

Formelsammlung Mechanik

Bilanzieren

Summe aus Zu- & Abflüssen, Quellen und Senken

- mittlere Änderungsrate: $\frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1}$ → momentane Änderungsrate: $\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dG}{dt} = \dot{G}$
- mittlere Strömungsgeschw. $\bar{v}$: $I_v = \bar{v} \cdot A$ $I_v = \frac{L}{S}$ rechnen
- $\dot{V}(t) = \text{Zuflüsse} - \text{Abflüsse} = \sum I_{v_1} - \sum I_{v_2}$
- Integral: Summe aller momentanen Änderungsraten $\int_{t_1}^{t_2}$ Fläche unter der Kurve

$I_v = \text{Volumenstrom} \frac{m^3}{s}$
auch $\frac{1}{s}$ aber dann umwandeln
 $\frac{1}{s \cdot 1000} = \frac{m^3}{s}$
 $\bar{v} = \text{mittlere Strömungsgeschw.} \frac{m}{s}$
 $A = \text{Strömungsquerschnitt} m^2$

Impuls & Kraft

- Falls keine externe Kräfte auf dem Syst. wirken: $\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = - \frac{m_1}{m_2}$ → Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$
- Änderungsrate Impuls: $\dot{p} = \frac{dp}{dt} = F_{res} \Rightarrow dp = F(t) \cdot dt$
↳ Integral
- bei konst. Masse: $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$ → Reibungskraft: Haftreibung, Rollreibung, Gleitreibung
 $F = \mu \cdot F_N$
- Impulserhaltung gilt für den elastischen sowohl inelastischen Stoß: elastischer Stoß: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$
inelastischer Stoß: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$

$v = \text{Geschwindigkeit} \frac{m}{s}$
 $m = \text{Masse} kg$
 $p = \text{Impuls} Ns = kg \cdot \frac{m}{s}$
 $F_{res} \text{ res. Kraft } N$
 $a \text{ Beschleunigung} \frac{m}{s^2}$
 $\mu \text{ Reibungszahl } 1$
 $F_N \text{ Normalkraft } N$
 $v' \text{ Endgeschw.}$
→ gemeinsame verbleibte Geschw.

Geschw. nach Stoß elastisch:
Impulserhaltung & Energieerhaltung gleichsetz.
wenn nur v vor Stoß bekannt

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2m_2}{(m_1 + m_2)} v_2$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

freigesetzte Energie:

- freigesetzte Energie ① Phase:
 $E_{kin, vor} - E_{kin, gemeinsam}$
- Energieaufnahme ② Phase:
 $E_{kin, nach} - E_{kin, gemeinsam}$
- Insgesamt dissipierte Energie:
 $E_{kin, vor} - E_{kin, nach}$

Geschw. nach Stoß:

elastisch: $v_2' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1'}{m_2}$
wenn v_1' nach Stoß bekannt

$v_a = \frac{v_{vor, 1} + v_{nach, 1}}{2}$
elastischer Stoß
(gemeinsame Geschw.)

inelastisch: $v_a = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{(m_1 + m_2)}$
(gemeinsame Geschw.)

Puffer maximal eingefahre = für einen Moment die gleiche Geschw. $\Rightarrow$ inelastischer Stoß

Energieerhaltung:

dissipierte Energie $\rightarrow$ von Bremskraft

Stoßkraft $\rightarrow$ Kraft die am 2. Wagen übergeben wird:

$$v_{nach} - v_{vor} \Rightarrow \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = F$$

Arbeit, Leistung & Energie

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

→ Leistung: $P = \frac{W}{t} = \frac{\Delta E}{t}$

→ $P = F \cdot v$

→ $P = F \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$P = \text{Leistung } W$
 $= \frac{J}{s}$

→ Arbeit der Kraft: $W_F = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

↗ Kraft muss parallel zur Verschiebung sein sonst Trigonometrie

$W = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot v(t) dt$

$E_1 \rightarrow W \rightarrow E_2$

$W = \text{Arbeit } J = Nm$

→ $\Delta E_{kin} = W$

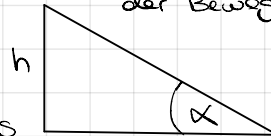
→ $E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
→ $E_{pot} = mgh$ $\rangle E_{mechanisch} = E_{kin} + E_{pot}$

→ $E_{Feder} = \frac{1}{2} D \cdot \Delta x^2$

Δx : Auslenkung der Feder

D : Federkonstante

W immer entlang der Bewegungsrichtung!



