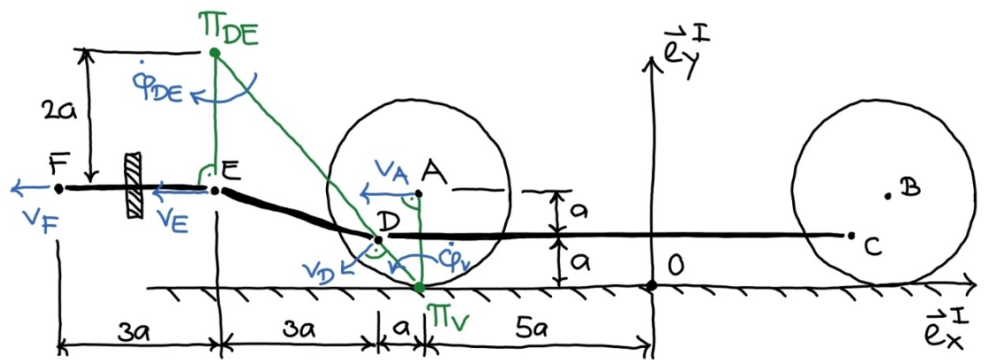


Aufgabe Ebene Kinematik

1. Kinematikskizze

Kinematikskizze

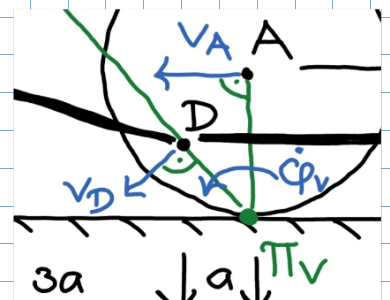


2. Momentanpol definieren und Winkelgeschwindigkeit

V ist gegeben $V \stackrel{!}{=} V_A$

$$V = \dot{\varphi} \cdot R$$

Wenn etwas nicht gegeben, einfach v, φ, R verwenden!



3. Absolutgeschwindigkeit von Punkt D

$$\vec{r}_{0D} = \dot{\varphi}_v \cdot \begin{pmatrix} -a \\ -a \end{pmatrix} \leftarrow \text{Radius von } \pi_v \text{ nach Punkt D, gedreht in richtung von } v_D$$

$$\vec{r}_{0D} = \frac{V}{2a} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{V}{2} \\ -\frac{V}{2} \end{pmatrix}$$

Schnelligkeit des Punktes $v_D = \|\vec{r}_{0D}\| = \sqrt{\left(-\frac{V}{2}\right)^2 + \left(\frac{V}{2}\right)^2} = \underline{\underline{V \frac{\sqrt{2}}{2}}}$

Wenn keine Winkelgeschwindigkeit $\rightarrow$ Bewegung rein Translatorisch
Wenn kein Schnittpunkt $\varphi=0$

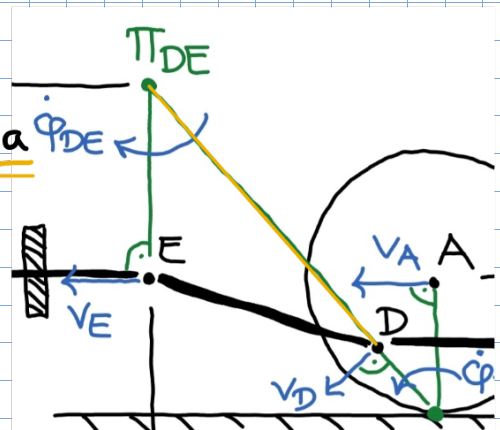
4. Momentanpol definieren und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{DE}$ mit Berechnetem v_D Berechnen

$$\pi_{DE} \begin{pmatrix} -9a \\ 4a \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\|\pi_{DE} D\| = \underline{\underline{3\sqrt{2}a}}$$

