\sigma_x^2)$

Bivariate Normalverteilung

Definitionen
Notation mit Erwartungswert μ und Kovarianzmatrix Σ :
$(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma\right) = \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ $\rho = \text{Korrelation}$
mit $\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Var}(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ $\Sigma = \text{matrix}(\mathbf{c}(\dots))$
Dichte:
$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det[\Sigma]}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}\right)$
library(mvtnorm)
R: <code>rmvnorm(..., mean = μ, sigma = Σ)</code>
Randdichte: Es gilt $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
Dies ist unabhängig von der Korrelation ρ.
Bedingte Dichte: Die bedingte Verteilung von X_1 gegeben $X_2 = x_2$ ist eine Normalverteilung:
$(X_1 X_2 = x_2) \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2))$



$$P(X \leq x; Y \leq y):$$

wenn X, Y stochastisch unabhängig:

$$- f(x, y) = f(x) \cdot f(y) \quad (\text{pnorm}(\dots, \mu, \sigma) \cdot \text{pnorm}(\dots, \mu, \sigma))$$

wenn stochastisch abhängig:

$$- \text{pmvnorm}(\text{lower} = c(-1, -1), \text{upper} = c(0, 0), \mu, \Sigma)$$

Multivariate Verteilungen

Stetige multivariate Verteilung

Für X und Y zwei stetige Zufallsvariablen ist die gemeinsame Dichtefunktion eine nicht negative Funktion f_{XY} , für die gilt

$$P(X \in [a, b], Y \in [c, d]) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y) dy dx$$

Diskrete multivariate Verteilung

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist definiert als

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

die für jedes Paar (x_i, y_j) die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der diese beiden Werte gleichzeitig realisiert werden.

Weitere Begriffe

Verteilungsfunktion: diskret:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} p(x_i, y_j)$$

erst innere D-Funktion integrieren (andere Variable als konstante) dann übrige Variable summieren als andere Funktion integrieren.

$$\text{stetig: } \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(x, y) dy dx$$

Randdichte von X (analog für Y)

$$\text{diskret: } p_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{XY}(x, y_j)$$

Für $f(x)$ über y integrieren, für $f(y)$ über x integrieren.

$$\text{stetig: } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Bedingte Dichte:

$$\text{diskret } p_{X|Y}(x_i | y_j) = \frac{p_{XY}(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}$$

$$\text{stetig: } f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Unabhängigkeit

Wenn X und Y unabhängig, gilt:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Stammfunktionen

Potenzfunktionen:

$$\int k dx = kx$$

$$\int x^s dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1}$$

$$\int (ax + b)^s = \frac{1}{a(s+1)} (ax + b)^{s+1}$$

Wurzel

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$$

Log:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(x)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log(ax+b)$$

$$\int \log(x) dx = x \log(x) - x$$

Exponentialfunktion:

$$\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx}$$

Summe:

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$P(X \leq x \cap Y \leq y) = \frac{P(X \leq x \cap Y \leq y)}{P(Y \leq y)} = \text{pnorm}(x, y) : \text{pnorm}(y) \text{ oder } \text{pnorm}(x=0, Y \leq y)$$

Stochastische Simulation

Mit einer stochastischen Simulation bilden wir ein System oder einen Prozess nach, welcher zufallsbedingt ist. Zufallsbedingt meint:

- Faktoren eine Rolle spielen, die nur mit Messfehlern behaftet erhoben werden können
- deterministische Phänomene zu komplex für eine exakte Modellierung sind

Ziel ist es, das Verhalten des Systems oder des Prozesses zu verstehen und Erkenntnisse daraus für die Realität zu erlangen.

Allgemeines Vorgehen

1. Fragestellung, d.h. Zielgrösse definieren
2. Wesentliche Einflussgrössen des Systems identifizieren
3. Gegenseitige Beziehung der Einflussgrössen und Zielgrösse bestimmen
4. Implementierung des stochastischen Modells
5. Erzeugung einer Stichprobe für die Zielgrösse
6. Ergebnisbeurteilung