$W = F \cdot \cos(\alpha) \cdot s$

$1 PS = 0.735 kW$
↳ Pferdestärke

Wenn Reibungskraft mitbetrachtet bei Leistungsberchnung P dann $P_{gesamt} = P_{Antrieb} + P_{dissipiert}$

Wenn Reibung (Energie diss) dann ist das einzige Kraft also F oben einsetzen

F_L Auftriebskraft

F_D Luftwiderstandskraft

→ statischer Auftriebskraft: $\vec{F}_A = -\rho_{flüss} \cdot V \cdot g = -m_{flüssig} \cdot g$

↳ Heißluftballon, alles dessen Dichte kleiner als Luft ist

↳ Fallschirmspringer

$\rho_{flüss}$ ⇒ Dichte von der das Objekt umgeben ist

$\frac{kg}{m^3}$

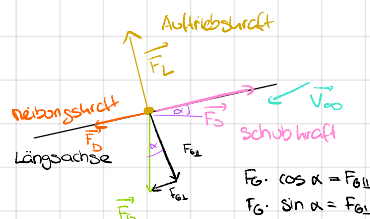
p Druck Pa

→ hydrostatischer Druck: $p = \rho \cdot g \cdot h$

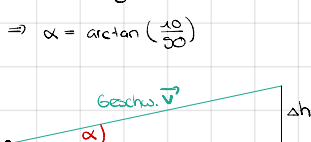
→ dynamischer Auftrieb:

→ $\vec{F}_L = \frac{1}{2} \cdot \rho_{luft} \cdot v^2 \cdot C_L \cdot A$

→ $\vec{F}_D = \frac{1}{2} \cdot \rho_{luft} \cdot v^2 \cdot C_D \cdot A$



$V = 30 \frac{m}{s}$
 $\Rightarrow \alpha = \arctan(\frac{10}{30})$



Trägheit:

$\vec{g}_{lokal} = \vec{g} + \vec{g}_{träge} = \vec{g} + \omega^2 r$

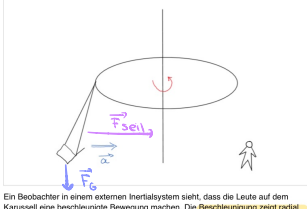
↳ Gravitation empfunden im Bezugssystem (im rotier. System)

$g_{träge} = |\vec{a}| = |\omega^2 \cdot r|$

Zentrifugalfeld

$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{Seil} + \vec{F}_G = m \vec{a}$

$\vec{F}_{Seil} + \vec{F}_G = -m \omega^2 \cdot r \frac{r}{r}$



Ein Beobachter in einem externen Inertialsystem sieht, dass die Leute auf dem Karussell eine beschleunigte Bewegung machen. Die Beschleunigung zeigt radial

allgemeines Gravitationsfeld:
 a_s : Beschleunigung des Bezugssystems

$\vec{g}_{träge} = -\vec{a}_s$

lokales Gravitationsfeld:
welches sich lokal mit dem vorherrschenden Gravitationsfeld überlagert und zu lok. Grav.feld führt

$\vec{g}_{lokal} = \vec{g} + \vec{g}_{träge}$

Gravitationskraft: $\vec{F}_{G,12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Corioliskraft: $\vec{F}_C = -2m (\vec{\omega} \times \vec{v})$

eine Trägheitskraft (Scheinkraft), die in rotierenden Systemen auf Objekte wirkt, die nicht in Ruhe sind, sondern sich bezüglich diesem System mit einer Geschw. $\vec{v}$ bewegen