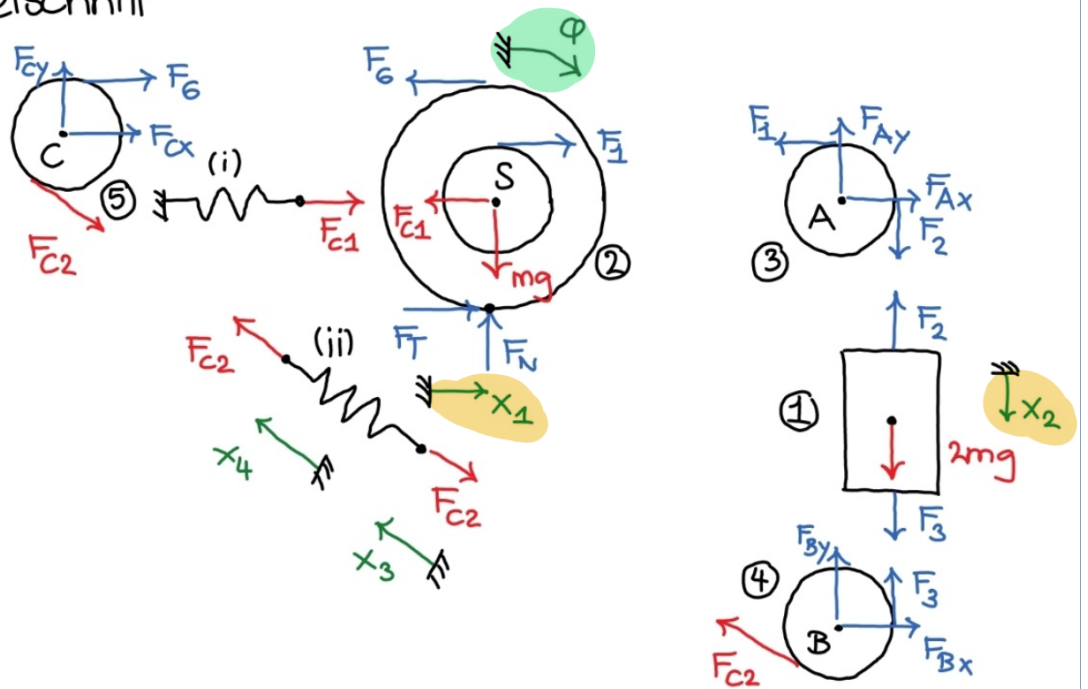
Strecke $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$\dot{\varphi} = \frac{V}{R} = \frac{V\sqrt{2}}{2 \cdot 3\sqrt{2}a} = \underline{\underline{\frac{V}{6a}}}$$



Ebene Kinetik

Freischnitt



1. Freiheitsgrad

2. Freischnitt (alle Körper werden getrennt!)

3. Impuls + Spinsätze (für alle Körper separat!)

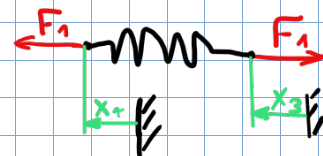
Auf **Richtung** und **Rotation** achten

4. Kraftgesetze Federn

$$F_{c1} = x_1 \cdot c, \quad F_{c2} = 2c(x_4 - x_3)$$

Ist niemals nur $c \cdot x$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \downarrow: \quad 2m\ddot{x}_2 &= F_3 - F_2 + 2mg \\ \textcircled{2} \quad \begin{cases} \rightarrow: \quad m\ddot{x}_1 &= F_1 + F_T - F_6 - F_{c1} \\ \odot: \quad 2mR^2\ddot{\varphi} &= RF_1 - 2RF_6 - 2RF_T \end{cases} \end{aligned}$$



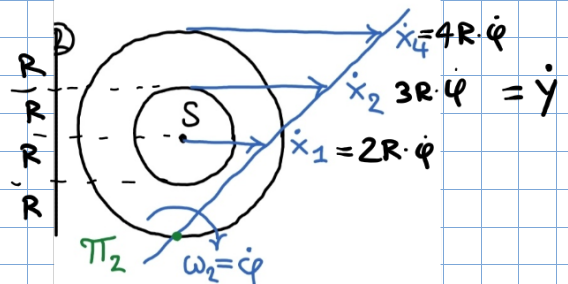
F_1 und x_1 zeigen in gleiche richtung $\rightarrow x_4$ positiv

5. Kinematische Relation

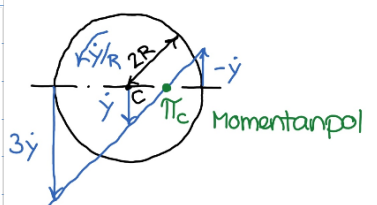
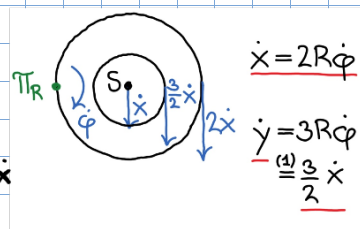
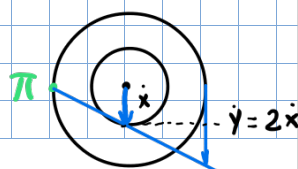
$$V = R \cdot \dot{\varphi}$$

Kinematik Skizze

Momentanpol beachten!