Simulation in R

Beispiel: Fischen

1. Was ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 3 Fische zu fangen?
Zielvariable: Anzahl gefangene Fische in 3 Stunden
2. Einflussfaktoren: Wetter, Angelstelle, Angelfähigkeit
3. Wetter: $P(\text{schön}) = 0.6$, $P(\text{schlecht}) = 0.4$
 X = Anzahl Fische an der Angelstelle pro Stunde $\sim \text{Pois}(\lambda)$
wobei λ abhängig vom Wetter:
 $\lambda(\text{w=schön}) = 10.875$,
 $\lambda(\text{w=schlecht}) = 7.349$
Angelfähigkeit: $p = 0.11$
 Y = Anzahl gefangender Fische $\sim \text{Bin}(X, p)$
- 4.-6. siehe R-Code unterhalb der Box

```
set.seed(2354) # Für Reproduzierbarkeit
N <- 10000 # Anzahl Simulationsrunden
# Vektor mit simulierter Zufallszahlen für die Zielgrösse
NFang <- rep(NA, N)
# Simulation hier mittels For-Schleife
for (i in 1:N){
  # Hier den Prozess programmieren:
  Wetter <- sample(c("schön","schlecht"), size = 1,
                  prob = c(0.6,0.4))
  lambda <- ifelse(Wetter == "schön", 10.875, 7.349)
  AnzahlFische <- rpois(1, lambda)
  NFang[i] <- rbinom(1, size = AnzahlFische, prob = 0.11)
}
# Auswertung der simulierten Zufallszahlen
# Hier mittels relativer Häufigkeit
sum(NFang >= 3) / N
```

Inversionsmethode

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)$$

Mithilfe von gleichverteilten Zufallszahlen lassen sich Zufallszahlen für andere Verteilungen durch geeignete Transformation erzeugen:

Inversionsmethode $F^{-1}(u) = g(u) \Rightarrow g(u)$

Wenn man auf eine Zufallsvariable $U \sim \text{Unif}([0, 1])$ eine monotone Transformation $g(\cdot)$ anwendet, so ist die Umkehrfunktion g^{-1} die Verteilung der entstehenden Zufallsvariable.

Vorgehen

Gegeben: Zufallsvariable $U \sim \text{Unif}([0, 1])$.
Wahl einer Transformation: Umkehrfunktion der Verteilung
d.h. $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow g(x) = F_X^{-1}(x) = (\log(1 - x)) / (-\lambda)$.
Die Zufallszahlen erhält man dann mittels $Y = g(U)$, da
 $F_Y(y) = F_U(g^{-1}(y)) = g^{-1}(y) = 1 - e^{-\lambda y}$

Beispiel: Uniform nach Exponentialverteilung

```
u <- runif(10000)
g <- function(x, lambda){log(1-x)/(-lambda)}
x <- g(u, lambda=4) # Exponentialverteilte Zufallszahlen
```

Umkehrung der Inversionsmethode

Man kann jede stetige Zufallsvariable X so transformieren, dass eine uniform verteilte Zufallsvariable U entsteht. Hierbei entspricht die Transformationsfunktion der Verteilungsfunktion, d.h. $g(x) = F_X(x)$

Beispiel: Exponentialverteilung nach Uniform

```
x <- rexp(10000)
y <- pexp(x) # uniform-verteilte Zufallszahlen
```

```
replicate(n, func)
paste(collapse = "")
plot(x, y, type = 'l')
lines(x, y)
hist(x, freq=F)
```

Weitere R Befehle

Definition und Zeichnen einer Dichte $f(x)$:

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \cdot x^{-7/2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

```
dichte <- function(x){
  ifelse(x>=1, 5/2*x^(-7/2), 0)
}
x <- seq(0,20,0.1)
plot(x, dichte(x), type="l")
```

Logische Abfragen:

```
> x <- c(1,2,4,5)
> # Welche Zahl ist gleich 2?
> x == 2
[1] FALSE TRUE FALSE FALSE
> # Welche Zahl ist ungleich 2?
> x != 2
[1] TRUE FALSE TRUE TRUE
> # Verknüpfung mit UND (&)
> x >= 3 & x < 5
[1] FALSE FALSE TRUE FALSE
> # Verknüpfung mit ODER (|)
> x < 2 | x > 3
[1] TRUE FALSE TRUE TRUE
# Testen, ob die Bedingung für irgendeinen Wert gilt.
> any(x > 3)
[1] TRUE
# Testen, ob die Bedingung für alle gilt
> all(x > 0)
[1] TRUE
```