Zentrifugalkraft: $m \cdot \omega^2 \cdot r$

Offene Systeme

Bernoulli → Flüssigkeit muss laminar sein
keine Turbulenzen
Fluid ist kompressibel
stationär nicht zeitabhängig
reibungsfrei

- Gleichung von Bernoulli: $p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot \Delta h = \text{konst.}$ ↗ wenn frei dann Luftdruck
- Ausflussgeschw.: $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ 1000 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ für Wasser

Venturi-Rohr:

- Volumenstrom: $I_V = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = \text{konst.}$ $= \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)}}$ ↗ $v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}$
- $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] = \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$
- Überdruck / Staudruck: $p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$
- Massenstrom: $I_m = \rho \cdot I_V = \rho \cdot A \cdot v = \rho \cdot \frac{\text{Volumen (A} \cdot \text{sh)}}{t}$
- $\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$ ↘ Volumenstrom
- = konst wenn Volumen sich nicht ändert

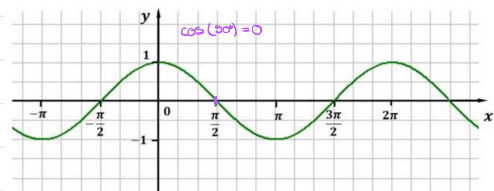
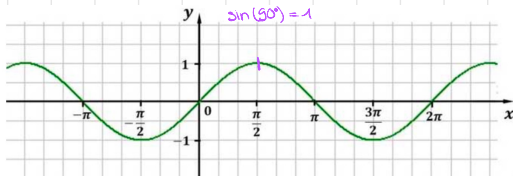
allg: Impulsbilanz

- Impulsstrom: $\frac{dp}{dt} = \sum \vec{F}_o + \sum \vec{F}_u + \sum \vec{I}_{p, \text{konv}}$
- $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ I_m $\dot{m} \cdot v_A + m a = \frac{dp}{dt} = I_m \cdot \vec{v}_w$
- $F_{\text{res}} = m a$ Impulsänderung
- $\Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{dp}{dt} + \sum (I_m \vec{v})_{\text{ab}} - \sum (I_m \cdot \vec{v})_{\text{zu}}$

$$m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

I_m

- Massenbilanz: $\frac{\Delta m}{\Delta t} = I_m$
- $\frac{m_{\text{vor Abfluss}} - m_{\text{nach Abfluss}}}{\Delta t} = I_m$



Kreisbewegung & Trägheit

$$\omega \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f \quad \text{Hz}$$

$$\dot{\omega} \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = a \cdot t$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$\omega = \frac{\dot{\theta}}{t}$$

$$\dot{\omega} = \omega \cdot t$$

→ Bahngeschw. $v = \omega \cdot r$

→ Bahn beschl. $a = \dot{\omega} \cdot r$

→ Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

→ Winkelgeschw. $\omega = \frac{v}{r} = 2\pi f$

→ Winkelbesch. $\dot{\omega} = \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{v^2}{r^2}$

→ Radialbesch. : $a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$

wenn v linear
dann $a_{\text{tan}} = 0$

→ res. Kraft : $F_{\text{res, rad}} = m \cdot a_r$

weitere Umformulierungen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{1 \text{ rpm} \cdot 2\pi}{60}$$

$$f = \frac{\text{Umdreh pro Min.}}{60}$$

Rollbedingung : $|\vec{v}_{\text{Bahn}}| = |\vec{v}_{\text{tan}}|$
(rollt ohne zu gleiten/rutschen)

