

## Potenzgesetze

$$a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$a^r \div a^s = a^{r-s}$$

$$a^r \times b^r = (ab)^r$$

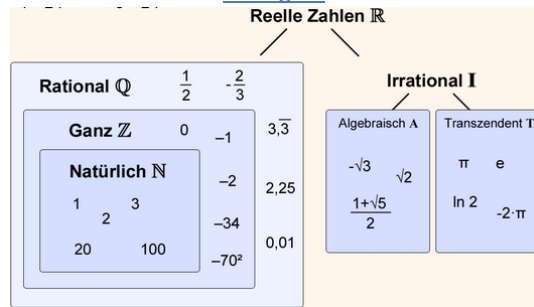
$$a^r \div b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$(a^r)^s = a^{r \times s}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = \sqrt[s]{a^r}$$

## Mengen



# Basis (AN1&2)

## Intervalle

Es gilt  $[=)$  und  $] = ($

**Abgeschlossen:**  $[1,3] = 1,2,3$

**Offen:**  $(1,3) = 2$  **gleich wie**  $]1,3[$

**Halboffen:**  $[1,3) = 1,2$

**Unendlich:**  $[a, \infty)$

## Wurzelgesetze

Wenn  $a$  und  $b > 0$ :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[s \times r]{a}$$

$$(\sqrt[r]{a})^s = \sqrt[r]{a^s}$$

## Logarithmusgesetze

$$\log_a P = \frac{\log P}{\log a}$$

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

$$\log_b (P \times Q) = \log_b P + \log_b Q$$

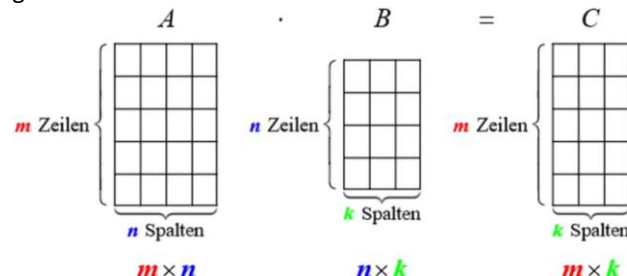
$$\log_b \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_b P - \log_b Q$$

$$\log_b P^n = n \times \log_b P$$

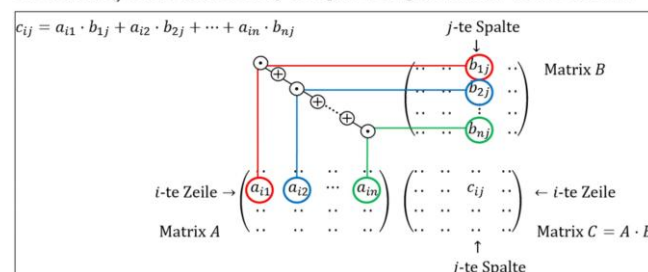
$$\log_b \sqrt[n]{P} = \frac{\log_b P}{n}$$

## Multiplikation von Matrizen

Damit die Multiplikation möglich ist, muss Spalte von A gleich wie Zeilen von B sein.



Das Element  $c_{ij}$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte der Ergebnismatrix C wird so berechnet:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

## Besonderheiten:

- Wenn  $A \cdot B = A \cdot C$ , heisst das **nicht** immer das  $B = C$

- Wenn  $A \cdot C = 0$ , heisst das **nicht** immer das eine Matrix 0 ist

Rechenregeln:

Assoziativ-Gesetz:  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Distributiv-Gesetze:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  und  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

## Ableitung

| $f(x)$                                   | $f'(x)$                                           | $f(x)$                                                  | $f'(x)$                                              |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $c$                                      | $0$                                               | $5; 1; 10$                                              | $0$                                                  |
| $e^{ax}$                                 | $a \cdot e^{ax}$                                  | $e^{7x}$                                                | $7e^{7x}$                                            |
| $ax^p$                                   | $p \cdot ax^{p-1}$                                | $5x^3; 3x^2; 3x$                                        | $15x^2; 6x; 3$                                       |
| $a^x$                                    | $a^x \cdot \ln(a)$                                | $3a^{7x}$                                               | $21a^{7x} \cdot \ln(a)$                              |
| $c \cdot \ln(ax + b)$                    | $ac \div (ax + b)$                                | $\ln 4x; \ln x$                                         | $1 \div x$                                           |
| $b \cdot \cos(ax)$                       | $-ab \cdot \sin(ax)$                              | $b \cdot \sin(ax)$                                      | $ab \cdot \cos(ax)$                                  |
| $b \cdot \tan(ax)$                       | $\frac{a \cdot b}{((\cos(ax))^2)}$                | $b \cdot \sin^{-1} ax$                                  | $\frac{a \cdot b}{\sqrt{1 - a^2 \cdot x^2}}$         |
| $b \cdot \tan^{-1} ax$                   | $\frac{a \cdot b}{a^2 \cdot x^2 + 1}$             | $b \cdot \cos^{-1} ax$                                  | $-\frac{a \cdot b}{\sqrt{1 - a^2 \cdot x^2}}$        |
| $\sqrt[b]{ax}$                           | $\frac{b \sqrt[b]{a} \cdot x^{\frac{1}{b}-1}}{b}$ | $\sqrt[5]{3x}$                                          | $\frac{\sqrt[5]{3} \cdot x^{\frac{1}{5}-1}}{5}$      |
| $\sqrt{ax}$                              | $1 \div (2 \cdot \sqrt{ax})$                      | $\sqrt{3x}$                                             | $1 \div (2 \cdot \sqrt{3x})$                         |
| $\log_b ax$                              | $\frac{1}{x \cdot \log_{10} b}$                   | $\log_2 4x$                                             | $1 \div (x \cdot \log 2)$                            |
| $x^x$                                    | $x^x \cdot (\ln x + 1)$                           | $(ax)^{bx}$                                             | $b(ax)^{bx} \cdot (\ln(ax) + 1)$                     |
| $a \cdot \sec^c(bx)$                     | $abc \cdot \sec^c(bx) \cdot \tan(bx)$             | $a \cdot \operatorname{cosec}^c(bx)$                    | $-abc \cdot \cot(bx) \cdot \operatorname{csc}^c(bx)$ |
| $b \cdot \tan(ax)$                       | $ab \cdot \sec^2(ax)$                             |                                                         |                                                      |
| $\frac{a}{b} \cdot \sqrt{cx^d \pm fx^h}$ | $\frac{a(cdx^d - fhx^h)}{2bx\sqrt{cx^d - fx^h}}$  | $\frac{a(cdx^{d-1} - fhx^{h-1})}{2b\sqrt{cx^d - fx^h}}$ |                                                      |

Umkehrfunktion:  $(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$$f(x) = \cot(x) \Rightarrow f'(x) = -1 - (\cot x)^2 = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

$$\sin(x) \Rightarrow \cos(x) \Rightarrow -\sin(x) \Rightarrow -\cos(x) \Rightarrow \sin(x)$$

$$\tan(x) \Rightarrow \sec^2(x)$$

## Rechenregeln

**Produktregel:**  $f(x) = u(x) \times v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

**Quotientenregel:**  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2}$

**Kettenregel:**  $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

## Darstellung NL-LGS

**Explizit:**  $y = f(x_1, \dots, x_n)$

**Implizit:**  $0 = F(x_1, \dots, x_n)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

wenn  $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{d}{dx} (a + bx^2)^n = 2nbx (a + bx^2)^{n-1}$$

## Nat. Log

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^n = n \cdot \ln x$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$$

$$\frac{b}{ac} = e^{\frac{\ln(b)}{c} - \ln(a)}$$

## Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad a^x = b$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \quad x = \log_a b$$

$$\tan = \sin/\cos, \cot = \cos/\sin, \sec = 1/\cos, \csc = 1/\sin$$

## Rechenregeln Addition von Matrizen

**Kommutativ-Gesetz:**  $A + B = B + A$   
**Assoziativ-Gesetz:**  $A + (B + C) = (A + B) + C$   
**Distributiv-Gesetz:**  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$  und  $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

## Matrizen Gleichung

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4y = 8 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right.$$

## Inverse

$$A \cdot A^{-1} = E(\text{Einheitsmatrix})$$

Nur **möglich** bei 2x2, wenn:  $ad - bc \neq 0$  oder  $\det(A) \neq 0$

$$\text{Bestimmen für 2x2: } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Für LGS mit 1 LösungS: } A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Bei NxN invertierbar wenn  $\det(A)$  nicht 0.

