

Analysis 3 Zusammenfassung S. 228

$x = \text{Realteil } \text{Re}(z)$
 $y = \text{Imaginärteil } \text{Im}(z)$

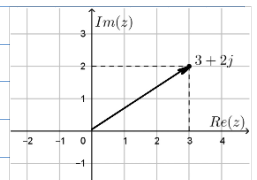
$$z = x + j \cdot y \quad j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{-j}{-j} = \frac{-j}{-1} = j$$

$$z^* = x - j \cdot y \quad j^2 = -1$$

$$-1 + 2j$$

$$= \text{Re} = -1$$

$$\text{Im} = 2$$



$$j^3 = j^2 \cdot j = -j$$

$$\frac{5+2j}{3-2j} = \frac{5+2j}{3-2j} \cdot \frac{3+2j}{3+2j}$$

Bruch mit z^*
Multiplizieren

Trigonometrische Form

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\text{atan2}(y; x)$	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$y > 0$	$\arctan \frac{y}{x} + \pi$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\arctan \frac{y}{x}$
$y = 0$		nicht def.	
$y < 0$	$\arctan \frac{y}{x} - \pi$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\arctan \frac{y}{x}$

$$z^n = r^n \cdot \text{cis}(n \cdot \varphi)$$

Potenzen

$$(z - 1 + j)^6 + 64 = 0 \quad \text{Substituieren}$$

$$u^6 = -64 \quad r = 64 \quad \varphi = \pi$$

$$u = z - 1 + j \rightarrow z = u + 1 - j \quad u_0 = \sqrt[6]{-64} = -2$$

$$z = -2 + 1 - j = -1 - j$$

$$(1+j)^{10} \quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$x = 1 \quad \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$y = 1 \quad z = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(\sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right))^{10} = 2^5 \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 2^5 (\cos(\frac{5\pi}{2}) + j \sin(\frac{5\pi}{2})) = 32j$$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

n-te Wurzel ziehen!

Bsp. $z = 1 + j$ Wir suchen die 4 Wurzeln von $1 + j$

$$z^4 = 1 + j$$

$$x = 1 \quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$y = 1 \quad \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

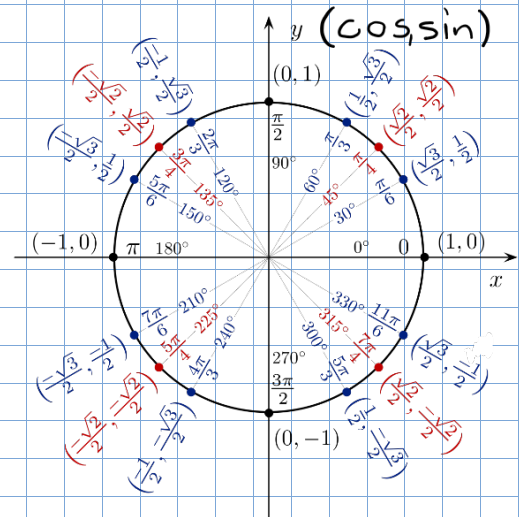
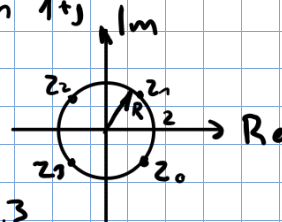
$$z = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \cdot 0\right) = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

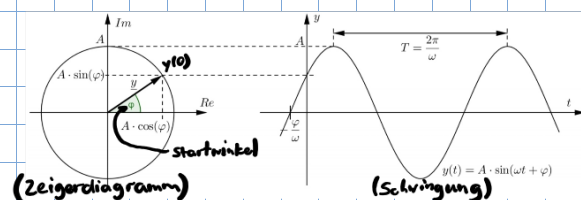
$$z_1 = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \cdot 1\right) = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z^3(1+j) - 1 + j = 0 \rightarrow z^3 = \frac{1-j}{1+j}$$



Harmonische Schwingung

S. 240



Überlagerungen

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow y(t) = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$y_1(t) = 4 \cdot \sin(2t) \rightarrow y_1 = 4 \cdot e^{j \cdot 0} = 4$$

$$y_2(t) = 3 \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{3}) \rightarrow y_2 = 3 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3}} = 3 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j$$

$$y = y_1 + y_2 = 4 + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j = \frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j$$

$$A = r = |y| = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0.441 \quad y(t) = \sqrt{37} \cdot \sin(2t + 0.441)$$

$$A = r = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Vorgehen Fourier $\frac{\pi}{2} \rightarrow \omega=4$ π -Periodisch oder 2π -Period

1. Periodizität Bestimmen $\omega=2$

2. Kreisfrequenz Berechnen $\omega = \frac{2\pi}{T} / T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega=1$

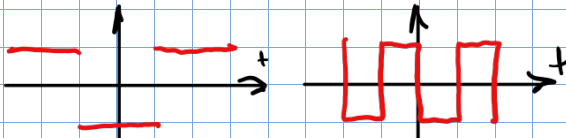
$$\int_0^{2\pi} \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}$$

S. 190

S. 316

Reel

Gerade oder Ungerade



Gerade

$$b_n = 0 \text{ (nur cos)}$$

Ungerade

$$a_n = 0 \text{ (nur sin)}$$

k ungerade $\rightarrow (2k-1)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$\frac{a_0}{2} = \text{Mittelwert von } f(t)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(n \cdot t) dt$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot t \cdot \omega) + b_n \cdot \sin(n \cdot t \cdot \omega))$$

Reelle Fourier-Reihe $f(t)$

Intervallgrenzen müssen immer über eine ganze Periode gehen! Grenzen verschiebbar!