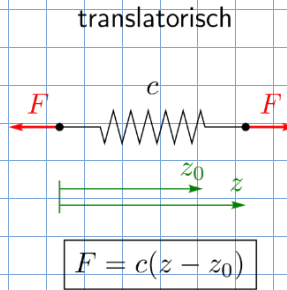


6. Gleichungen kombinieren

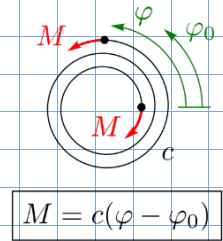


Kraftgesetze äussere Kräfte

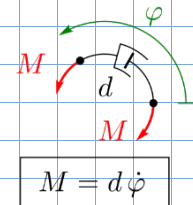
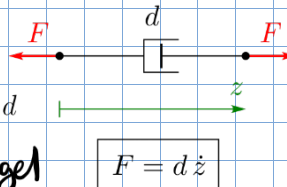
Lineare Feder
(konservativ)
mit Federkonstante c



rotatorisch

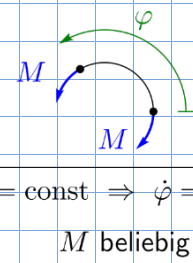
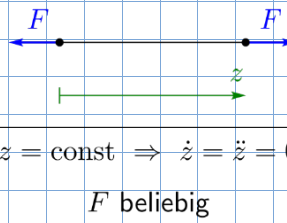


Linearer Dämpfer
(dissipativ)
mit Dämpferkonstante d



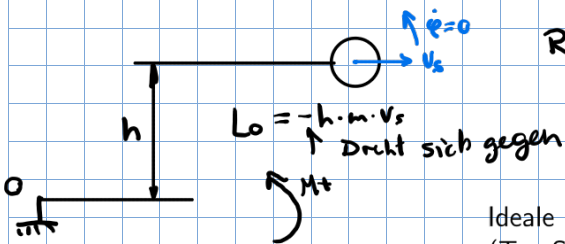
Rechte Hand regel

Ideale Bindung
(Typ Stange)



$\vec{F}(t), M(t)$

Zeitliche Kraft-/Momentverläufe



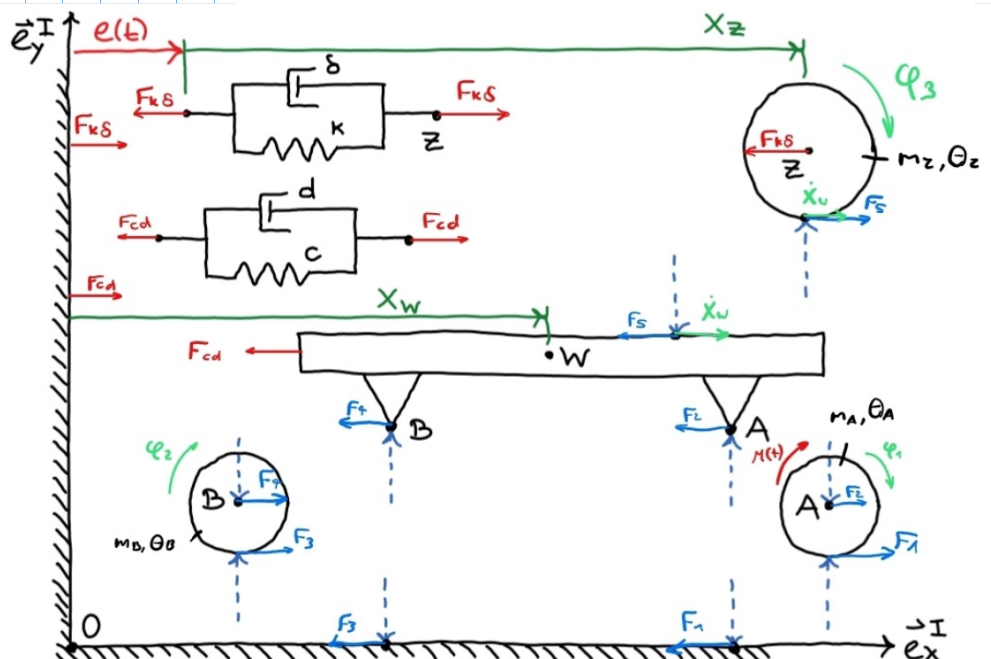
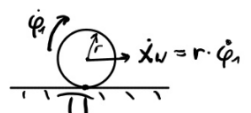
Kraftgesetz eingeprägte Kräfte