$$v_B = \omega \cdot r$$

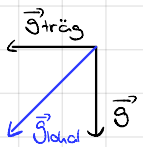
$$a = \dot{\omega} \cdot r$$

Trägheitskraft : $\vec{g}_{\text{lokal}} = \vec{g}_{\text{träg}} + \vec{g}$

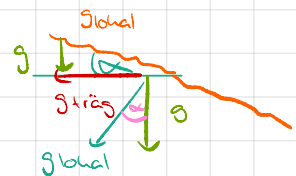
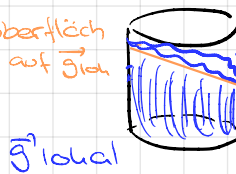
wenn untersch. Richtung : $= \sqrt{(g_{\text{träg}})^2 + g^2}$

$$\vec{g}_{\text{träg}} = -\vec{a}$$

oder $\dot{\omega}$



Flüssigkeitsoberfläche
⊥ auf $\vec{g}_{\text{lokal}}$

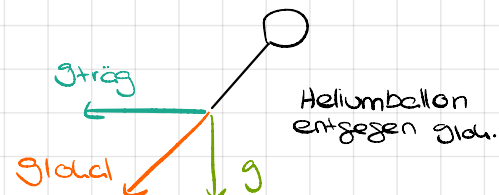


totale Belastung : $g_t + g$

Überlagerung g und g_t

max Belastung : $g_t + g$ zeigen in gleiche Richtung

... 20% seines ursprünglichen Gewichts $g_{\text{lu}} = 0.2g$



Kinematik des starren Körpers

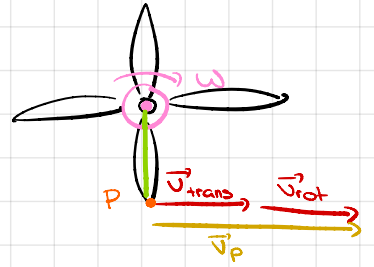
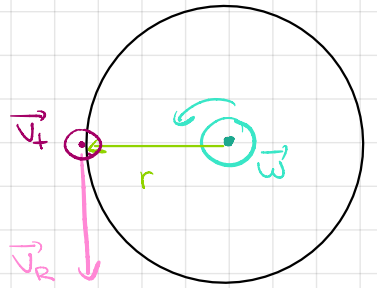
Betrag & Richtung am Punkt P

$$v_{AIC} = v_{tan} + v_{rad}$$

$v_{tan} = \omega \cdot r$ immer in Bewegungsrichtung
 $v_{rad} = \omega \times r$ vektoriell bestimmen

Translation Flugzeug + Rotation Flugzeug

v_p maximal, wenn $\vec{v}_{rot}$ & $\vec{v}_{trans}$ kollinear sind



Betrag & Richtung am äussersten Punkt P

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_{rad} \quad (+ a_{Achse} \text{ immer in Bewegungsrichtung})$$

tangentieller Anteil

radialer Anteil

$$a_t(t) = \dot{\omega}(t) \cdot r \quad a_r(t) = \omega^2 \cdot r$$

$\dot{\omega} \times r$ + $\omega \times (\omega \times r)$

Drehimpuls

$$\vec{L}_{sys} = \vec{L}_{Bahn\ gross} + \vec{L}_{Eigen\ gross} + \vec{L}_{Bahn\ klein} + \vec{L}_{Eigen\ klein}$$

$$\vec{L}_{Bahn} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

$\vec{r} = 0$ in diesem Fall

$$\vec{L}_{Eigen\ gross} = J_G \cdot \omega_G$$

$$\vec{v} = r_{Bahn} \cdot \omega_G$$

Winkelgeschw. hängen vom gleichen Radius ab nämlich dem Bahnradius

$$\vec{L}_{Bahn\ klein} = \vec{r}_{Bahn} \times m \cdot \vec{v}$$

$$= \vec{r}_{Bahn} \cdot m \cdot \omega \cdot \vec{r}_{Bahn}$$

$$= r_{Bahn}^2 \cdot m \cdot \omega$$

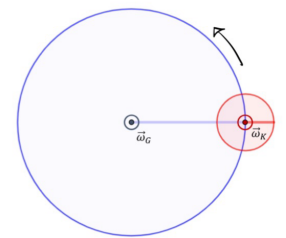
(HS2024 Wukun für Gesamtimpuls)

$$\vec{L}_{Eigen\ klein} = J_u \cdot \omega_u$$

$\Rightarrow$ Eigenimpuls der grossen Scheibe & Bahndrehimpuls der kleinen Scheibe sind gekoppelt und durch die gleich ω (und r) bestimmt.