Partielle Integration $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

$$\int 0 dt = c$$

$$\int_a^b 0 dt = 0$$

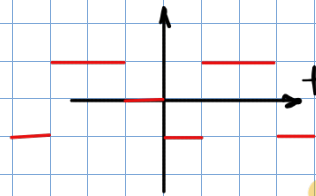
$$\int_b^a e^{-kj t} dt = \frac{e^{-kj t}}{-k \cdot j} \Big|_b^a$$

$$e^{-jk2\pi} = e^{jk0} = 1$$

$$e^{-jk\varphi} = \cos(k\varphi) - j \cdot \sin(k\varphi)$$

Komplex

Weder noch



$$\hat{f}_k = a \cdot j b$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$a_n = 2 \cdot \text{Re}(\hat{f}_k)$$

$$b_n = -2 \cdot \text{Im}(\hat{f}_k)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t}$$

Komplexe Fourier-Reihe $f(t)$

Korrekte Darstellung:

$$\frac{4}{\pi k \cdot j} = \frac{4}{\pi k} \cdot \frac{1}{j} = -\frac{4}{\pi k} \cdot j$$

$$\text{Re} = 0$$

$$\text{Im} = -\frac{4}{\pi k}$$

$$\int_b^a -\sin(k \cdot t) dt = \cos(k \cdot t) \cdot \frac{1}{k} \Big|_b^a$$

$$\sin(n \cdot \pi) = 0$$

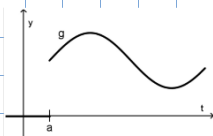
$$\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$$

Laplace Transformation s.344

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad s > 0$$

Linearität (Linear kombinationen)

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$



Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\begin{cases} f(t) = 4t - 7 \sin(t) \\ \mathcal{L}\{f(t)\} = 4 \cdot \mathcal{L}\{t\} - 7 \cdot \mathcal{L}\{\sin(t)\} \\ = \frac{4}{s^2} - \frac{7}{s^2+1} \end{cases}$$

$$g(t) = \sin(t) \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

→ Verschiebung um a $F(s) \cdot e^{-as}$

$$\mathcal{L}\{\sin(t-a)\} = e^{-as} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{e^{-as}}{s^2+1}$$

Dämpfungssatz

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s+a) \quad \text{mit } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

a = Dämpfungskonstante

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \cos(2t)\} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

Ableitungssatz

$$1. \text{ Ord. } \mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

$$2. \text{ Ord. } \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

$$f(t) = \sin(t) \quad F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{(\sin(t))'\} = \mathcal{L}\{(\cos(t))'\} = s \cdot F(s) - f(0) = s \cdot \frac{1}{s^2+1} - \sin(0) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^{\lambda} f(x) dx \quad \int e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

e^x immer $g'(x)$

s.153

Integrationsmethoden

Unbestimmtes Integral

$$\int \frac{1}{(4x+5)^3} dx = \int (4x+5)^{-3} dx = \int u^{-3} \frac{du}{4} = -\frac{1}{8 \cdot u^2} + C$$

$$I = -\frac{1}{8 \cdot (4x+5)^2} + C$$

Substitution

$$u = 4x+5$$

Linienelementanpassung

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 4 \rightarrow dx = \frac{du}{4}$$

Rücksubstitution

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

Koeffizientenvergleich

$$\text{Ansatz } y_p = c_1 \cdot x + c_0 \quad y_p' = c_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} c_1 \cdot x - \frac{1}{2} c_0 + 10x$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} c_1 + 10$$

$$c_1 = \frac{20}{3} \quad | -\frac{1}{2} c_0 = 0 \rightarrow c_0 = 0$$

$$\text{Einsetzen in } y_p = \frac{20}{3} x + 0$$

Alle Koeffizienten mit gleichem x^n gehören zusammen

$$\frac{1}{2} x = x^1$$

$$c_1 = x^0$$

$$\text{AWP-Laplace} \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$$

1. Schritt Laplace Transformation

$$\mathcal{L}\{y' + ay\} = \mathcal{L}\{y\} + a \cdot \mathcal{L}\{y\} = s \cdot \mathcal{L}\{y\} - y(0) + a \cdot \mathcal{L}\{y\}$$

2. Lösung nach Y(s) auflösen

$$Y(s) = \frac{G(s) + Y(0)}{s+a}$$

3. Laplace inverse

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0$$

$$y'' + 9y = t \quad | \mathcal{L}\{ \}$$

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot f(0) - f'(0) + 9 \cdot Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 0 \cdot 0 + 9 \cdot Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+9)} \quad | \mathcal{L}^{-1}\{ \}$$

$$= \frac{3t - \sin(3t)}{27} \quad (42)$$

homogen $\rightarrow g(x) = 0$

linear $\rightarrow y', y$

nicht linear $\rightarrow y^2, y \cdot y'$

$$y' + \frac{1}{2}y = 10x$$

$$y_h = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\text{Ansatz } y_p = C_1 \cdot x + C$$

$$\text{Einsetzen } -y_p' = C_1$$

$$C_1 + \frac{1}{2}(C_1 \cdot x + C) = 10x$$

$$C_1 + \frac{1}{2}C_1 x + \frac{1}{2}C = 10x$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}C_1 = 10 \quad C_1 = 20$$

$$C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 0$$

$$20 + \frac{1}{2}C_2 = 0 \quad C_2 = -40$$

$$y_p = 20x - 40$$

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 20x - 40$$

DGL 1. Ordnung

s.271

DGL 1. Ordnung linear $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

Lösungsverfahren separierbare DGL

$$(1) \quad y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad | :g(y), dx$$

$$(2) \quad \text{Trennung der Variablen } \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

$$(3) \quad \text{Integration beider Seiten } \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

(4) Auflösen nach y falls möglich

$$1. \text{ Ordnung } y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(x) \quad y_h = C \cdot e^{-F(x)}$$

$$8A \sin(2x) - 8B \cos(2x) = \cos(2x)$$

$$8A \cdot 1 = 0$$

$$A = 0$$

$$-8B \cdot 1 = 1$$

$$B = -\frac{1}{8}$$

Funktionen mit mehreren Veränderlichen S. 243

$$f(x, y) = z$$

$$f(x, y) = r \cdot x + s \cdot y + t \quad 0 = r \cdot x + s \cdot y + t - z \quad \vec{n} = (r, s, -1)^T$$