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

## Transponieren von Matrix

Matrix mit m\*n wird zu n\*m transponiert.

$$\begin{pmatrix} \boxed{Z_1 \rightarrow} \\ \boxed{Z_2 \rightarrow} \\ \boxed{Z_3 \rightarrow} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boxed{\downarrow Z_1} & \boxed{\downarrow Z_2} & \boxed{\downarrow Z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0.2 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 0.2 & 3 \\ -1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2^T \quad 2 \times 3$

Dabei gilt immer:

$$(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$$

## LGS in reduzierter Zeilenstufenform lösen

Frei unbekannte:  $x_3 = a$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_4 &= 5 \end{aligned} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

# Matrizen (LA)

## Determinante

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \text{ nicht mit } \pm$$

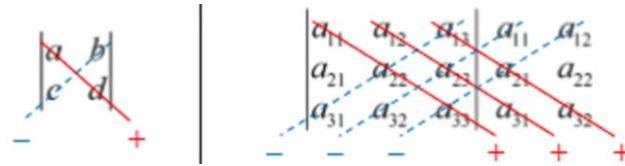
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = 1$$

$$\det(\gamma \cdot A) = \gamma^n \cdot \det(A)$$

$$\text{Für 2x2: } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\text{Für 3x3: } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \det(A) = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i$$



Für nxn:

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 13 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-4) - 7 \cdot (-8) + 8 \cdot (-4) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - 9 \cdot \begin{pmatrix} 12 & 16 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} - 9 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \dots$$

Für oberer Dreiecksmatrix: Produkt der Diagonalen

**Linear unabhängig:**

Die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  sind linear unabhängig, wenn gilt:

- $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k$  ist die einzige Linearkombination, die  $\vec{0}$  ergibt
- $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{a}_k \neq \vec{0} \quad (\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R})$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von A sind linear unabhängig
- Zeilen von A sind linear unabhängig
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Das LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$  hat eine eindeutige Lösung

## Definition Quadratische Matrix

**Quadratisch:** Gleich viele Zeilen wie Spalten

**Hauptdiagonale:**  $a_{11}, a_{22}, \dots$

**Diagonalmatrix:** Alle Elemente ausserhalb diagonale = 0

**Einheitsmatrix:** Diagonalmatrix und alle Elemente = 1

**Obere Dreiecksmatrix:** Alle Elemente unter diagonale = 0

**Untere Dreiecksmatrix:** Alle Elemente über diagonale = 0

**Symmetrische Matrix:** Elemente über und unter diagonale sym.

**Potenzen sind nicht kommunikativ:**  $(AB)^2 \neq A^2 \cdot B^2$

## Zeilenstufenform

- Alle Zeilen, die nur 0 enthalten, stehen zuunterst

- Wenn nicht nur null = vorderste Zahl die 1

- Einsen sind nach unten rechts geordnet

- **Reduziert** = Alle **Spalten** mit führenden 1, haben sonst nur 0

## Matrix Rang und Lösbarkeit

$$rg(A) = \text{Anzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$$

$$n = \text{Anzahl Unbekannte}$$

- Lösbar:  $rg(A) = rg(A|\vec{c})$
- Genau eine:  $rg(a) = n$
- Unendlich:  $rg(A) < n$

$\vec{c} = \text{Erweiterte Koeff. Matrix}$

| Matrizengleichung                                                                                                             | erweiterte Koeff.matrix                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 16 \end{pmatrix}$ |

Für eine  $(m \times n)$ -Matrix A gilt  $rg(A) \leq \min(m, n)$ .

## Freie Unbekannte in LGS

**1** = führende 1 => führende unbekannte => kann nicht frei

$$\text{gewählt werden } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

## Normiert

Vektor v ist nach x normiert =  $v/x$

bezüglich der 2-Norm auf die Länge 1 normiert sein sollen:

Länge  $\|v\| = 1$  normiert, d. h.:

$$v_{\text{normiert}} = \frac{v}{\|v\|}$$

### Partielle Ableitung

Es werden alle ausser 1 unbekannte als konstant angesehen, dann abgeleitet. Wenn dann Punkt eingesetzt wird, wird die konkreten Steigungen der Tangenten berechnet  
**Geometrisch:** Die Steigung der Flächentangente im Flächenpunkt  $P = (x_0, y_0, z_0)$  in positiver x/y-Richtung

### Linearisierung

**Tangentengleichung:**  $g(x) = f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)}) * (x - x^{(0)})$

$$f(x) = \begin{pmatrix} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x) \end{pmatrix}, \quad Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ \sin(x_1 \cdot x_2) \end{pmatrix} \quad \text{mit } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

1. Jacobi-Matrix berechnen mit partiellen Ableitungen

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ x_2 \cos(x_1 x_2) & x_1 \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

2. Punkt einsetzen, hier  $x^{(0)} = (1, \pi)$

$$Df(1, \pi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 1 \\ \pi \cos(\pi) & 1 \cdot \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\pi & -1 \end{pmatrix}$$

3. Linearisierung in der Umgebung  $x^{(0)}$

Berechne  $f(1, \pi)$ :

$$f(1, \pi) = \begin{pmatrix} 1^2 + \pi \\ \sin(1 \cdot \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist die linearisierte Funktion:

$$g(x) = f(1, \pi) + Df(1, \pi)(x - (1, \pi)^T)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 + \pi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\pi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - \pi \end{pmatrix}$$

Wenn nur eine Gleichung:  $P = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}))$ .

### Gedämpftes Newton-Verfahren =4

Nur in der Nähe der Nullstelle ist Konvergenz des Verfahrens garantiert!

1. Berechne  $f(x^{(n)})$  und  $Df(x^{(n)})$
2. Berechne  $\delta^{(n)}$  als Lösung des lin. GS  $Df(x^{(n)}) \cdot \delta^{(n)} = -f(x^{(n)})$
3. Finde das minimale  $k \in \{0, 1, \dots, k_{\max}\}$  mit

$$\left\| f \left( x^{(n)} + \frac{\delta^{(n)}}{2^k} \right) \right\|_2 < \|f(x^{(n)})\|_2$$

Kein minimales  $k$  gefunden  $\rightarrow k = 0$

4. Setze

$$x^{(n+1)} := x^{(n)} + \frac{\delta^{(n)}}{2^k}$$

## NL-LGS

### Interpolation

Stetige Funktion welche exakt durch gegebene Stütz-punkte geht  $\rightarrow$  Interpolierende(Infinitel)

### Lagrange Interpolationsformel

Polynominterpolation mit Vandermonde-Matrix ist aufwendig und schlecht konditioniert, darum andere Lösungsmethoden.

Durch  $n + 1$  Stützpunkte vom Grad  $\leq n$  mit verschiedenen Stützstellen ( $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$ ) gibt es genau ein  $P_n(x)$  mit  $\text{grad} \leq n$  welches alle Punkte interpoliert:  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) y_i$ . Dabei  $l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

**Fehlerabschätzung:** das Maximum der  $(n + 1)$  Ableitung der Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $[x_0, x_n]$  muss bekannt sein:

Sind die  $y_i$  Funktionswerte einer genügend oft stetig differenzierbaren Funktion  $f$  (also  $y_i = f(x_i)$ ), dann ist der Interpolationsfehler an einer Stelle  $x$  gegeben durch

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|}{(n + 1)!} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} f^{(n+1)}(\xi)$$

**Beispiel:** Geben sind:

- $x = [0, 250, 500, 1000]$
- $y = [1013, 747, 540, 226]$

Berechnung der **Lagrange**polynome

$$\begin{aligned} \bullet \quad l_0 &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} = \frac{375 - 250}{0 - 250} \cdot \frac{375 - 500}{0 - 500} \cdot \frac{375 - 1000}{0 - 1000} = -0.078 \\ \bullet \quad l_1 &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{375 - 0}{250 - 0} \cdot \frac{375 - 500}{250 - 500} \cdot \frac{375 - 1000}{250 - 1000} = 0.625 \\ \bullet \quad l_2 &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{375 - 0}{500 - 0} \cdot \frac{375 - 250}{500 - 250} \cdot \frac{375 - 1000}{500 - 1000} = 0.469 \\ \bullet \quad l_3 &= \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{375 - 0}{1000 - 0} \cdot \frac{375 - 250}{1000 - 250} \cdot \frac{375 - 500}{1000 - 500} = -0.016 \end{aligned}$$

Gesucht ist der  $y$  - Wert an der Stelle  $x = 375$

$$P_n(375) = \sum_{i=0}^n l_i(375) \cdot y_i$$

$$P_n(375) = -0.078 \cdot 1013 + 0.625 \cdot 747 + 0.469 \cdot 540 + -0.016 \cdot 226$$

$$P_n(375) = 637.328 \text{ hPa}$$

### Spline Interpolation Punkt berechnen

1. Segment finden und dann in  $S_i(x)$  einsetzen, für Ableitung:

**Ableitungsformel anwenden:** Benutze die Formel  $S'_i(t) = B_i + 2C_i(t - t_i) + 3D_i(t - t_i)^2$  mit  $t = 1$  und dem Startpunkt  $t_i$  des gefundenen Segments.