Der Eigenimpuls der kleinen Scheibe ist unabhängig

$$\vec{L}_{system} = (J_G + m_u \cdot r^2) \cdot \omega_G + J_u \cdot \omega_u$$



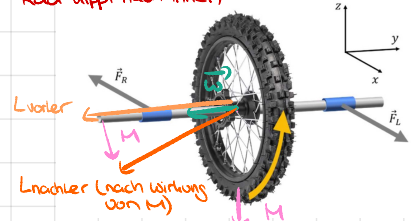
Unwucht:

$$\vec{L}'(t_2) = \vec{L}(t_1) + \Delta t \cdot \vec{M}_{ext}$$

$$\vec{L}(t_2) = \vec{L}(t_1) + \Delta t \cdot \vec{M}_{ext}$$

$\vec{L}$ -Vektor kippt in Richtung vom res. Moment $\vec{M}_{ext}$

Rad kippt nach innen



Drehimpuls

→ Drehmoment: $M = r \cdot F$ $\Rightarrow$ Kraft senkrecht (90°)
Nm

$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha \Rightarrow$ Winkel dazwischen

$M = r \times F \Rightarrow$ vektoriell

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{J \cdot \vec{\omega}}{t} + M_{\text{Reib}} \right) = F$$

$$\sum \vec{M}_{\text{res}} = \dot{\vec{L}}$$

$$\text{Bremsdrehmoment} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = M_{\text{Brem}}$$

$$\text{Reibungskraft} = F = \frac{M}{r}$$

→ Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$ $\rightarrow$ nur bei Punktmassen möglich
Nms

$$[J = \text{kgm}^2]$$

$$\left(\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \underbrace{\sin \angle(\vec{r}, \vec{p})}_{1 \text{ da } \vec{r} \perp \vec{p}} \right)$$

$$\frac{\vec{L}}{t} = \vec{M}$$

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{M} = J \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

$$\omega = \dot{\omega} \cdot \Delta t$$

von M auf ω^2

$$M \cdot \Delta t = L$$

$$\frac{L}{J} = \omega$$

gemeinsame Winkelge.

$$\omega = \frac{L_1 + L_2}{J_1 + J_2}$$

→ Energie: $[J]$

$$E_{\text{kin, rot}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

$$E_{\text{kin, trans}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

allg: $W_{\text{Mech}} = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin, trans}} + W_{\text{kin, rot}}$
 $= mgh + \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

oben: $W_{\text{Mech}_1} = mgh_1 + 0 + 0$

unten: $W_{\text{Mech}_2} = mgh_2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$

Punktmasse nur $\rightarrow \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$\vec{L}_A = \vec{L}_B$! d.h. $E_{\text{rot, A}} \neq E_{\text{rot, B}}$ $\rightarrow$ zum gestreckten Zustand wird Arbeit aufgewendet um die Aixe anzuziehen

$\vec{M}_{\text{Brem}}$ $\vec{M}_{\text{res}} = \vec{M}_{\text{Feder}} + \vec{M}_{\text{Brem}}$
 $\vec{M}_{\text{res}} = J \cdot \dot{\omega}$

$E_{\text{kin, Erde}} = E_{\text{kin, rot um Sonne}} + E_{\text{rot, Eigenrotation}}$

$E_{\text{kin, Gesamt}} = E_{\text{kin, trans}} + E_{\text{kin, rot}}$

$E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin, trans}} + E_{\text{kin, rot}} + E_{\text{Reib}}$

↓
Wreibung

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J}{r^2}}}$$