S. 247

Partielle Funktion Differenzieren

$$F(x, y, z) = x \cdot y + x^3 y^3 z + 2z + 1$$

$$f_x(x, y, z) = y + 3x^2 y^3 z$$

$$f_y(x, y, z) = x + 3y^2 x^3 z$$

$$f_z(x, y, z) = x^3 y^3 + 2$$

Tangentialebene, Gradient, Richtungsableitung

S. 377

$$z = f_x \cdot (x - x_0) + f_y \cdot (y - y_0) + z_0$$

$$f(x, y) = x^2 + xy \quad P(1, 2, 3)$$

$$f_x(x, y) = 2x + y \rightarrow f_x(1, 2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$f_y(x, y) = x \rightarrow f_y(1, 2) = 1$$

$$z_0 = x^2 + xy \rightarrow 1^2 + 1 \cdot 2 = 3$$

$$z = 4 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 2) + 3$$

$$f(x, y) = \frac{2}{3} \sqrt{y-1} \quad \nabla f(x, y) = \left(\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-1}}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-1}}} \right) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 9 \end{matrix}$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z = 2 - 2(x - 1) + \frac{1}{12} \cdot (y - 9) \rightarrow \frac{-12}{4} = -2x + \frac{1}{12}y - 2$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{12} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Normalform}$$

$$E: z = -2x + 3y + 1, f(x, y) = rx + 3xy$$

$$f_y = (3x) \rightarrow 3x_0 = 3 \quad x_0 = 1$$

$$f_x = (r + 3y) \rightarrow r + 3y_0 = -2$$

$$r = -2 - 3y_0$$

In Gl. Einsetzen

$$z_0 = -2 - 3y_0 \cdot x_0 + 3x_0 \cdot y_0 \quad \begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$z_0 = -2 - 3y_0 + 3y_0 = -2 \quad z_0 = -2$$

In Tangentialebene einsetzen $r = -1$

$$-2 = -2 \cdot x_0 + 3y_0 + 1$$

$$-\frac{1}{3} = y_0 \quad r = -2 - 3 \cdot (-\frac{1}{3}) = -1$$

Wir nehmen Variablen, welche nicht abgeleitet werden, als Konstant an! $f_x(x, y_0)$

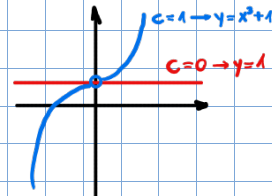
$$\frac{u}{v} \quad f_x = \frac{u_x \cdot v - u \cdot v_x}{v^2} \quad f_y = \frac{u_y \cdot v - u \cdot v_y}{v^2}$$

$$\frac{\text{Höhen Differenz}}{\text{horizontale Distanz}} = \frac{a_1 \cdot f_x(x_0, y_0) + a_2 \cdot f_y(x_0, y_0)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Höhenlinien

$$f(x, y) = c \rightarrow y = \dots$$

$$\frac{\sqrt[3]{y-1}}{x} = c \rightarrow y = c^3 \cdot x^3 + 1$$



$$\text{Kreis: } y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{Gerade: } y = mx + b$$

$$\text{Ellipse: } y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{Sattelpunkt: } y = \sqrt{x^2 - c}$$

$$\text{Hyperbel: } y = b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \quad \text{Spirale: } y = \tan(\varphi) \cdot x$$

$$\text{Parabel: } y = y = ax^2 + bx + c \quad \text{Wellenartig } y = \arccos(c - \sin(x))$$

$$\text{Gradient: } \vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y, z) = x^2 \cdot z^2 + x y^2 \quad P(1, 1, 2) \quad \vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Grad } \vec{F} = \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} f_x(1, 1, 2) \\ f_y(1, 1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Maximale Steigung im Punkt P

$$\sqrt{9^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{101}$$

Richtungsableitung:

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 + 2z x^3, P(-1, 1, 1), \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{a} \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = 3$$

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (8 - 2 + 0) = \underline{\underline{2}}$$

Totales Differential $f(x_0, y_0)$ = Punkte x_0, y_0 in Funktion einsetzen, gibt Zahl raus!

s.251

Flächenpunkt wird auf Fläche selbst verschoben

$$\Delta Z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Flächenpunkt wird auf dazugehörige Tangentialebene verschoben

$$dz = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Linearisieren der Funktion s.253

$$f(x, y) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Relative Extremwerte s.254

$f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ bilden

$$f_x = 0$$

→ Punkte

$f_{xx} < 0$ relatives Maximum

$$f_y = 0$$

$f_{xx} > 0$ relatives Minimum

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

$\Delta < 0$ Sattelpunkt

$\Delta = 0$ keine aussage möglich

$\Delta > 0$ Extremalwert

Doppelintegrale = Volumen $dA = dx \cdot dy$

Fall 1: Bereich A ist Rechteck

s.257

Doppelintegral von innen nach aussen lösen

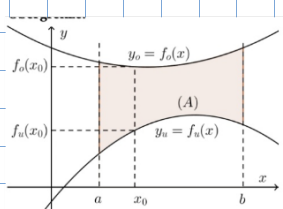
$$\int_1^4 \int_3^4 4 \, dx \, dy$$

$$[4x]_3^4 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 4$$

$$[4]_1^4 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 12$$

Fall 2: A hat variable Unter/obergrenze

$$\int_1^4 4 \, dy$$



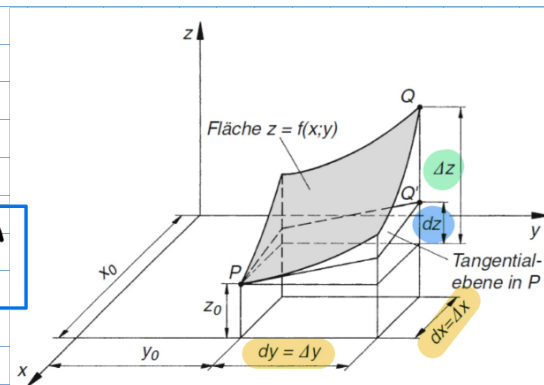
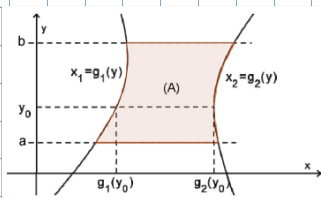
Wenn Variable ober und untergrenze existiert → zuerst nach dy integrieren

