

# Analysis 2

Fabian Starc

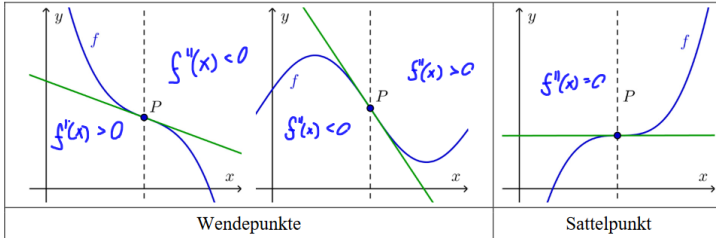
Version: September 24, 2025

## Monotonität

### Definitionsbereich bestimmen

wenn  $f'(x) \geq 0$  dann ist der Graph **monoton wachsend**  
wenn  $f'(x) \leq 0$  dann ist der Graph **monoton fallend**

## Wende- und Sattelpunkte



Sattelpunkt:  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) = 0$

Wendepunkt:  $f'(x) = \text{beliebig}$  und  $f''(x) = 0$

relatives Maximum / relatives Minimum:  $f'(x) = 0$

## Hoch- und Tiefpunkte

1.  $f(x)$  ableiten
2. Nullstellen von  $f'(x)$  bestimmen = neues  $x_0$
3. wenn  $f''(x_0) < 0$  so ist  $(x_0; f(x_0))$  ein **relativer Hochpunkt**.
4. wenn  $f''(x_0) > 0$  so ist  $(x_0; f(x_0))$  ein **relativer Tiefpunkt**.

## Untersuchung von Funktionen

1. Definitionsbereich bestimmen
2. Symmetrieeigenschaften (gerade/ungerade) und Periodizität bestimmen
3. Nullstellen, y-Achsenabschnitt und Polstellen bestimmen
4. Randpunkte bestimmen bzw., wie sich die Funktion verhält, wenn  $x$  gegen die Grenzen des Definitionsbereichs strebt (ggf. Asymptote untersuchen)
5. Kandidaten für relative Extrema bestimmen und untersuchen
6. Wendepunkte suchen
7. Tabelle von Werten aufstellen (falls nötig)

## Vorgehen bei Extremwertaufgaben

1. Zielgrösse bestimmen
  2. Unabhängige Variable bestimmen
  3. Definitionsbereich bestimmen ( $d_1; d_2$ ) oder  $[d_1; d_2]$
  4. Zielgrösse als Funktion ausdrücken (wenn möglich Skizze oder Graphen machen)
  5. Ist Minimalstelle oder Maximalstelle gefragt? Randpunkte nicht vergessen!
    - erste Ableitung bestimmen.
    - **Nullstellen** von  $f'(x)$  herausfinden.
    - zweite Ableitung bestimmen.
    - Nullstelle in  $f''(x)$  einsetzen und prüfen:  
**wenn  $f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$  ist relative Maximalstelle**  
**wenn  $f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$  ist relative Minimalstelle**
- Wenn Intervall in  $D \rightarrow$  keine Randpunkte, keine weiteren Kandidaten.

6. Intervall in  $D \rightarrow \lim_{x_0 \rightarrow d_1 / d_2}$

- **relative Maximalstellen werden zu absoluten Maximalstellen wenn beide Grenzwerte gegen 0 gehen.**
- **relative Minimalstellen werden zu absoluten Minimalstellen wenn beide Grenzwerte gegen  $\infty$  gehen**

7. Was ist gefragt?  $\rightarrow$  Antwortsatz formulieren

## Integrationsregeln

| Funktion                             | Stammfunktion         | Funktion      | Stammfunktion |
|--------------------------------------|-----------------------|---------------|---------------|
| $x^a$ ( $a \neq -1 \in \mathbb{R}$ ) | $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ | $\sin(x)$     | $-\cos(x)$    |
| $e^x$                                | $e^x$                 | $\cos(x)$     | $\sin(x)$     |
| $a^x$ ( $a \in \mathbb{R}, a > 0$ )  | $\frac{a^x}{\ln(a)}$  | $\frac{1}{x}$ | $\ln( x )$    |

## Integrationsmethoden

### Substitution

1.  $u$  definieren.
2.  $u' = \frac{du}{dx}$
3. Nach  $dx$  auflösen.
4.  $u$  in Integral einfügen.
5.  $u$  an Grenzen anwenden.
6.  $dx$  in Integral einfügen.
7. Stammfunktion bestimmen.

| Integraltyp                                                                                                                               | Substitution                              | Beispiele                                                                          | Substitution                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| (A) $\int f(ax+b) dx$<br><br><i>Merkmal:</i> Die Variable $x$ tritt in der linearen Form $ax+b$ auf ( $a \neq 0$ )                        | $u = ax+b$<br><br>$dx = \frac{du}{a}$     | 1. $\int (2x-3)^6 dx$<br><br>2. $\int \sqrt{4x+5} dx$<br><br>3. $\int e^{4x+2} dx$ | $u = 2x-3$<br><br>$u = 4x+5$<br><br>$u = 4x+2$ |
| (B) $\int f(x) \cdot f'(x) dx$<br><br><i>Merkmal:</i> Der Integrand ist das Produkt aus einer Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitung $f'(x)$ | $u = f(x)$<br><br>$dx = \frac{du}{f'(x)}$ | 1. $\int \sin x \cdot \cos x dx$<br><br>2. $\int \frac{\ln x}{x} dx$               | $u = \sin x$<br><br>$u = \ln x$                |
| (C) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$<br><br><i>Merkmal:</i> Im Zähler steht die Ableitung des Nenners                                         | $u = f(x)$<br><br>$dx = \frac{du}{f'(x)}$ | 1. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx$<br><br>2. $\int \frac{e^x}{e^x+5} dx$           | $u = x^2-3x+1$<br><br>$u = e^x+5$              |

## geeignete Substitutionen:

- Wurzelterme:  $u =$  Term unter der Wurzel
- $e^x$ ;  $u =$  Term im Exponenten
- Term mit Bruch und Wurzel im Nenner:  $u =$  Term unter der Wurzel im Nenner.