$\underline{F_{ks}} = \underline{F_k} + \underline{F_s} = \underline{k(x_z - a) + \delta \cdot \dot{x}_z}$ Entspannte Länge Feder

$\underline{F_{cd}} = \underline{F_c} + \underline{F_d} = \underline{c \cdot x_u + d \cdot \dot{x}_u}$

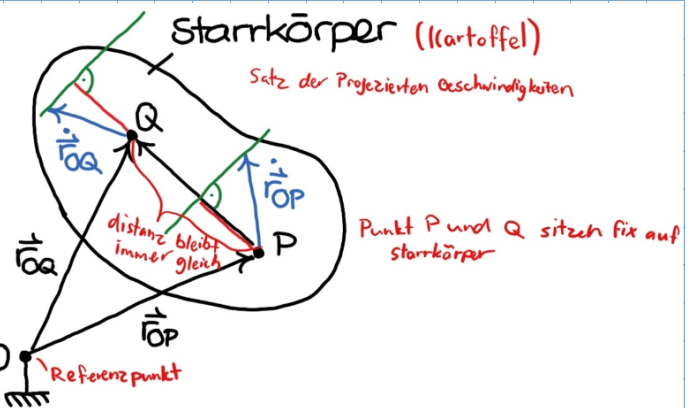
Kinematik $\dot{x}_w = r \cdot \dot{\varphi}_1$

$\dot{x}_u = r \cdot \dot{\varphi}_2 \quad \dot{e}(t) + \dot{x}_z = \dot{x}_w + R \dot{\varphi}_3$



Kinematik

Ebene Kinematik Starre Körper

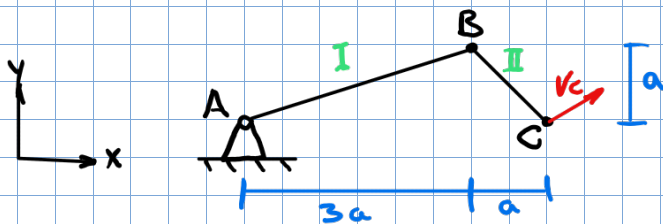
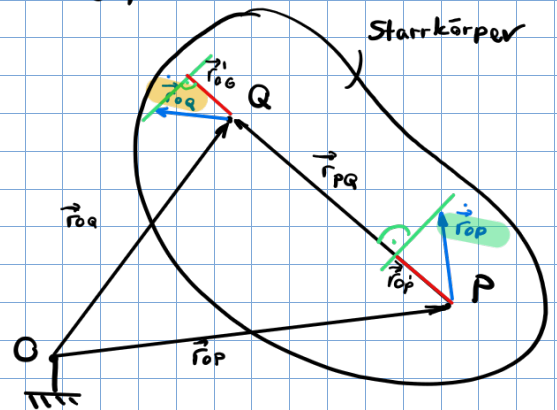
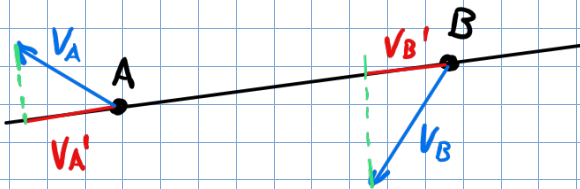


Satz der Projizierten Geschwindigkeiten

Wenn Punkt P und Q auf demselben Starrkörper

$$\vec{v}_A' = \vec{v}_B'$$

$$\vec{v}_A \cdot \vec{r}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{r}_{AB}$$



$$v_C = \left(\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right) \frac{v}{4}$$

Gesucht: $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_{BX} \\ v_{BY} \end{pmatrix}$

$$\vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} a$$

$$\vec{v}_A \cdot \vec{r}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{v}_B \cdot \vec{r}_{BC} = \vec{v}_C \cdot \vec{r}_{BC}$$

$$\vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} v_{BX} \\ v_{BY} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} a$$

$$v_{BX} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a = \left(\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right) \frac{v}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a$$

$$\int 0 dx = c$$

$$\int_a^b 0 dx = 0$$

$$0 = (3 v_{BX} + v_{BY}) a$$

$$v_{BY} = -3 v_{BX}$$

$$v_{BY} = -\frac{3}{16} v$$

$$4 v_{BX} \cdot a = \frac{1}{4} v \cdot a$$

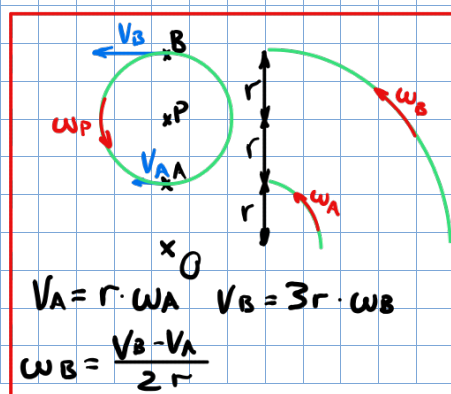
$$v_{BX} = \frac{1}{16} v$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{v}{16}$$