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=x}^{\sqrt{x}} x \cdot y \, dy \, dx \rightarrow x \cdot \int_x^{\sqrt{x}} y \, dy$$

x wird zu einem konstanten Faktor

Fall 3: A hat eine variable rechts und links

Zuerst nach dx integrieren



Barber: What can I get you?
Guy: Give me one such that

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = x \cdot y$$

$$f(x, y) = \sin(x) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \Big|_{y=x} = 0$$

Barber: Say no more fam



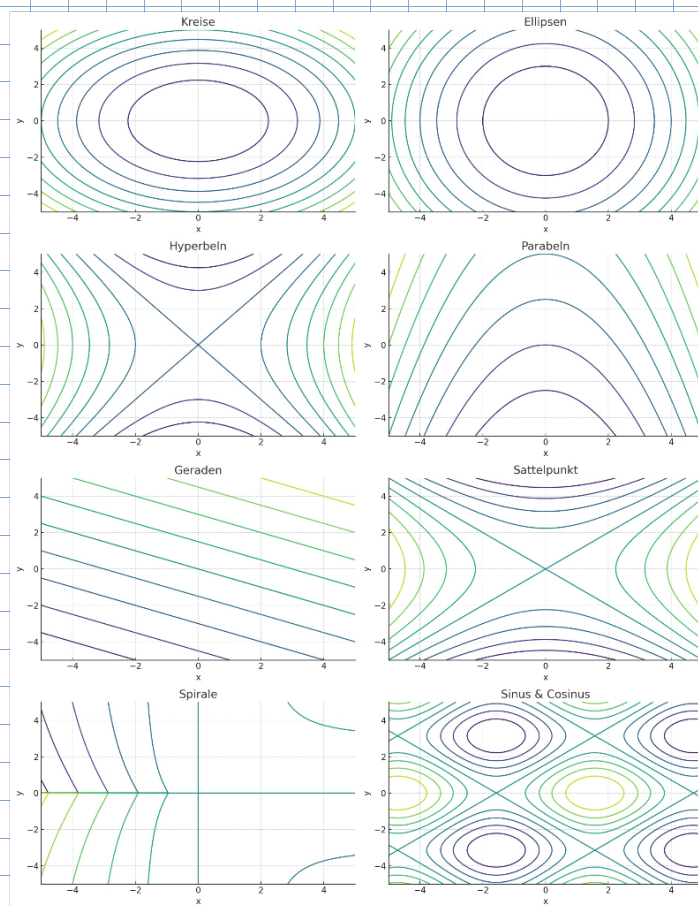
S.34 3D-Körper

S.95 Trigonometrie

S.132 Ableitungen

S.152 Integral

S.476 Integraltafel



Skalarfeld ist eine Funktion, jedem Punkt im Raum wird eine Zahl zugeordnet.

$$f(x,y,z) = x^2 + y + 2z \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist definiert durch

$$\vec{\nabla} = \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

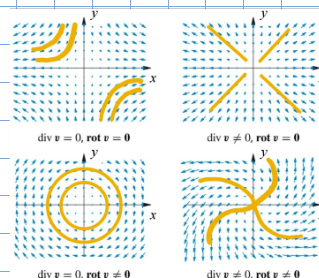
Vektorfeld ist eine Funktion, jedem Punkt im Raum einen Vektor zuordnet.

$$\vec{F} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Gradient eines Skalarfeldes ist ein Vektorfeld mit Stärkster Steigung

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \\ \frac{df}{dz} \end{pmatrix} \quad \text{s. 380} \quad f(x,y) = x^2 + y = \nabla f \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

← x nach dx
← y nach dy



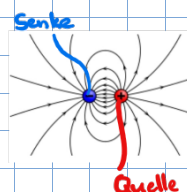
Div / Rot

Divergenz eines Vektorfeldes misst, wie stark ein Vektorfeld an einem Punkt ausfließt

s. 382

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 + 2y \quad \text{div } \vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

div $\vec{v} > 0$ Quelle
div $\vec{v} < 0$ Senke
div $\vec{v} = 0$ Quellenfrei



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 + z \\ e^{xy} \\ yz^2 \end{pmatrix} = 2x + x \cdot e^{xy} + 3yz^2 \rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot e^{2 \cdot 3} + 3 \cdot 3 \cdot 4^2 > 0$$

P(2,3,4) Punkt P ist eine Quelle in Feld $\vec{F}$

div (rot $\vec{F}$) = 0 für jedes Vektorfeld $\vec{F}$, d.h. Wirbelfelder sind stets quellenfrei
rot (grad $\vec{F}$) = 0 für jedes Skalarfeld f , d.h. Potentialfelder sind stets wirbelfrei

s. 383

Rotation eines Vektorfeldes misst, wie stark das Vektorfeld an einem Punkt wirbelt

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + yz \\ e^{xy} \\ x + yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^3 - 0 \\ y - 1 \\ ye^{xy} - z \end{pmatrix} \xrightarrow{P(2,3,4)} \begin{pmatrix} 4^3 \\ 3 - 1 \\ 3e^6 - 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \quad \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$
rot $\vec{F} = \vec{0}$ Wirbelfrei
rot $\vec{F} = \vec{E}$ Wirbelfeld