### Quadratisch-konvergentes Newton-Verfahren

Kann auch lokales Minimum finden, dann ist  $Df$  nicht regulär(invertierbar). Es konvergiert, wenn nahe genug an 0,  $Df$  regulär und  $f$  dreimal stetig differenzierbar.

Lösung von  $f(x) = 0$  mit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$

1. Berechne  $f(x^{(n)})$  und  $Df(x^{(n)})$
2. Berechne  $\delta^{(n)}$  als Lösung des lin. GS  $Df(x^{(n)}) \cdot \delta^{(n)} = -f(x^{(n)})$
3. Setze  $x^{(n+1)} := x^{(n)} + \delta^{(n)}$

**Vereinfacht:** Es wird immer  $Df(x^0)$  verwendet, somit konvergiert es linear.

### Splineinterpolation - kubisch

Polynome mit einem hohen Grad oszilliere, daher werden mehrere Polynome aneinandergehängt alle 3 Punkte. Wenn für Punkt gefragt muss immer  $S, S', S''$ , gleich sein bei Grenzen. **Periodische:** 1&2 Ableitung von Anfang und  $n-1$  ist gleich. **Not-a-knot:**  $S_0'''(x_1) = S_1'''(x_1)$  &  $S_{n-2}'''(x_{n-1}) = S_{n-1}'''(x_{n-1})$   
**Natürliche:** 2. Ableitung von Anfang und Ende = 0.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Berechnung der Polynome  $S_i(x)$  für  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ :

1: Koeffizienten  $a_i, h_i, c_0, c_n$

$$a_i = y_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad c_0 = 0, \quad c_n = 0$$

2: Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  aus dem Gleichungssystem ( $Ac = z$ )

$$\begin{aligned} \bullet \quad i = 1 \\ 2(h_0 + h_1) \cdot c_1 + h_1 c_2 &= 3 \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - 3 \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} \\ \bullet \quad n \geq 4 \rightarrow i = 2, \dots, n - 2 \\ h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i c_{i+1} &= 3 \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - 3 \frac{(y_i - y_{i-1})}{h_{i-1}} \\ \bullet \quad i = n - 1 \\ h_{n-2} c_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \cdot c_{n-1} &= 3 \frac{(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} - 3 \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h_{n-2}} \end{aligned}$$

3: Koeffizienten  $b_i$  und  $d_i$

$$\begin{aligned} \bullet \quad b_i &= \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3} (c_{i+1} + 2c_i) \\ \bullet \quad d_i &= \frac{1}{3h_i} (c_{i+1} - c_i) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3 \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3 \frac{y_3 - y_2}{h_2} - 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ 3 \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3 \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

## Ausgleichsrechnung

**Ausgleichsproblem:** Ziel ist die Datensätze möglichst zu approximieren, nicht genau treffen wie bei Interpolation. Dafür ist stetige Funktion gesucht. Macht bei vielen Punkten Sinn.

**Lineare:**  $f(x)$  ist eine Linearkombination von  $m$  Basisfunktionen. Dabei müssen die Basisfunktionen nicht linear sein, nur Parameter  $\lambda$   
 $f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x), \quad (i = 1, 2, \dots, m \text{ und } m \leq n)$

**Beispiel:**  $f(x) = a \cdot e^x + b + c \cdot x$

**Nicht-linear:** Die Parameter  $\lambda$  sind in der Funktionsgleichung verborgen  $f = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, x)$  **Beispiel:**  $f(x) = \sin(ax) + \ln(bx)$

## Ausgleichsfunktion

Gesucht wird aus einer Menge  $F$  stetiger Funktionen  $f$  diejenige Funktion, die am besten an gegebene Datenpunkte  $(x_i, y_i)$  passt, indem sie den quadratischen Fehler minimiert.

Details:

- **Ansatzfunktionen**  $f \in F$ : Stetige Funktionen auf einem Intervall  $[a, b]$ , die als Näherungen für die Daten dienen.
- **Fehlerfunktional**  $E(f)$ : Misst den quadratischen Fehler zwischen den Datenwerten  $y_i$  und den Funktionswerten  $f(x_i)$ . Formal:

$$E(f) := \|y - f(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

- **Optimierung:** Gesucht ist die Funktion  $f \in F$ , für die  $E(f)$  minimal ist:

$$E(f) = \min\{E(g) \mid g \in F\}$$

- **Ergebnis:** Die optimale Funktion  $f$  heißt **Ausgleichsfunktion** im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (least squares fit).

Die Minimierung von  $E(f)$  entspricht der Minimierung des Quadrats der **2-Norm** des Fehlervektors. Mann kann auch die Fehler in der Summe gewichten, wenn Datenpunkte z.B. höhere Messgenauigkeit haben.

## Normalgleichungssystem

$n$  Gleichungen,  $m$  Unbekannte, meist  $n > m$  → überbestimmtes Fehlergleichungssystem.

Ziel: quadratische Fehlerfunktion  $E(f) = \sum (f(x_i) - y_i)^2$  minimieren.

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

liefert die Normalgleichungen.

Matrixform mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ :

$$A^T A \lambda = A^T y.$$

Direkte Lösung über  $A^T A$  instabil, weil  $A^T A$  meist schlecht konditioniert.

Stabilere Variante: QR-Zerlegung  $A = QR$  mit orthogonalem  $Q$  ( $Q^T Q = I_n$ ) und rechtsobenem, regulärem  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

$$(QR)^T (QR) \lambda = (QR)^T y \Rightarrow R^T Q^T Q R \lambda = R^T Q^T y \Rightarrow R^T R \lambda = R^T Q^T y \Rightarrow R \lambda = Q^T y.$$

$R \lambda = Q^T y$  ist besser konditioniert und wegen der Dreiecksgestalt von  $R$  per Rückwärtseinsetzen lösbar.

Kosten: einmalige QR-Zerlegung, Nutzen: keine Bildung von  $A^T A$ , höhere numerische Stabilität.

Spezialfall  $n = m$ : exakte Lösung,  $E(f) = 0$ , Interpolation.

# Ausgleichsrechnung

## Allgemeines Ausgleichsproblem

Einige Probleme können auf Lineare umgeformt werden, für den Rest:

Gegeben sind  $n$  Wertepaare  $(x_i, y_i)$  und Ansatzfunktionen  $f_p = f_p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, x)$  mit  $m$  Parametern  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ .

Gesucht sind  $m$  Parameter  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$  so, dass das **nichtlineare** Fehlerfunktional  $E(f)$

$$E(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - f_p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, x_i))^2 \rightarrow \min$$

$$\equiv \|y - f(\lambda)\|_2^2 \rightarrow \min$$

**minimal** wird unter allen zulässigen **Belegungen** der Parameter  $\lambda$ , wobei

$$f(\lambda) := f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \\ f_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \\ \vdots \\ f_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, x_1) \\ f_p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, x_2) \\ \vdots \\ f_p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, x_n) \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Das System  $A\lambda = y$  heisst Fehlergleichungssystem.