Vektor $r = (x, y)$

$$\uparrow 90^\circ \quad r_1 = (-y, x)$$

$$\rightarrow 90^\circ \quad r_2 = (y, -x)$$

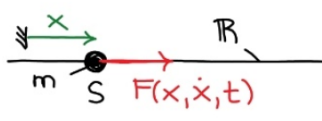


$$v_A = r \cdot \omega_A \quad v_B = 3r \cdot \omega_B$$

$$\omega_B = \frac{v_B - v_A}{2r}$$

Grundproblem:

Bewegungsgl. für geradlinige Bewegung $x(t) \in \mathbb{R}$


$$\rightarrow: m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \quad | :m$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = a(x, \dot{x}, t) := \frac{F(x, \dot{x}, t)}{m} \quad (*)$$

mit Anfangsbed. $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$

(ii) $a(x, \dot{x}, t) = a_0$ konstante Beschl.

$$\ddot{x}(t) = a_0$$

$\Downarrow$

$$\dot{x}(t) = v_0 + \int_0^t a_0 d\bar{t} = v_0 + a_0 t$$

$\Downarrow$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 \bar{t}) d\bar{t} = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

(iv) $a(x, \dot{x}, t) = a(\dot{x})$ geschw.-abh. Beschl.

$$\ddot{x}(t) = a(\dot{x}(t)) = \frac{d\dot{x}}{dt} \xrightarrow{\text{Separation}} dt = \frac{d\dot{x}}{a(\dot{x})} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{v_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{a(\dot{x})}$$

$\Downarrow$

$$\dot{x}(t) = H(t) = h^{-1}(t)$$

$\Leftarrow$ Umkehrfkt

$$t = \int_{v_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{a(\dot{x})} =: h(\dot{x})$$

$\Downarrow$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t H(\bar{t}) d\bar{t}$$

(v) $a(x, \dot{x}, t) = a(x)$ wegabh. Beschl.

Sei $\dot{x}(t) =: v(x(t))$

$$\ddot{x}(t) = a(x(t)) = \frac{dv}{dx} \dot{x} = \frac{dv}{dx} v \xrightarrow{1. \text{ Separation}} v dv = a(x) dx$$

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x a(\bar{x}) d\bar{x}} = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \int_{v_0}^v \bar{v} d\bar{v} = \int_{x_0}^x a(\bar{x}) d\bar{x}$$

$\Downarrow$ 2. Separation

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \Rightarrow t = \int_{x_0}^x \frac{d\bar{x}}{v(\bar{x})} = \int_{x_0}^x \frac{d\bar{x}}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^{\bar{x}} a(\bar{x}) d\bar{x}}} =: g(x)$$

$\Downarrow$ Umkehrfkt

$$x(t) = G(t) = g^{-1}(t)$$

(i) $a(x, \dot{x}, t) = 0$

unbeschleunigt

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$\Downarrow$

$$\dot{x}(t) = v_0 + \int_0^t 0 d\bar{t} = v_0$$

$\Downarrow$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 d\bar{t} = x_0 + v_0 t$$

(iii) $a(x, \dot{x}, t) = a(t)$

zeitabh. Beschl.

$$\ddot{x}(t) = a(t)$$

$\Downarrow$

$$\dot{x}(t) = v_0 + \int_0^t a(\bar{t}) d\bar{t}$$

$\Downarrow$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(\bar{t}) d\bar{t}$$