## partielle Integration

$$\int u(x) * v'(x) dx = u(x) * v(x) - \int u'(x) * v(x) dx$$

$$\int u(x) * v'(x) dx = \left[ u(x) * v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) * v(x) dx$$

## Ablauf:

1.  $u(x)$  definieren
2.  $u'(x)$  (Ableiten)
3.  $v'(x)$  definieren
4.  $v(x)$  (Integrieren)
5. In Formel einsetzen und berechnen.
6. (Falls kein Grundintegral  $\rightarrow$  wiederholen)

## Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen und Multiplizität des Nennerpolynoms  $N(x)$  bestimmen
2. (Wenn  $f(x)$  eine unecht gebrochen rationale Funktion ist; **Polynomdivision**)
3. Jeder der Nullstellen wird ein Partialbruch zugeordnet:  
 $x_{01}$ : einfache Nullstell  $\rightarrow \frac{A}{x-x_{01}}$   
 $x_{02}$ : doppelte Nullstelle  $\rightarrow \frac{B}{x-x_{02}} + \frac{C}{(x-x_{02})^2}$   
 $x_{0r}$ : r-fache Nullstelle  $\rightarrow \frac{D}{x-x_{0r}} + \dots + \frac{E}{(x-x_{0r})^r}$
4.  $f(x)$  wird mit der Summe der Parialbrüche gleichgestellt:

$$f(x) = \frac{A}{x-x_{01}} + \frac{B}{x-x_{02}} + \frac{C}{(x-x_{02})^2} \dots$$

5.  $f(x)$  als einen Bruch schreiben. **[Kürzen wo möglich!!]**
6. Zähler des ursprünglichen Bruches dem neuen Zähler gleichstellen.  
Durch einsetzen von werten für  $x$  können die Konstanten  $A, B, C \dots$  bestimmt werden.
7.  $f(x)$  mit gefundenen Werten für  $A, B, C$  schreiben.
8. Partialbrüche durch Integration mit Substitution integrieren:

$$\int \frac{1}{x-x_{01}} dx = \ln(|x-x_{01}|) + C_1$$

$$\int \frac{1}{(x-x_{0r})^r} dx = \frac{1}{(1-r)(x-x_{0r})^{r-1}} + C_2$$

## uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

Differentialgleichungen

Trennbare Differentialgleichungen

1.

$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) * g(x)$

2. Trennung der Variablen:

$\frac{dy}{g(y)} = f(x) * dx$

3. Integration auf beiden Seiten der Gleichung:

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$

4. Nach y auflösen.

Anwendungen des Integrals

Volumen eines Rotationskörpers

$V = \pi * \int_a^b (f(x))^2 dx$

f(x) für alle x ∈ [a; b] a, b sind Grenzen des Rotationskörpers auf der x-Achse.

Bodenlänge einer ebenen Kurve

$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$

Wir betrachten eine Funktion f(x) über einem Intervall [a; b]. Die Bogenlänge der Kurve y = f(x) ist gegeben durch die obenstehende Formel.

Koordinaten des Schwerpunkts einer ebenen Fläche

$x_s = \frac{1}{A} * \int_a^b x * (f(x) - g(x)) dx$

$y_s = \frac{1}{2A} * \int_a^b x * (f(x)^2 - g(x)^2) dx$

Koordinate des Schwerpunkts eines Rotationskörpers

$x_s = \frac{\pi}{V} * \int_a^b x * (f(x))^2 dx$

$y_s = z_s = 0$

Masseträgheitsmoment

$J = \frac{\pi \rho}{2} \int_a^b (f(x))^4 dx$

Potenzreihen

Konvergenzradius

Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * (x - x_0)^n$

ist gegeben durch:

$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Der Konvergenzbereich ist gegeben durch: x ∈ (x0 - r, x0 + r)

Taylorpolynome

Gegeben ist eine Funktion f : D → R mit D ∈ R, die an der Stelle x0 ∈ D (n+1)-mal differenzierbar ist. Dann heisst das Polynom

$T_n f(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} * (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} * (x - x_0)^2 +$

$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} * (x - x_0)^n \dots$

Ebene Kurven

Parametrisierung Ebener Kurven

Kreis mit Radius R (Kartesische Koordinaten):

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R * \cos(\varphi) \\ R * \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Kreis mit Radius R (Polarkoordinaten):

$\vec{r}(\varphi) = R$

Strecke von A nach B:

$\vec{r}(t) = \vec{r}(A) + t * (\vec{r}(B) - \vec{r}(A))$

Ellipse mit Halbachsen a in x-Richtung und b in y-Richtung:

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} a * \cos(\varphi) \\ b * \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Zykloide für einen Kreis mit Radius R:

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R * (\varphi - \sin(\varphi)) \\ R * (1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$

Kreisevolvente für Kreis mit Radius R:

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R * (\cos(\varphi) + \varphi * \sin(\varphi)) \\ R * (\sin(\varphi) - \varphi * \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$

Krümmung einer ebenen Kurve

Ist eine ebene Kurve durch die explizite Gleichung y = f(x) gegeben, so berechnet sich die Krümmung κ im Punkt P(x, y) nach der Formel:

$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$

der Krümmungsradius ist gegeben durch. r =  $\frac{1}{|\kappa|}$