**Beispiel:**

Gegeben sei die Ansatzfunktion  $f(x) = ae^{bx}$  für die Werte

- $x = [0, 1, 2, 3, 4]$
- $y = [3, 1, 0, 5, 0, 2, 0, 05]$

Fehlerfunktional

$$E(f) = \sum_{i=1}^5 (y_i - f_p(a, b, x_i))^2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - ae^{bx_i})^2$$

Vektorwertige Funktion  $f(a, b)$  bilden

$$f(a, b) = \begin{pmatrix} ae^{bx_1} \\ \vdots \\ ae^{bx_5} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

Funktion  $g(a, b)$  und Jacobi-Matrix  $Df(a, b)$  bilden

$$g(a, b) = y - f(a, b) = \begin{pmatrix} y_1 - ae^{bx_1} \\ \vdots \\ y_5 - ae^{bx_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - ae^{bx_1} \\ \vdots \\ 0.05 - ae^{bx_5} \end{pmatrix}$$

$$Dg(a, b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e^{-b \cdot 1} & -1ae^{-b \cdot 1} \\ -e^{-b \cdot 2} & -2ae^{-b \cdot 2} \\ -e^{-b \cdot 3} & -3ae^{-b \cdot 3} \\ -e^{-b \cdot 4} & -4ae^{-b \cdot 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e^{-1.5} & -1e^{-1.5} \\ -e^{-3} & -2e^{-3} \\ -e^{-4.5} & -3e^{-4.5} \\ -e^{-6} & -4e^{-6} \end{pmatrix}$$

**Nicht Lineares Ausgleichsproblem** mit entsprechendem Verfahren lösen...

- Gauss-Newton oder gedämpftes Gauss-Newton

## Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben seien

- $n$  Wertepaare  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ , und
- $m$  Basisfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  auf einem Intervall  $[a, b]$ .

$F$  ist die Menge der Ansatzfunktionen  $f := \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$  mit  $\lambda_j \in \mathbb{R}$

$$F = \{f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m \mid \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m\}$$

Lineares Ausgleichsproblem mit dem Fehlerfunktional  $E(f)$

$$E(f) = \|y - f(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x_i) \right)^2 = \|y - A\lambda\|_2^2$$

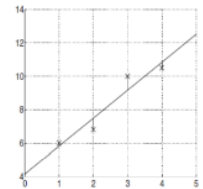
Vor, wobei

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_m(x_n) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Das System  $A\lambda = y$  heisst Fehlergleichungssystem.

**Beispiel:** Gegeben sei die Ansatzfunktion  $f(x) = ax + b$  für die Werte

- $x = [1, 2, 3, 4]$
- $y = [6, 6.8, 10, 10.5]$



1: Basisfunktionen bestimmen

$$f(x) = a \cdot \underbrace{x}_{f_1(x)} + b \cdot \underbrace{1}_{f_2(x)}$$

2: Matrix  $A$  definieren für  $n = 4$  und  $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) \\ f_1(x_4) & f_2(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3: Normalgleichungssystem aufstellen  $A^T A \lambda = A^T y$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6.8 \\ 10 \\ 10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.6 \\ 33.3 \end{pmatrix}$$

4: Gleichung auflösen

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.6 \\ 33.3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.67 \\ 4.15 \end{pmatrix}$$



## Gauss-Newton-Verfahren

**Quadratmittelpunktproblem:** Gegeben sind Funktion  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  und Fehlerfunktional  $E: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} := \|g(x)\|_2^2$ . Es soll Vektor  $x$  gefunden werden bei dem  $E$  minimal wird. Für Nichtlineare Ausgleichsprobleme wird  $g(x)$  ersetzt mit  $g(\lambda) := y - f(\lambda)$

**Verfahren:**  $g(\lambda) \approx g(\lambda^{(0)}) + Dg(\lambda^{(0)}) \cdot (\lambda - \lambda^{(0)})$ . Dies entspricht der verallgemeinerten Tangentengleichung mit

$$\tilde{E}(\lambda) = \left\| \underbrace{g(\lambda^{(0)})}_{\tilde{y}} + \underbrace{Dg(\lambda^{(0)})}_{-\tilde{A}} \cdot \underbrace{(\lambda - \lambda^{(0)})}_{\delta} \right\|_2^2$$

**Berechnung:** Berechne Funktion und deren Jacobi-Matrix

$$g(\lambda) := y - f(\lambda), \quad Dg(\lambda)$$

Für  $k = 0, 1, \dots$ :

**Schritt 1:** Berechne  $\delta^{(k)}$  als Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min \|g(\lambda^{(k)}) + Dg(\lambda^{(k)}) \cdot \delta^{(k)}\|_2^2$$

d.h. löse konkret das folgende Normalgleichungssystem nach  $\delta^{(k)}$  auf

$$Dg(\lambda^{(k)})^T Dg(\lambda^{(k)}) \delta^{(k)} = -Dg(\lambda^{(k)})^T \cdot g(\lambda^{(k)})$$

Dies wird am stabilsten mit der QR-Zerlegung von  $Dg(\delta^{(k)})$  erreicht

$$Dg(\lambda^{(k)}) = Q^{(k)} R^{(k)}, \quad R^{(k)} \delta^{(k)} = -Q^{(k)T} g(\lambda^{(k)})$$

**Schritt 2:** (Nur beim gedämpften Gauss-Newton)

Finde das minimale  $p \in \{0, 1, \dots, p_{\max}\}$  mit

$$\left\| \underbrace{g\left(\lambda^{(k)} + \frac{\delta^{(k)}}{2^p}\right)}_{\lambda^{(k+1)}} \right\|_2^2 < \|g(\lambda^{(k)})\|_2^2$$

Falls kein minimales  $p$  gefunden werden kann, rechne mit  $p = 0$  weiter

**Schritt 3:** (Gauss-Newton)

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta^{(k)}$$

**Schritt 3:** (gedämpftes Gauss-Newton)

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \frac{\delta^{(k)}}{2^p}$$

Gedämpfte verfahren konvergiert für mehr Startvektoren, jedoch ist es nicht garantiert, daher meist extra Abbruchkriterium.

$$\text{Z.B.: } \left\| \frac{\delta^{(k)}}{2^p} \right\|_2 < \text{TOL}$$

## Gauss-Newton-Verfahren-Beispiel

$$f(a, b) = \begin{pmatrix} ae^{bx_1} \\ \vdots \\ ae^{bx_5} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ \vdots \\ 0.05 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Funktion  $g(a, b)$  und Jacobi-Matrix  $Df(a, b)$  bilden

$$g(a, b) = y - f(a, b) = \begin{pmatrix} y_1 - ae^{bx_1} \\ \vdots \\ y_5 - ae^{bx_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ \vdots \\ 0.05 - e^{-6} \end{pmatrix}$$

$$Dg(a, b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e^{b \cdot 1} & -1ae^{bx_1} \\ -e^{b \cdot 2} & -2ae^{bx_2} \\ -e^{b \cdot 3} & -3ae^{bx_3} \\ -e^{b \cdot 4} & -4ae^{bx_4} \\ -e^{b \cdot 5} & -5ae^{bx_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e^{-1.5} & -1e^{-1.5} \\ -e^{-3} & -2e^{-3} \\ -e^{-4.5} & -3e^{-4.5} \\ -e^{-6} & -4e^{-6} \end{pmatrix}$$

**Schritt 1:**

- QR-Zerlegung  $Dg(\lambda^{(0)}) = Q^{(0)} R^{(0)}$
- Auflösen nach  $\delta^{(k)}$   $R^{(0)} \delta^{(0)} = -Q^{(0)T} g(\lambda^{(0)})$

$$\delta^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.89 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3:**

- Lambda berechnen  $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta^{(k)}$

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \delta^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.99 \\ 0.392 \end{pmatrix}$$

**Schritt 1: Householder-Vektor**

Sei  $a = \begin{bmatrix} -0.6065 \\ -0.3679 \end{bmatrix}$ , dann ist:

$$\|a\| = \sqrt{(-0.6065)^2 + (-0.3679)^2} \approx 0.7095$$

$$v = a + \text{sign}(-0.6065) \cdot \|a\| \cdot e_1 = a - \|a\| \cdot e_1 = \begin{bmatrix} -1.3160 \\ -0.3679 \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{v}{\|v\|} \approx \begin{bmatrix} -0.9573 \\ -0.2679 \end{bmatrix}$$

Householder-Matrix:

$$Q^{(0)} = I - 2uu^T = \begin{bmatrix} -0.8328 & -0.5130 \\ -0.5130 & 0.8564 \end{bmatrix}$$