Aufgabe Räumliche Kinetik

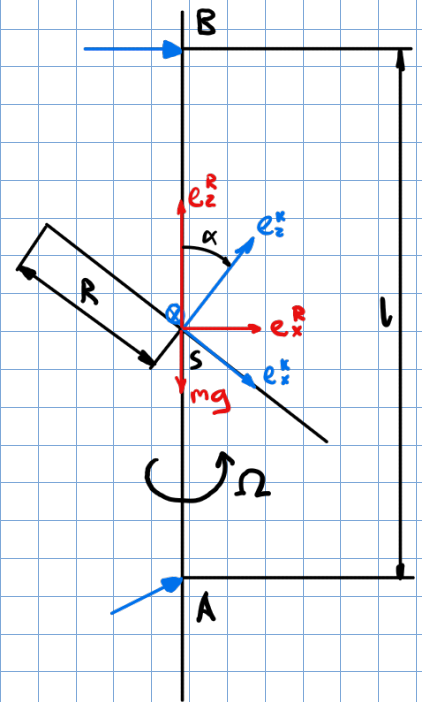
a) Freischneiden

Geeignetes KOS wählen **schleifend bei rotierenden Körpern**

b) Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}_R \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$

c) Trägheitstensor angeben ${}_K \vec{\Omega} = A_{KR} \cdot {}_R \vec{\Omega}$

$${}_K \vec{\Theta}_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{pmatrix}$$



d) Lagerkräfte bestimmen mit Drallsatz und Impulssatz

$${}_K \vec{L}_S = {}_K \vec{\Theta}_S \cdot {}_K \vec{\Omega} \rightarrow {}_K \dot{\vec{L}}_S = \cancel{{}_K \vec{L}_S} + {}_K \vec{\Omega} \times {}_K \vec{L}_S$$

Weil ${}_K \vec{L}_S$ konstant

$$\vec{P} = \vec{F}^a \quad {}_R \dot{\vec{L}}_O = {}_R \vec{M}_O$$

$\vec{L}$ und $\vec{M}$ müssen im gleichen System sein! $\rightarrow {}_R \dot{\vec{L}}_S = A_{RK} \cdot {}_K \dot{\vec{L}}_S$

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}_S = {}_R \vec{F}_A + {}_R \vec{F}_B + m \cdot \vec{g}$$

$$0 = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot g \end{pmatrix} \rightarrow \underline{F_{Ax} = -F_{Bx}}, \underline{F_{Ay} = -F_{By}}, \underline{F_{Az} = m \cdot g}$$

Momente

$$\vec{M} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}_{SB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} F_{By} \\ \frac{1}{2} F_{Bx} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{r}_{SA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ m \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} F_{Ay} \\ \frac{1}{2} F_{Ax} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} F_{By} \\ \frac{1}{2} F_{Bx} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} F_{Ay} \\ \frac{1}{2} F_{Ax} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} (F_{By} + F_{Ay}) \\ \frac{1}{2} (F_{Bx} + F_{Ax}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_R \dot{\vec{L}}_O = {}_R \vec{M}_O$$

Nach Kräften auflösen!

Rotation & Translation in $\mathbb{R}^2$

Rotation

Translation

(a_1)
 (a_2)

$A_{B1} = \text{Von } 1 \text{ nach } B$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Immer 1

$${}_S A_S = {}_S T_B \cdot A_B \cdot {}_S T_S$$

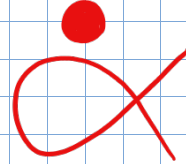
$${}_B A_B = {}_B T_S \cdot {}_S A_S \cdot {}_B T_B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{1B} = \vec{\omega}_{B1}$$

B gegenüber 1

Geschwindigkeit:



$${}_1 \vec{\omega}_{1B} = {}_B \vec{\omega}_{B1} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}_B \vec{\omega}_{BC} = {}_C \vec{\omega}_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}_C \vec{\omega}_{CK} = {}_K \vec{\omega}_{CK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Matlab

Inverse $\text{inv}(A_{B1})$

Betrag $\text{norm}({}_K \vec{\omega}_{1K})$

Verinfachen $\text{simplify}(A_{K1})$

Gegühr.

A_{B1}	A_{CB}	A_{KC}
Rotation um den Winkel φ um die x-Achse	Rotation um den Winkel φ um die y-Achse	Rotation um den Winkel φ um die z-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Inverse = Wenn Uhrzeiger sinn, alle Vorzeichen von sin vertauscht

Physik Transformationen.m

Abbildungsmatrix

$${}_D \vec{C} = A_{DB} \cdot {}_B \vec{C}$$

$$A_{CB} = A_{CB}$$

Endet in Basis C Startet in Basis B

Verkettete Rotationen

Letzte Rotation ganz Rechts!