Potential ist der Gradient eines Vektorfeldes, Gesucht ist ein Skalarfeld f mit $\nabla f = \vec{F}$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \cdot e^{xy} + z \\ x \cdot e^{xy} \\ x + 2z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \int (y \cdot e^{xy} + z) dx = x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{xy} + xz + \varphi_1(y,z) \\ \int (x \cdot e^{xy}) dy = x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{xy} + \varphi_2(x,z) \\ \int (x + 2z) dz = xz + z^2 + \varphi_3(x,y) \end{cases}$$

Jedes Element muss 1x vorkommen

$$\varphi_1(y,z) = z^2 + C_1 \quad \varphi_2(x,z) = xz + C_2 \quad \varphi_3(x,y) = e^{xy} + C_3$$

$$f(x,y,z) = e^{xy} + xz + z^2 + C$$

Immer Plus C
Diese Funktion Partial nach x,y,z abgeleitet gibt Vektorfeld $\vec{F}$

Wenn $\vec{F}$ Potentialfeld auf einfach zusammenhängenden Gebiet ist, gilt: Jedes Quellenfreie Vektorfeld $\vec{F}$ ist Wirbelfeld
Jedes wirbelfreie Vektorfeld $\vec{F}$ = Potentialfeld

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(P_2) - f(P_1) \quad \text{s. 392}$$

Kurvenintegrale

Arbeit $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{r}(t)$

Vektorfeld $\vec{F}$ Raumkurve $\vec{r}(t)$

Geschlossene Kurve

$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$

Gleicher Anfangs und Endpunkt

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $t_1 \leq t \leq t_2$

Kurvenintegral längs der Kurve C

$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$

Potential von $\vec{F}$ bestimmen $\rightarrow f(x,y,z)$

$f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1) = \text{Zahl (Lsg. von Integral)}$

Mit Potential $\uparrow$ auch rechenbar!

$\vec{F} = \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$

$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} t+2t \\ t \cdot 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t^2 \end{pmatrix}, \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3t + 4t^2$

$\int_0^1 3t + 4t^2 dt = \frac{17}{6}$

$-\sin(t)^2 - \cos(t)^2 = -1$

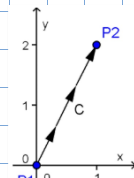
$\int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} d\vec{r} = \int_0^\pi -1 d\vec{r} = -\pi$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3+t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}, -1 \leq t \leq 3$

$P_1(0,0,0), P_2(1,2,4)$

Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 4t \end{pmatrix}$

Oberflächenintegral S. 397



Kurve C in Umgekehrter Richtung

$\int_C \vec{F} d\vec{r} = - \int_C \vec{F} d\vec{r}$

Endpunkt Kurve C1 = Anfang von Kurve C2

Kurve C

Parametrisieren

$\int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1 \cup C_2} \vec{F} d\vec{r}$

$\vec{N}$ hängt von Geometrie ab

$\vec{N} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Phi = \iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$

Anleitung $\downarrow$

1. Man wählt geeignete Koordinaten (kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten).

2. Man bestimmt den Normalenvektor $\vec{N}$, berechnet das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \vec{N}$ und drückt es durch zwei der gewählten Koordinaten aus. Normiert

3. Das Flächenelement dA muss ebenfalls durch die beiden Koordinaten ausgedrückt werden.

4. Dann müssen die Integrationsgrenzen für das erhaltene Doppelintegral festgelegt werden.

5. Nun wird das Doppelintegral ausgerechnet.

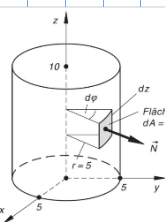
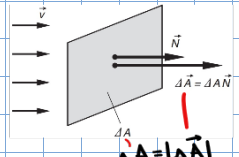
Normiert

$a^2 + b^2 = 1$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$x = 5 \cdot \cos(\varphi), y = 5 \cdot \sin(\varphi), z = z$
 $\vec{N} = \frac{1}{|\text{grad}|} \cdot \text{grad} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\text{grad} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$
 $dA = r \cdot d\varphi \cdot dz = 5 dz d\varphi$
 $\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{2}{5} xy$
 $\frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 5 \cos(\varphi) \cdot 5 \sin(\varphi) = 5 \sin(2\varphi)$

$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$

Integralsatz von Gauss S. 400

$\vec{F}$ = geschlossene Fläche

$\oint_{(A)} \vec{F} d\vec{A} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{F} dV$ $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$ $\text{div} \vec{F} = 2+xy$

Integralsatz von Stokes S. 401

$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_{(A)} \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{N} dA$

$\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A}$
 $E = x + 2y + 2z = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{N}$

$z = \frac{2-x-2y}{2}$

$\vec{F} \cdot \vec{N} = 2z - 2y + 2 = 4 - x - 4y$

$\vec{N} \cdot \vec{e}_z = \frac{2}{3} dA = dA^* = dy dx \rightarrow dA = \frac{3}{2} dy dx$

Projektion auf x-y Ebene mit $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittkurve Fläche und x-y Ebene $z=0$

$E = x + 2y + 2z = 2 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$
 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 1$

Fourierreihenapproximation

Ziel: Beschreibung bzw. Annäherung einer periodischen Funktion $f(x)$ durch Summe von Schwingungsfunktionen

1. Welche Periodizität hat $f(x)$?

$$T = 2\pi \\ \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$0 < T \neq 2\pi \\ \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

2. Besitzt $f(x)$ eine Symmetrie?

a) Ist f gerade, d.h. Graph achsensymmetrisch?

b) Ist f ungerade, d.h. Graph punktsymmetrisch?