**Schritt 2: Berechne  $R^{(0)} = Q^{(0)T} Dg$ :**

$$R^{(0)} = Q^{(0)T} Dg = \begin{bmatrix} 0.6940 & 0.8829 \\ 0 & -0.3187 \end{bmatrix}$$

**Schritt 3: Berechne  $-Q^{(0)T} g(\lambda^{(0)})$ :**

Gegeben:

$$g(\lambda^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.8935 \\ 0.6321 \end{bmatrix}, \quad Q^{(0)T} g \approx \begin{bmatrix} -1.9012 \\ -0.4302 \end{bmatrix} \Rightarrow -Q^{(0)T} g \approx \begin{bmatrix} 1.9012 \\ 0.4302 \end{bmatrix}$$

**Schritt 4: Rückwärtseinsetzen für  $R^{(0)} \delta^{(0)} = -Q^{(0)T} g$**

$$\begin{bmatrix} 0.6940 & 0.8829 \\ 0 & -0.3187 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9012 \\ 0.4302 \end{bmatrix}$$

Zweite Zeile:

$$-0.3187 \delta_2 = 0.4302 \Rightarrow \delta_2 = -1.3500$$

Erste Zeile:

$$0.6940 \delta_1 + 0.8829(-1.35) = 1.9012 \Rightarrow 0.6940 \delta_1 - 1.192 = 1.9012 \Rightarrow \delta_1 = \frac{3.0932}{0.6940} \approx 4.455$$

## QR-Zerlegung

Eine Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heisst orthogonal, wenn  $Q^T \cdot Q = I_n$  ist. Dabei ist  $I_n$  die  $n \times n$  Einheitsmatrix. Man sagt auch kurz,  $Q$  ist eine Orthogonalmatrix.

**Lösen von LGS:**  $A = QR$ ;  $Ax = b \Rightarrow QRx = b \Rightarrow Q^T b = y$  und  $Rx = y$

**Eigenwert:**  $A_k = Q_k R_k$  und  $A_{k+1} = R_k Q_k$

**Berechnung durch Householder-Matrix:**  $H = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$  oder wenn normiert:  $= I_n - 2uu^T$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$H = I_n - 2\tilde{u}\tilde{u}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**QR-Beispiel:** Falls Matrix grösser, wiederholen aber mit  $A_2, A_3, \dots$

$$H_1 \cdot A_1 = H_1 \cdot \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}_{A_2}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1. \quad v_1 := a_1 + \text{sign}(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$$

$$2. \quad u_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$$

$$3. \quad H_1 := I_n - 2u_1 u_1^T = Q_1$$

$$H_2 \cdot A_2 = H_2 \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}_{A_3}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & H_2 & H_2 \end{pmatrix}$$

$$Q := Q_1^T \cdot Q_2^T, \quad R := \frac{Q_2 \cdot Q_1 \cdot A}{Q^{-1}}$$

## Jacobi Matrix

Gegeben ist die vektorwertige Funktion:

$$f(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_2 x_1} \\ \lambda_1 e^{\lambda_2 x_2} \end{bmatrix}, \quad g(\lambda) = y - f(\lambda)$$

Dann gilt:

$$Df(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_2 x_1} & \lambda_1 x_1 e^{\lambda_2 x_1} \\ e^{\lambda_2 x_2} & \lambda_1 x_2 e^{\lambda_2 x_2} \end{bmatrix}$$

$$Dg(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} (y - f(\lambda)) = -Df(\lambda) = \begin{bmatrix} -e^{\lambda_2 x_1} & -\lambda_1 x_1 e^{\lambda_2 x_1} \\ -e^{\lambda_2 x_2} & -\lambda_1 x_2 e^{\lambda_2 x_2} \end{bmatrix}$$

Beide Matrizen sind  $2 \times 2$ ;  $Df$  beschreibt die Sensitivität von  $f$ ,  $Dg$  die des Residuums

### Problemstellung

Es soll das bestimmte Integral einer Funktion bestimmt werden.

**Quadraturverfahren:**  $I(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ ;  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$

### Rechteck/Tapezregel

$$Rf = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a), \quad Tf = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a)$$

Numerische Berechnungen auf einem Intervall  $[a, b]$

- $n$  Anzahl Subintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$
- $h = \frac{b-a}{n}$  Breite der Subintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$
- $x_i$   $x_i = a + i \cdot h$
- $[x_0, \dots, x_n]$   $x_0 = a, x_n = b$

### summierte Rechtecksregel

$$Rf(h) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

### summierte Trapezregel

$$Tf(h) = h \cdot \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

### Simpson-Regel

$$Sf(h) = \frac{h}{3} \left( \frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

### Fehlerabschätzung für summierte:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Rf(h) \right| \leq \frac{h^2}{24} (b-a) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Tf(h) \right| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Sf(h) \right| \leq \frac{h^4}{2880} (b-a) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Beispiel max. Fehler von 0.1 auflösen bei Trapez:

$$\underbrace{\left| \int_a^b f(x) dx - T_f(h) \right|}_{\text{Fehler}} \leq 0,1. \quad \frac{b-a}{12} M h^2 \leq 0,1,$$

< Dreht sich bei: \* oder : mit negativer Zahl

# Numerische Integration

### Gauss-Formeln

Die Intervalle  $h$  müssen nicht immer gleich gross sein, sie werden hier so gewählt, dass die Fehlerordnung möglichst klein ist.

Die Gauss Formeln für  $n = 1, 2, 3$  für  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$  lauten:

- $n = 1$ :  $G_1 f = (b-a) \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right)$
- $n = 2$ :  $G_2 f = \frac{b-a}{2} \left[ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}\right) \right]$
- $n = 3$ :  $G_3 f = \frac{b-a}{2} \left[ \frac{5}{9} \cdot f\left(-\sqrt{0.6} \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{8}{9} \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} \left[ \frac{5}{9} \cdot f\left(\sqrt{0.6} \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}\right) \right] \right]$

### Vektornormen/Matrixnormen

Für Vektoren  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ :

$$1\text{-Norm, Summennorm} : \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$2\text{-Norm, euklidische Norm} : \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\infty\text{-Norm, Maximumnorm} : \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Für  $n \times$

**$n$  Matrix mit Vektornormen gibt es Matrixnormen:**

$$1\text{-Norm, Spaltensummennorm} : \|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$2\text{-Norm, Spektralnorm} : \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

$$\infty\text{-Norm, Zeilensummennorm} : \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

### Normalgleichungssystem – Design Matrix A für poly

$$f(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_n \phi_n(x)$$

Dann besteht die Designmatrix  $A$  aus den Funktionsauswertungen  $\phi_j(x_i)$ :

$$A = \begin{bmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_m) & \phi_1(x_m) & \dots & \phi_n(x_m) \end{bmatrix}$$

### Romberg-Extrapolation

Die **summierte Trapezregel** für die Approximation des Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  mit gleichmäßigem Gitter der Schrittweite  $h = \frac{b-a}{n}$  lautet:

$$T(f, h) = \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b) \right]$$

Hier wird aber eine spezielle Variante der summierten Trapezregel verwendet, um Fehler zu verkleinern mit Iteration.

Die entsprechende summierte Trapezregel lautet dann für ein gegebenes  $j$ :

$$T_{j0} = Tf(h_j) = h_j \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2^j-1} f(a + i \cdot h_j) \right)$$

Parameter:

- $h_j = \frac{b-a}{2^j}$ : Schrittweite
- $n = 2^j$ : Anzahl der Teilintervalle
- $T_{j0}$ : erste Spalte der Romberg-Tabelle (Trapezregel-Näherung bei Schrittweite  $h_j$ )

Diese Werte  $T_{j0}$  werden rekursiv zu genaueren Näherungen  $T_{jk}$  extrapoliert.