Zuerst R_1 dann $R_2 = R_2 \cdot R_1$

Polar koordinaten

$$\sin(\varphi(t))' = \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)$$

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

$$v = r \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

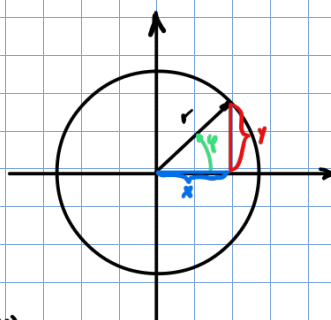
$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

$$\omega t = \varphi(t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



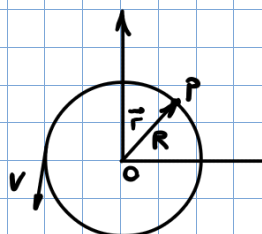
Zeitabhängig:

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\varphi(t))$$

$$y(t) = r(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$

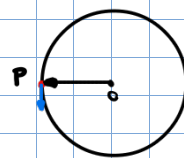
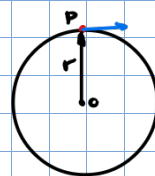
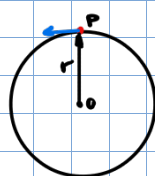
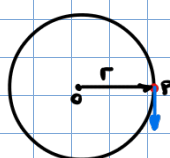
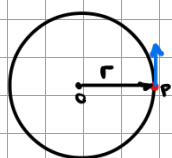
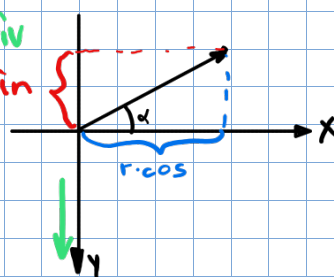
$$\vec{r}_{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

$$\text{Absolutgesch.} = \dot{\vec{r}}_{OP}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) - r(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \\ \dot{r}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$



Negativ

$$-r \cdot \sin$$



$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(\omega t) \\ r \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(\omega t) \\ r \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

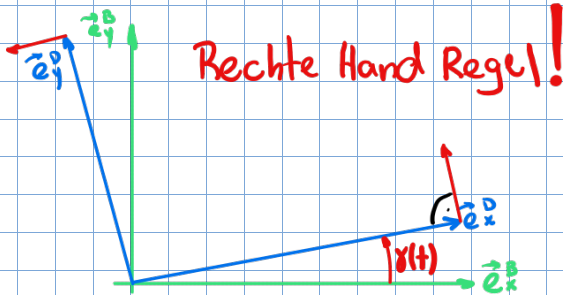
$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos(\omega t) \\ -r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Drehgeschw von KOS

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{\tilde{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dann: } \vec{a} \times \vec{b} \equiv \vec{\tilde{a}} \cdot \vec{b}$$

$$\rightarrow \dot{A}_{BD} \cdot A_{BD}^T = -A_{BD} \cdot \dot{A}_{BD}^T = -(\dot{A}_{BD} A_{BD}^T)^T$$



Sei $\vec{\omega}_{BD}$ Drehgesch.
von D gegenüber B

$$|\vec{\omega}_{DB} = -\vec{\omega}_{BD}|$$

$${}_B \vec{\omega}_{BD} = \dot{A}_{BD} \cdot A_{BD}^T$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \dot{x} = \frac{d}{dt} x$$

$${}_3 \vec{\omega}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, {}_3 \vec{\omega}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, {}_3 \vec{\omega}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}_B \vec{\omega}_{BD} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_B \vec{\omega}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_B \vec{\omega}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

um x

um y

um z

α Punkt nicht vergessen

$$A_{KI} = A_{KC} \cdot A_{CB} \cdot A_{BI}$$

$$A_{IK} = A_{BI}^T \cdot A_{CB}^T \cdot A_{KC}^T$$

Von Rechts nach links bei Basiswechsel

Winkelgeschw. K gegenüber I, im I System

$${}_I \vec{\omega}_{IK} = A_{IB} \cdot A_{BC} \cdot {}_C \vec{\omega}_{KC} + A_{IB} \cdot {}_B \vec{\omega}_{CB} + {}_I \vec{\omega}_{BI}$$

$$\vec{\omega}_{14} = \vec{\omega}_{12} + \vec{\omega}_{23} + \vec{\omega}_{34}$$

Drehungen im Uhrzeigersinn:

$$\begin{pmatrix} A & X & R \\ Y & b & B \\ z & v & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{An Diagonale} \\ \text{Spiegeln} \\ \text{Bleibt gleich} \end{matrix}$$

Eulersche Ableitungsregel

Euler Ableitung um Vektor in rotierenden System abzuleiten

Winkelbeschleunigung: $\ddot{\varphi}, \ddot{\Omega}, \ddot{\psi}$

$${}_B \dot{\vec{\Psi}} = {}_B \dot{\vec{\Omega}} + {}_B \vec{\omega}_{IB} \times {}_B \vec{\Omega}$$