JA

NEIN

im Reellen

Berechnung der Fourierkoeffizienten

im Komplexen

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos(\omega k x) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin(\omega k x) dx$$

$$0 \leq k < \infty$$

$$a_k = 2 \cdot \operatorname{Re}(\hat{f}_k)$$

$$b_k = -2 \cdot \operatorname{Im}(\hat{f}_k)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cdot e^{-j\omega k x} dx$$

$$-\infty < k < \infty$$

Das Integrationsgebiet ist so zu wählen, dass man $f(x)$ möglichst einfach beschreiben kann. Es muss die Länge T haben.

Fourierreihe

im Reellen

$$f(x) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(\omega k x) + b_k \cdot \sin(\omega k x))$$

im Komplexen

$$f(x) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \cdot e^{k\omega j x}$$

$k=0$ offset $\rightarrow$ Verschiebung in y ist immer reell

$\frac{a_0}{2} = \operatorname{Re}(\hat{f}_0)$ ist Mittelwert von $f(x)$ über $[0, T]$

$k=1$ Grundschwingungen mit Frequenz $f_1 = \frac{1}{T}$

$k>1$ Oberschwingungen mit Frequenz $f_k = \frac{k}{T}$

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot \sqrt{(\operatorname{Re}(\hat{f}_k))^2 + (\operatorname{Im}(\hat{f}_k))^2} = 2 \cdot |\hat{f}_k|$$

↓
Frequenzspektrum von $f(x)$

$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $+^n$ 6 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(1)	1	$\delta(t)$ (Diracsche Deltafunktion)
(2)	$\frac{1}{s}$	1 (Sprungfunktion $\sigma(t)$)
(3)	$\frac{1}{s-a}$	e^{at} für $a=0$
(4)	$\frac{1}{s^2}$	t $n=2$
(5)	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{e^{at}-1}{a}$
(6)	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cdot e^{at}$
(7)	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
(8)	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) \cdot e^{at}$
(9)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{a \cdot e^{at}-b \cdot e^{bt}}{a-b}$
(10)	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$
(11)	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{e^{at}-at-1}{a^2}$
(12)	$\frac{1}{s(s-a)^2}$	$\frac{(at-1) \cdot e^{at}+1}{a^2}$
(13)	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cdot e^{at}$
(14)	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$\frac{b \cdot e^{at}-a \cdot e^{bt}+a-b}{ab(a-b)}$
(15)	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{(b-c) \cdot e^{at}+(c-a) \cdot e^{bt}+(a-b) \cdot e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
(16)	$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} at^2+t\right) \cdot e^{at}$
(17)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a \cdot e^{at}-[a+b(a-b)t] \cdot e^{bt}}{(a-b)^2}$
(18)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a(b-c) \cdot e^{at}+b(c-a) \cdot e^{bt}+c(a-b) \cdot e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(19)	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} a^2 t^2+2 a t+1\right) \cdot e^{a t}$
(20)	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a^2 \cdot e^{a t}-\left[b^2(a-b) t+2 a b-b^2\right] \cdot e^{b t}}{(a-b)^2}$
(21)	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a^2(b-c) \cdot e^{a t}+b^2(c-a) \cdot e^{b t}+c^2(a-b) \cdot e^{c t}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
(22)	$\frac{1}{s^n} \quad\left(n \in \mathbb{N}^{*}\right)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \frac{1}{s^n}=\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}=\frac{(n-1)!}{s^n}$
(23)	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad\left(n \in \mathbb{N}^{*}\right)$	$\frac{t^{n-1} \cdot e^{a t}}{(n-1)!}$
(24)	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin (a t)}{a} \quad \sin (t) \rightarrow a=1$
(25)	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos (a t)$
(26)	$\frac{(\sin b) \cdot s+a \cdot \cos b}{s^2+a^2}$	$\sin (a t+b)$
(27)	$\frac{(\cos b) \cdot s-a \cdot \sin b}{s^2+a^2}$	$\cos (a t+b)$
(28)	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{b t} \cdot \sin (a t)}{a}$
(29)	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{b t} \cdot \cos (a t)$
(30)	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh (a t)}{a}$
(31)	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh (a t)$
(32)	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{b t} \cdot \sinh (a t)}{a}$
(33)	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{b t} \cdot \cosh (a t)$
(34)	$\frac{1}{s\left(s^2+4 a^2\right)}$	$\frac{\sin ^2(a t)}{2 a^2}$
(35)	$\frac{s^2+2 a^2}{s\left(s^2+4 a^2\right)}$	$\cos ^2(a t)$
(36)	$\frac{1}{s\left(s^2+a^2\right)}$	$\frac{1-\cos (a t)}{a^2}$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(37)	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin(at) - at \cdot \cos(at)}{2a^3}$
(38)	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sin(at)}{2a}$
(39)	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin(at) + at \cdot \cos(at)}{2a}$
(40)	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cdot \cos(at)$
(41)	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos(at) - \frac{1}{2} at \cdot \sin(at)$
(42)	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{at - \sin(at)}{a^3}$
(43)	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \cdot \sin(bt) - b \cdot \sin(at)}{ab(a^2 - b^2)}$
(44)	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{\cos(bt) - \cos(at)}{a^2 - b^2}$
(45)	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \cdot \sin(at) - b \cdot \sin(bt)}{a^2 - b^2}$
(46)	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a^2 \cdot \cos(at) - b^2 \cdot \cos(bt)}{a^2 - b^2}$
(47)	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{-at \cdot \sin(at) - \cos(at) + 1}{2a^4}$
(48)	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{b^2 \cdot \cos(at) - a^2 \cdot \cos(bt) + a^2 - b^2}{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}$
(49)	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)}$	$\frac{\cosh(at) - 1}{a^2}$
(50)	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cdot \cosh(at) - \sinh(at)}{2a^3}$
(51)	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sinh(at)}{2a}$
(52)	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{\sinh(at) + at \cdot \cosh(at)}{2a}$
(53)	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cdot \cosh(at)$
(54)	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2} at \cdot \sinh(at) + \cosh(at)$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(55)	$\frac{1}{s^2(s^2 - a^2)}$	$\frac{\sinh(at) - at}{a^3}$
(56)	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cdot \sinh(at) - 2 \cdot \cosh(at) + 2}{a^4}$
(57)	$\frac{1}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3a^2} \left[\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) + e^{-3at/2} \right] \cdot e^{at/2}$
(58)	$\frac{s}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3a} \left[\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - e^{-3at/2} \right] \cdot e^{at/2}$
(59)	$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3} \left[e^{-at} + 2 \cdot e^{at/2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right]$
(60)	$\frac{1}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3a^2} \left[e^{3at/2} - \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right] \cdot e^{-at/2}$
(61)	$\frac{s}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3a} \left[e^{3at/2} + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right] \cdot e^{-at/2}$
(62)	$\frac{s^2}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3} \left[e^{at} - 2 \cdot e^{-at/2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right]$
(63)	$\frac{1}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{a^3 \sqrt{2}} \left[\sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) - \cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \right]$
(64)	$\frac{s}{s^4 + a^4}$	$\frac{\sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)}{a^2}$
(65)	$\frac{s^2}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{a \sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \right]$
(66)	$\frac{s^3}{s^4 + a^4}$	$\cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$
(67)	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{\sinh(at) - \sin(at)}{2a^3}$
(68)	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{\cosh(at) - \cos(at)}{2a^2}$
(69)	$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{\sinh(at) + \sin(at)}{2a}$
(70)	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{\cosh(at) + \cos(at)}{2}$
(71)	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\sin(at) \cdot \sinh(at)}{2a^2}$