Die Rekursion lautet:

$$T_{jk} = \frac{4^k \cdot T_{j+1,k-1} - T_{j,k-1}}{4^k - 1}$$

Bedeutung:

- $T_{j,k}$ : verbesserte Näherung mit Schrittweite  $h_j = \frac{b-a}{2^j}$  und Extrapolationsstufe  $k$
- $T_{j,k-1}$ : vorherige Näherung mit derselben Schrittweite  $h_j$
- $T_{j+1,k-1}$ : vorherige Näherung mit halbiertem Schrittweite  $h_{j+1} = \frac{h_j}{2}$
- $4^k$ : kommt daher, dass der Fehler der Trapezregel  $\mathcal{O}(h^2)$  ist und Richardson-Extrapolation auf einen Fehler  $\mathcal{O}(h^{2k+2})$  zielt

Ziel:

Eliminierung des führenden Fehlerterms durch gewichtete Kombination zweier Näherungen.

Der neue Wert  $T_{jk}$  hat eine um zwei höhere Fehlerordnung als  $T_{j,k-1}$  oder  $T_{j+1,k-1}$ .

$$\begin{array}{ccccccc} T_{0,0} & & & & & & \\ T_{1,0} & T_{0,1} & & & & & \\ T_{2,0} & T_{1,1} & T_{0,2} & & & & \\ T_{3,0} & T_{2,1} & T_{1,2} & T_{0,3} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ T_{m,0} & T_{m-1,1} & T_{m-2,2} & T_{m-3,3} & \dots & T_{0,m} \end{array}$$

Interpretation:

- Spalte  $k = 0$ : Trapezregel-Näherungen mit  $h = \frac{b-a}{2^j}$
- Diagonal nach rechts oben: Extrapolation auf höhere Genauigkeit
- $T_{0,m}$ : beste Näherung mit Schrittweite  $h_m = \frac{b-a}{2^m}$ , Fehlerordnung  $\mathcal{O}(h^{2m+2})$

$T_{j,0}$ =Trapezregel,  $T_{j,1}$ =Simpson



### Rezept System erstellen

1. Es wird nach der n-ten Ableitung aufgelöst, mit Hilfsfunktionen bis n-1
2. Hilfsfunktion ableiten, dann einsetzen in die obere Gleichung
3. In Vektorieller Form aufschreiben und lösen

**Beispiel:** Gegeben sei die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' + 5y'' + 8y' + 6y = 10e^{-x}$$

Mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = y''(0) = 0$$

1. Auflösen nach der höchsten Ableitung

$$y''' = 10e^{-x} - 5y'' - 8y' - 6y$$

2. Einführen von Hilfsfunktionen  $z_1, z_2, z_3$  bis zur zweiten Ableitung

$$z_1(x) = y(x)$$

$$z_2(x) = y'(x)$$

$$z_3(x) = y''(x)$$

3. Ableiten der Hilfsfunktionen

$$z_1' = y' (= z_2)$$

$$z_2' = y'' (= z_3)$$

$$z_3' = y'''$$

$$= 10e^{-x} - 5y'' - 8y' - 6y$$

$$= 10e^{-x} - 5z_3 - 8z_2 - 6z_1$$

4. DGL in vektorieller Form schreiben

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ 10e^{-x} - 5z_3 - 8z_2 - 6z_1 \end{pmatrix} = f(x, z),$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Darstellung

**Allgemeine Form:**  $y' = f(x, y)$  mit  $y(x_0) = y^{(0)}$ . Hierbei ist  $y$  eine vektorwertige Funktion, also  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , d.h. ein Vektor mit  $k$  Funktionen

**Darstellung der Lösung:**  $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_k(x) \end{pmatrix}$  dabei  $y_i(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

**Vektorwertige Funktion:**  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $f(x, y(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y(x)) \\ \vdots \\ f_k(x, y(x)) \end{pmatrix}$

**Komponentenschreibweise:** Liste  $y_1'$  bis  $y_k'(x) = f_k(x, y_1(x), \dots, y_k(x))$

$$y'(x) = f(x, y(x)) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ -y_1(x) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Systeme von DGL

### Rezept System lösen

Ist ein Lösungsverfahren

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \text{Steigung} \cdot h$$

Für die eindimensionale Gleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

Definiert, so kann es völlig analog erweitert werden als

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + \text{Steigung} \cdot h$$

Für ein System

$$y' = f(x, y(x)) \text{ mit } y(x_0) = y^{(0)}$$

Dabei werden ersetzt

- $y'$  durch den Vektor  $y'$  der Ableitung der einzelnen Komponenten
- $f(x, y(x))$  durch die vektorwertige Funktion  $f(x, y(x))$  und
- Die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  durch  $y(x_0) = y^{(0)}$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x, y(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y(x)) \\ f_2(x, y(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y(x)) \end{pmatrix}, y(x_0) = y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}$$

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ -1.1z_4 + 0.1z_3 + 0.4z_1 + \sin x + 5 \end{pmatrix} = f(x, z)$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \\ z_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auflösen mit Euler-Verfahren

$$h = 0.1, \quad y^{(0)} = (0, 2, 0, 0)^T, \quad x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + 0.1 = 0.1, \quad y^{(i+1)} = y^{(i)} + \text{Steigung} \cdot h$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1.1 \cdot 0 + 0.1 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0 + \sin 0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

### Newton Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Startwert möglichst nahe bei der Lösung, überprüfen

$$\text{mit: } \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1 \quad E_{\text{abs}} \approx |x_{n+1} - x_n|$$

**Vereinfachtes Verfahren:**  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$

### Umformungen der bestimmten Integrale

1. Ausgangs-ODE

$$m \frac{dv}{dt} = -(5v^2 + 570000).$$

2. Separation der Variablen

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{5v^2 + 570000}{m} \Rightarrow dt = -\frac{m}{5v^2 + 570000} dv.$$

3. Bremszeit  $t_E$

$$t_E = \int_{t=0}^{t_E} dt = \int_{v=100}^0 \left( -\frac{m}{5v^2 + 570000} \right) dv.$$

Minuszeichen und Grenzvertauschung:

$$\int_{100}^0 -f(v) dv = \int_0^{100} f(v) dv,$$

also

$$t_E = \int_0^{100} \frac{m}{5v^2 + 570000} dv.$$

4. Bremsweg  $x_E$

$$x_E = \int_0^{t_E} v dt = \int_{v=100}^0 v \left( -\frac{m}{5v^2 + 570000} \right) dv = \int_0^{100} \frac{mv}{5v^2 + 570000} dv$$

### Integral

$$\int_b^a f(x) dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b)$$

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx; \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int (u'(x) * v(x)) * dx = u(x) * v(x) - \int (u(x) * v'(x)) * dx$$
$$\int_a^b (u' * v) * dx = [u(x) * v(x)]_a^b - \int_a^b (u(x) * v'(x)) * dx$$
$$a * \int f = \int a * f; \quad \int (f(x) \pm d(x)) = \int f(x) \pm \int d(x)$$

### Unbestimmtes Integral

Potenzfunktionen

$$\begin{aligned} \int (x^a) dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \\ \int \left(\frac{1}{x}\right) dx &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} \int (e^x) dx &= e^x + C \\ \int (a^x) dx &= \frac{a^x}{\ln(a)} + C \\ \int (\ln(x)) dx &= x \cdot \ln(x) - x + C \\ \int (\log_a(x)) dx &= \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C \end{aligned}$$

Geometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \int (\cos(x)) dx &= \sin(x) + C \\ \int (\sin(x)) dx &= -\cos(x) + C \\ \int (\tan(x)) dx &= -\ln|\cos(x)| + C \end{aligned}$$

Weitere Funktionen

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx &= \arctan(x) + C \\ \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx &= \arcsin(x) + C \\ \int \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx &= \arccos(x) + C \end{aligned}$$

### Relative Extrema

Relative **Extremal-Stelle:**  $x_0$ , **-Punkt:**  $P_0 = (x_0, y_0)$ , **Extremum:**  $y_0$

**Berechnung:**  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \neq 0$ , für  $x_0: f'$  nach 0 **auf**.

Für Hochpunkt gefundenes  $x_0$  in Originalfunktion einsetzen

**Typenbestimmung:**  $f''(x_0) > 0 = \text{Minimum}$

$f''(x_0) < 0 = \text{Maximum}$



## Newton Verfahren für NL-GLS

System

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ f_2(x, y) = x - y = 0. \end{cases}$$

Jacobi-Matrix

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Iteration

$$(x^{(n+1)}, y^{(n+1)}) = (x^{(n)}, y^{(n)}) + \delta^{(n)}, \quad J(x^{(n)}) \delta^{(n)} = -f(x^{(n)}).$$

| Schritt $n$ | $x^{(n)}, y^{(n)}$ | $f(x^{(n)})$ | $J(x^{(n)})$                                    | Lösung $\delta^{(n)}$ | $x^{(n+1)}, y^{(n+1)}$     |
|-------------|--------------------|--------------|-------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 0           | (1, 1)             | (-2, 0)      | $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ | (0.5, 0.5)            | (1.5, 1.5)                 |
| 1           | (1.5, 1.5)         | (0.5, 0)     | $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ | (-0.08333, -0.08333)  | $\approx (1.4167, 1.4167)$ |

Nach zwei Schritten ist  $(x, y) \approx (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \approx (1.4142, 1.4142)$ .

## Euler Verfahren

Differenzialgleichung

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Euler-Schema

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \quad t_{n+1} = t_n + h.$$

Setze  $h = 0,5$ . Dann gilt:

| $n$ | $t_n$ | $y_n$  | $f(t_n, y_n) = y_n$ | $y_{n+1} = y_n + h y_n$              | Genau: $e^{t_{n+1}}$ |
|-----|-------|--------|---------------------|--------------------------------------|----------------------|
| 0   | 0,0   | 1,0000 | 1,0000              | $1,0000 + 0,5 \cdot 1,0000 = 1,5000$ | 1,6487               |
| 1   | 0,5   | 1,5000 | 1,5000              | $1,5000 + 0,5 \cdot 1,5000 = 2,2500$ | 2,1170               |

Nach zwei Schritten ist  $y_2 \approx 2,25$  statt des exakten  $e^1 \approx 2,7183$ .

## Romberg-Extrapolation

$$I = \int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1,71828.$$

Wir berechnen zunächst die Trapez-Approximationen

$$T(h) = \frac{h}{2} (f(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(kh) + f(1)),$$

wobei  $h = (1 - 0)/n$ . Dann bauen wir die Romberg-Tabelle:

| $n$ | $h$ | $T(h)$                                                | $R_{n,1} = T(h)$ | $R_{n,2} = \frac{4R_{n,1} - R_{n-1,1}}{4-1}$    |
|-----|-----|-------------------------------------------------------|------------------|-------------------------------------------------|
| 1   | 1,0 | $\frac{1+e}{2} = 1,85914$                             | 1,85914          | -                                               |
| 2   | 0,5 | $0,5[\frac{1}{2} + e^{0,5} + \frac{1}{2}e] = 1,75393$ | 1,75393          | $\frac{4 \cdot 1,75393 - 1,85914}{3} = 1,71886$ |

# Beispiele

## Gauss

Für die Lösung von GLS.

**Ziel:** Umformung von Matrix zu oberen Dreiecksform

**Formel:** Berechnen durch Rückwärtseinsetzen:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Transformation der Matrix:

$$z_j := z_j - \lambda z_i, \quad \text{mit } \lambda = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}, \quad i < j.$$

Die Determinante wird berechnet als:

$$\det(A) = (-1)^l \prod_{i=1}^n \tilde{a}_{ii},$$

wobei  $l$  die Anzahl der Zeilenvertauschungen ist.

**Beispiel:** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 29 \\ 43 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

1. Eliminationsschritte:

- Subtrahiere das 7-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -26 & -36 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 29 \\ -160 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Subtrahiere 2-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -26 & -36 \\ 0 & -7 & -8 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 29 \\ -160 \\ -38 \end{pmatrix}$$

- Subtrahiere  $\frac{7}{26}$ -fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -26 & -36 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 29 \\ -160 \\ 66 \end{pmatrix}$$

2. Rückwärtseinsetzen:

- $x_3 = \frac{66}{22} = 3,$
- $x_2 = \frac{-160 - (-36) \cdot 3}{-26} = 2,$
- $x_1 = \frac{29 - 5 \cdot 2 - 6 \cdot 3}{1} = 1.$

Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## Lineares Ausgleichsproblem

Daten

$$\{(x_i, y_i)\} = \{(1, 2.0), (2, 2.9), (3, 4.1)\}.$$

Aufbau

Matrix-Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.9 \\ 4.1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Normalgleichungen

$$A^T A \beta = A^T y.$$

Rechnung

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad A^T y = \begin{pmatrix} 2.0 + 2.9 + 4.1 \\ 1 \cdot 2.0 + 2 \cdot 2.9 + 3 \cdot 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.0 \\ 20.3 \end{pmatrix}.$$

Löse

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.0 \\ 20.3 \end{pmatrix} \implies b \approx 1.0333, \quad a \approx 1.0333.$$

Ergebnis

$$\hat{y} = 1.0333 + 1.0333 x.$$

Multipliziere Gleichung 1 mit 2 und subtrahiere von Gleichung 2:

$$6b + 14a - (6b + 12a) = 20.3 - 18.0 \implies 2a = 2.3 \implies a = 1.15.$$

Setze  $a$  in Gleichung 1 ein:

$$3b + 6 \cdot 1.15 = 9.0 \implies 3b = 9.0 - 6.9 = 2.1 \implies b = 0.7.$$

Wenn dein Parameter **nur** vor  $x$ , vor einer bekannten Funktion oder als Summand steht (z. B.  $y = ax + b$ ,  $y = a \sin(x) + b$ ), dann ist das lineare Ausgleichsproblem anwendbar.

Sobald dein Parameter **selbst** Teil einer nicht-linearen Funktion ist (z. B.  $\cos(a)$ ,  $a^2$ ,  $e^a$ ,  $\frac{1}{a}$ ), ist das Problem **nicht** mehr linear in den Parametern.

## Lagrange Interpolationsformel

Interpolation durch die 3 Punkte  $(0, 1)$ ,  $(1, 3)$  und  $(2, 2)$  ( $n = 2$ ):

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \\ l_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -\frac{x(x-2)}{1}, \\ l_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}. \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} L(x) &= 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 3 \frac{x(x-2)}{1} + 2 \frac{x(x-1)}{2}. \end{aligned}$$

## Newton Verfahren

Wir wollen  $\sqrt{2}$  finden, also die Lösung von

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Hier ist  $f'(x) = 2x$ . Mit Startwert  $x_0 = 1$  erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = 1 - \frac{-1}{2} = 1.5, \\ x_2 &= 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.5 - \frac{0.25}{3} \approx 1.4167, \\ x_3 &= 1.4167 - \frac{1.4167^2 - 2}{2 \cdot 1.4167} \approx 1.4142. \end{aligned}$$

Nach drei Schritten liegt man schon bei

$$x_3 \approx 1.4142,$$

## Ableiten

$$w(x,t) = \sin(x + ct)$$

w partiell nach t ableiten:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c \cdot \cos(x + ct)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(c \cdot \cos(x + ct)) = c^2 \cdot -\sin(x + ct)$$

w partiell nach x ableiten:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos(x + ct)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos(x + ct)) = -\sin(x + ct)$$

Überprüfung auf Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \cdot -\sin(x + ct)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot c^2 = -\sin(x + ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sin(x + ct) \cdot c^2$$

Die Funktion  $w(x,t) = \sin(x + ct)$  erfüllt die Wellengleichung

$$v(x,t) = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$$

v partiell nach t ableiten:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c \cdot \cos(x + ct) + 2c \cdot -\sin(2x + 2ct)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(c \cdot \cos(x + ct) + 2c \cdot -\sin(2x + 2ct)) = c^2 \cdot -\sin(x + ct) + 4c^2 \cdot -\cos(2x + 2ct)$$

v partiell nach x ableiten:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos(x + ct) - 2(\sin(2x + 2ct))$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\cos(x + ct) - 2(\sin(2x + 2ct))) = -\sin(x + ct) - 4\cos(2x + 2ct)$$

Überprüfung auf Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \cdot -\sin(x + ct) + 4c^2 \cdot -\cos(2x + 2ct) = (-\sin(x + ct) - 4 \cdot \cos(2x + 2ct)) \cdot c^2$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot c^2 = -\sin(x + ct) - 4\cos(2x + 2ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (-\sin(x + ct) - 4\cos(2x + 2ct)) \cdot c^2$$

Die Funktion  $v(x,t) = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$  erfüllt die Wellengleichung

## Linearisieren

Für Funktion  $f(x) = x^2$

$$g(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 1 + 2(x - 1).$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Wir linearisieren um den Punkt  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (1, 2)$ .