Polynom zweiten Grades = $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$

2.

2. Ordnung: $y'' + ay' + by = g(x)$

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

1.

1. Ordnung: $y' + ay = g(x)$

Effektiv nur das Übernehmen:

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Konstante Funktion 1	Konstante Funktion $y_p = c_0$
2. Lineare Funktion x	Lineare Funktion $y_p = c_1 x + c_0$
3. Quadratische Funktion x²	Quadratische Funktion $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$
4. Polynomfunktion vom Grade n	Polynomfunktion vom Grade n $y_p = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$
5. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$	$y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder Additionstheorem $y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
6. $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$	
7. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} & \text{für } b = -a \end{cases}$

„Stellparameter“: $c_0, c_1, \dots, c_n; C, C_1, C_2; \varphi$

Anmerkungen zur Tabelle

- (1) Die im jeweiligen Lösungsansatz enthaltenen *Parameter* („Stellparameter“) sind so zu bestimmen, dass der Ansatz die vorgegebene Differentialgleichung *löst*.
- (2) Ist die Störfunktion $g(x)$ eine **Summe aus mehreren Störgliedern**, so erhält man den Lösungsansatz für y_p als **Summe** der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.
- (3) Ist die Störfunktion $g(x)$ ein **Produkt** aus mehreren Faktoren, so werden die Ansätze für die einzelnen Faktoren miteinander **multipliziert**.

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Polynomfunktion vom Grade n $g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & b \neq 0 \\ x \cdot Q_n(x) & \text{für } a \neq 0, b = 0 \\ x^2 \cdot Q_n(x) & a = b = 0 \end{cases}$ $Q_n(x)$: Polynom vom Grade n Parameter: Koeffizienten des Polynoms $Q_n(x)$
2. Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	(1) c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ Parameter: A (2) c ist eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx}$ Parameter: A (3) c ist eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$ Parameter: A
3. Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine Linearkombination aus beiden Funktionen	(1) $j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ Parameter: A, B bzw. C, φ (2) $j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$ oder $y_p = C \cdot x \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ Parameter: A, B bzw. C, φ

Anmerkungen zur Tabelle

- (1) Der jeweilige Lösungsansatz gilt auch dann, wenn die Störfunktion zusätzlich noch einen **konstanten Faktor** enthält.
- (2) Die im jeweiligen Lösungsansatz enthaltenen *Parameter* („Stellparameter“) sind so zu bestimmen, dass der Ansatz die vorgegebene Differentialgleichung *löst*.
- (3) Ist die Störfunktion $g(x)$ eine **Summe aus mehreren Störgliedern**, so erhält man den Lösungsansatz für y_p als **Summe** der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.
- (4) Ist $g(x)$ ein **Produkt** aus mehreren „Störfaktoren“, so erhält man in vielen (aber nicht allen) Fällen einen Lösungsansatz für y_p , indem man die **Lösungsansätze** der „Störfaktoren“ miteinander **multipliziert**.

Aufgabenstellung: Gesucht ist die allgemeine Lösung $y(x)$ einer (linearen) DGL

DGL 1. Ordnung

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

Lösungsverfahren für **trennbare** (seperierbare) DGL 1. Ordnung

(a) DGL in expliziter Form $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = h(x) \cdot \ell(y)$

(b) Trennung der Variablen und Integration auf beiden Seiten (falls möglich!):

$$\int \frac{dy}{\ell(y)} = \int \frac{1}{\ell(y)} dy = \int h(x) dx$$

(c) Auflösen nach y (falls möglich!).

Lösungsverfahren „Variation der Konstanten“ für **lineare** DGL 1. Ordnung

(a) Lineare DGL in Standardform $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x)$

Bestimmen der Koeffizientenfunktion $f(x)$ und der Störfunktion $g(x)$.
Vorzeichen beachten!

(b) Wir **bestimmen** eine **Stammfunktion** $F(x)$ der Funktion $f(x)$ (Integrationskonstante 0).

(c) Allgemeine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL
 $y'_h(x) + f(x) \cdot y_h(x) = 0$ ist $y_h(x) = C e^{-F(x)}$ **e^-**

(d) Ansatz für die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL
 $y(x) = K(x) \cdot e^{-F(x)}$ (Ersetzen C durch $K(x)$)

(e) Berechnung von $K(x)$ durch unbestimmte Integration.
ACHTUNG: Integrationskonstante beachten!

$$K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$
 e^+

(f) Einsetzen in den Ansatz (d) $y(x) = K(x) \cdot e^{-F(x)}$.