1. Jacobi-Matrix berechnen

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

2. Am Punkt auswerten

$$f(1, 2) = \begin{pmatrix} 1^2 + 2 \\ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Df(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Linearisierung

Für  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  gilt in der Umgebung von  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2)^T$

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)}) + Df(\mathbf{x}^{(0)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Schreibt man's aus:

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3 + 2(x_1 - 1) + 1(x_2 - 2) \\ \end{pmatrix}.$$

## Splinefunktion

Zu den folgenden Stützpunkten soll die natürliche kubische Splinefunktion bestimmt werden, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten  $a_i, b_i, c_i, d_i$  der kubischen Polynome  $S_i$  für  $i = 0, 1, 2$  und geben Sie die  $S_i(x)$  explizit an.

|    |       |      |       |    |                                                                         |  |
|----|-------|------|-------|----|-------------------------------------------------------------------------|--|
|    | $x_i$ | 4    | 6     | 8  | 10                                                                      |  |
|    | $y_i$ | 6    | 3     | 9  | 0                                                                       |  |
| i  | 0     | 1    | 2     | 3  | Berechnung                                                              |  |
| xi | 4     | 6    | 8     | 10 | gegeben                                                                 |  |
| yi | 6     | 3    | 9     | 0  | gegeben                                                                 |  |
| ai | 6     | 3    | 9     | 0  | ai = yi                                                                 |  |
| bi | -3,2  | 1,9  | 0,1   |    | $bi = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2 \cdot c_i)$ |  |
| ci | 0     | 2,55 | -3,45 | 0  | Siehe unten                                                             |  |
| di | 0,425 | -1   | 0,575 |    | $di = \frac{1}{3 \cdot h_i} \cdot (h_{i+1} - c_i)$                      |  |
| hi | 2     | 2    | 2     | 2  | hi = xi + 1 - xi                                                        |  |

Berechnung ci:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cdot (h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2 \cdot (h_2 + h_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 3 \cdot (\frac{y_2 - y_1}{h_1}) & 3 \cdot (\frac{y_1 - y_0}{h_0}) \\ 3 \cdot (\frac{y_3 - y_2}{h_2}) & 3 \cdot (\frac{y_2 - y_1}{h_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.5 \\ -22.5 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 13.5 \\ -22.5 \end{pmatrix} \rightarrow c = [0, 2.55, -3.45, 0]$$

Berechnung S:

$$S_n = a + b(x - x_n) + c(x - x_n)^2 + d(x - x_n)^3$$
$$S_0 = 6 - 3.2(x - 4) + 0 + 0.425(x - 4)^3$$
$$S_1 = 3 + 1.9(x - 6) + 2.55(x - 6)^2 - (x - 6)^3$$
$$S_2 = 9 + 0.1(x - 8) - 3.45(x - 8)^2 + 0.575(x - 8)^3$$

|                |     |     |     |
|----------------|-----|-----|-----|
| i              | 0   | 1   | 2   |
| x <sub>i</sub> | 0   | 2   | 6   |
| y <sub>i</sub> | 0.1 | 0.9 | 0.1 |

Da sich die Demo wiederholt und ein fließender Übergang gewünscht ist, verwenden sie für die Bestimmung des Pfades kubische Splineinterpolation mit natürlichen Randbedingungen:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 \quad \text{mit} \quad x \in [x_0, x_1], \quad \text{und}$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \quad \text{mit} \quad x \in [x_1, x_2]$$

```
# S_0(x_0) = y_0      -> a_0=y_0
# S_1(x_1) = y_1      -> a_1=y_1
# S_1(x_2) = y_2      -> a_1+b_1*h_1+c_1*h_1^2+d_1*h_1^3=y_2
# S_0(x_1) = S_1(x_1) -> a_0+b_0*h_0+c_0*h_0^2+d_0*h_0^3=y_1
# S_0'(x_1) = S_1'(x_1) -> b_0+2*c_0*h_0+3*d_0*h_0^2=b_1
# S_0''(x_1) = S_1''(x_1) -> 2*c_0+6*d_0*h_0=2*c_1
# S_0'''(x_0) = 0      -> 2*c_0=0
# S_1'''(x_2) = 0      -> 2*c_1+6*d_1*h1=0
```

$$f((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 100 - 80 x_2 - 2500 x_1 \end{pmatrix}.$$

1. „k<sub>1</sub>“ bei  $t_0 = 0$ ,  $x^{(0)} = (0, 0)$ :

$$k_1 = f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 - 80 \cdot 0 - 2500 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

2. Zwischenwert

$$x^{(*)} = x^{(0)} + \frac{h}{2} k_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,005 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

3. „k<sub>2</sub>“ bei  $t = t_0 + \frac{h}{2}$ ,  $x = x^{(*)}$ :

$$k_2 = f(x^{(*)}) = \begin{pmatrix} x_2^{(*)} \\ 100 - 80 x_2^{(*)} - 2500 x_1^{(*)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 100 - 80 \cdot 0,5 - 2500 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

4. Neuer Wert

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h k_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,01 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

## Ableiten

Betrachten Sie die folgende DGL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

auf dem Intervall  $0 \leq x \leq 1.4$  mit  $y(0) = 2$ . Lösen Sie die DGL manuell mit

(a) dem Euler-Verfahren mit  $h = 0.7$ .

(b) dem Mittelpunkt-Verfahren mit  $h = 0.7$ .

(c) dem modifizierten Euler-Verfahren mit  $h = 0.7$ .

Die exakte Lösung der DGL ist  $y(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 4}$ . Berechnen Sie für (a) - (c) jeweils den absoluten Fehler  $|y(x_i) - y_i|$  für jedes  $x_i$ .

a)

| i | $x_i \Rightarrow x_n = x_0 + n \cdot h$ | $y_i \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_i, y_i)$ | $f(x_i, y_i) \Rightarrow \frac{x^2}{y}$ |
|---|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 0 | 0                                       | 2                                                     | 0                                       |
| 1 | 0.7                                     | 2                                                     | 0.245                                   |
| 2 | 1.4                                     | 2.1715                                                | -                                       |

Absoluter Fehler

| $x_i$ | Fehler |
|-------|--------|
| 1     | 0.0564 |
| 2     | 0.2429 |

b) Erste Berechnung:

$$x_{\frac{h}{2}} = 0 + \frac{0.7}{2} = 0.35$$
$$y_{\frac{h}{2}} = 2 + 0.35 \cdot \frac{0^2}{2} = 2$$
$$x_1 = 0 + 0.7 = 0.7$$
$$y_1 = 2 + 0.7 \cdot \frac{0.35^2}{2} = 2.042875$$

Zweite Berechnung:

$$x_{\frac{h}{2}} = 0.7 + \frac{0.7}{2} = 1.05$$
$$y_{\frac{h}{2}} = 2.042875 + 0.35 \cdot \frac{0.7^2}{2 \cdot 0.042875} = 2.12683$$
$$x_2 = 0.7 + 0.7 = 1.4$$
$$y_2 = 2.042875 + 0.7 \cdot \frac{1.05^2}{2 \cdot 1.12683} = 2.40574$$

Absoluter Fehler

| $x_i$ | Fehler |
|-------|--------|
| 1     | 0.0135 |
| 2     | 0.0087 |

C) Erste Berechnung:

$$k_{1,0} = \frac{0^2}{2} = 0$$
$$Euler: y_1 = 2 + 0.7 \cdot 0 = 2$$
$$x_1 = 0.7$$
$$k_{2,0} = \frac{0.7^2}{2} = 0.245$$
$$y_1 = 2 + 0.7 \cdot \frac{0.245}{2} = 2,08575$$

Zweite Berechnung:

$$k_{1,1} = \frac{0.49}{2,08575}$$
$$Euler: y_2 = 2,08575 + 0.7 \cdot \frac{0.49}{2,08575} \approx 2,2502$$
$$x_2 = 1.4$$
$$k_{2,1} \approx \frac{1.4^2}{2,2502} \approx 0,871034$$
$$y_2 \approx 2,08575 + 0.7 \cdot \frac{\frac{0.49}{2,08575} + 0,871034}{2} \approx 2,47284$$

Absoluter Fehler

| $x_i$ | Fehler |
|-------|--------|
| 1     | 0.0294 |
| 2     | 0.0584 |