Lösungsverfahren 'Aufsuchen einer partikulären Lösung' für

lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y'(x) + a \cdot y(x) = g(x)$$

(I) Vergleich der gegebenen DGL mit der **Standardform** $y' + a \cdot y = g(x)$ und **Bestimmung von a und $g(x)$** .

Vorzeichen beachten!

(II) Allgemeine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL

$$y'_h(x) + a \cdot y_h(x) = 0 \quad \text{ist} \quad y_h = C \cdot e^{-ax}$$

(III) **Aus der Tabelle:** Heraussuchen des **Ansatz** für die partikuläre Lösung y_p .

(IV) Bestimmen von y'_p , indem man den Ansatz für y_p aus (III) **ableitet**.

(V) **Einsetzen** von y_p (aus (III)) und y'_p (aus (IV)) in die inhomogene DGL.

(VI) **Bestimmung der Parameter** durch **Koeffizientenvergleich**. Dies ergibt y_p .

(VII) Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $y = y_h + y_p$.

Laplace-Transformation zur Lösung **linearer Anfangswertprobleme 1. Ordnung**

$$y'(x) + a \cdot y(x) = g(x) \quad \text{und Anfangswert } y_0 = y(0)$$

(I) Laplace-Transformation der linearen DGL $y'(x) + a \cdot y(x) = g(x)$

$$\mathcal{L}\{y'(x) + a \cdot y(x)\} = \mathcal{L}\{y'(x)\} + a \cdot \mathcal{L}\{y(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\}$$

$$(s \cdot Y(s) - y(0)) + a \cdot Y(s) = G(s)$$

(II) Auflösung der Gleichung nach der Bildfunktion $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{G(s) + y(0)}{s + a}$$

(III) Inverse Laplace-Transformation mit Hilfe von Tabellen ergibt die spezielle Lösung des AWP's

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

S. 283

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$$

Lineare DGL 2. Ordnung

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = g(x)$$

Lösungsverfahren für **homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

(I) Charakteristische Gleichung aufstellen:

$$a = \quad b = \quad c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DGL $y'' + ay' + by = 0$ führt zur Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

(II) Bestimmen der Lösungen λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung.

(III) Aufstellen der allgemeinen Lösung gemäss Fallunterscheidung.

$$D = a^2 - 4b \quad 2 \neq -2!$$

$$D > 0 \quad \text{Fall 1: } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (\text{reell}) \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

$$D = 0 \quad \text{Fall 2: } \lambda_1 = \lambda_2 = c \quad (\text{reell}) \Rightarrow y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{cx}$$

$$D < 0 \quad \text{Fall 3: } \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega \quad (\text{konjugiert komplex}) \Rightarrow y = e^{\alpha x} (C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x))$$

Lösungsverfahren für **inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** **Aufsuchen einer Partikulären Lösung**

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = g(x)$$

Schritt 1:

Lösung y_h der zugehörigen **homogenen** Differentialgleichung bestimmen (s.o.)

Schritt 2:

(I) Bestimmen der Störfunktion $g(x)$.

(II) Aus der Tabelle: Heraussuchen des **Ansatz** für die partikuläre Lösung y_p .

ACHTUNG: Tabelle für DGL 2. Ordnung verwenden!

(III) Bestimmen von y_p' und y_p'' durch **Ableiten** des Ansatzes für y_p (aus (II)).

(IV) **Einsetzen** von y_p (aus (II)) und y_p' , y_p'' (aus (III)) in die DGL.

(V) Bestimmung der Parameter mithilfe eines **Koeffizientenvergleiches**. Dies ergibt y_p .

(VI) Die allgemeine Lösung lautet $y = y_h + y_p$.

AWP können auch durch einsetzen in y-yhtyp gelöst werden

Aufgabenstellung beachten

Laplace-Transformation zur Lösung **linearer Anfangswertprobleme 2. Ordnung**

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = g(x), \quad \text{Anfangswerte } y_0 = y(0) \text{ und } y'_0 = y'(0)$$

(I) Laplace-Transformation der inhomogenen linearen DGL

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = g(x)$$

$$\mathcal{L}\{y''(x)\} + a \cdot \mathcal{L}\{y'(x)\} + b \cdot \mathcal{L}\{y(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\}$$

$$(s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)) + a \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) + b \cdot Y(s) = G(s)$$

(II) Auflösung der Gleichung nach der Bildfunktion $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{G(s) + (a + s) \cdot y(0) + y'(0)}{s^2 + a \cdot s + b}$$

(III) Inverse Laplace-Transformation mit Hilfe von Tabellen ergibt die spezielle Lösung des AWP

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Anwendung: **Mechanische Schwingungen**

$$m\ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t)$$

$$\sin(2t) dt = 2 \cdot \cos(2t)$$

1. Freie, ungedämpfte Schwingung, d.h. $b = 0$ und $F(t) = 0$ $m\ddot{x} + cx = 0$
mit AWP durch dx, dz herausfinden $x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$

2. Freie, gedämpfte Schwingung, d.h. $b \neq 0$ und $F(t) = 0$ $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$

2.1 schwache Dämpfung, d.h. $\delta < \omega_0$

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t))$$

2.2 aperiodischer Grenzfall, d.h. $\delta = \omega_0$

$$x(t) = (C_1 \cdot t + C_2) \cdot e^{-\delta t}$$

2.3 starke Dämpfung, d.h. $\delta > \omega_0$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-k_1 t} + C_2 \cdot e^{-k_2 t}$$

3. Erzwungene Schwingung (schwache Dämpfung) mit $F(t) = F_h \cdot \sin(\omega t)$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_h \cdot \sin(\omega t)$$

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)) + A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Dabei gilt: $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, $\delta = b/(2m)$, $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, $k_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
und ω ist die Erregerfrequenz.