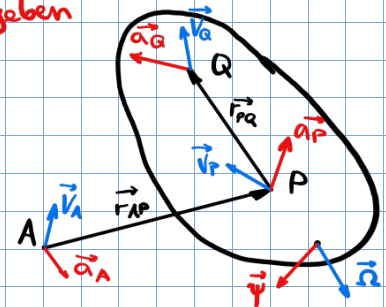
Wenn alles im Inertialsystem gegeben ist, braucht es keine Eulerableitung.

Geschwindigkeiten: $\vec{r}, \vec{v}$

$${}_B \vec{v}_P = {}_B (\dot{\vec{r}}_{OP}) = {}_B \dot{\vec{r}}_{OP} + {}_B \vec{\omega}_{IB} \times \vec{r}_{OP}$$

Beschleunigungen: $\ddot{r}, \ddot{a}$

$${}_B \ddot{\vec{a}}_P = {}_B (\ddot{\vec{r}}_{OP}) = {}_B \ddot{\vec{r}}_{OP} + {}_B \vec{\omega}_{IB} \times \dot{\vec{r}}_{OP}$$



Starrkörperformel für Geschwindigkeit Beliebige Basis

Starrkörperformel beschreibt Geschwindigkeit eines Punktes Q auf einem starren Körper relativ zu Punkt P

Geschwindigkeiten

$${}_A \vec{v}_Q = {}_A \vec{v}_P + {}_A \vec{\Omega} \times {}_A \vec{r}_{PQ}$$

Grundformel

$${}_B \vec{v}_P = {}_B \vec{v}_A + {}_B \dot{\vec{r}}_{AP} + {}_B \vec{\omega}_{IB} \times {}_B \vec{r}_{AP}$$

Beschleunigung

$${}_A \ddot{\vec{a}}_Q = {}_A \ddot{\vec{a}}_P + {}_A \dot{\vec{\Omega}} \times {}_A \vec{r}_{PQ} + {}_A \vec{\Omega} \times ({}_A \vec{\Omega} \times {}_A \vec{r}_{PQ})$$

Allgemeine Kinetik

$$\vec{P} = \vec{F}^a \quad \vec{L}_O = \vec{M}_O^a$$

Drall

Θ_s bez. Massenmittelpkt S

$$\vec{P} = m \cdot \vec{r}_{OS} \cdot \ddot{\vec{r}}_{OS}$$

$$\vec{L}_O = \Theta_s \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot \vec{r}_{OS} \times \ddot{\vec{r}}_{OS}$$

$$\vec{L}_O = m \cdot \vec{r}_{OS} \times \ddot{\vec{r}}_{OS} + \Theta_s \cdot \ddot{\varphi}$$

Impulsmoment

Spin

Drallsatz

$$\vec{L}_O = m \cdot \vec{r}_{OS} \times \ddot{\vec{r}}_{OS} + \Theta_s \ddot{\varphi}$$

Auswertung Impuls

$$\vec{P} = m(\vec{v}_P + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{PS})$$

$$= m \cdot \ddot{\vec{r}}_{OS} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

"Massenmittelpunkts Geschw"

Impulsänderung (Impulssatz)

$$\vec{P} = m(\ddot{\vec{a}}_P + \ddot{\varphi} \times \vec{r}_{PS} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{PS}))$$

$$= m \cdot \ddot{\vec{r}}_{OS} \quad (\text{mit Euler ableiten})$$

$$\uparrow: m \cdot \ddot{\vec{r}}_{OS} = \sum \vec{F}_i$$

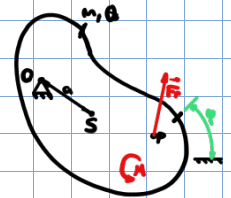
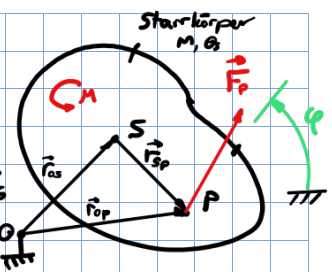
$$m \cdot \ddot{\vec{r}}_{OS} = \sum \vec{F}_i + m \cdot \vec{g}$$

$$0 = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot g \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Ist O ein Fixpunkt vom Starrkörper

$$\Theta_s \ddot{\varphi} + m \cdot a^2 \ddot{\varphi} = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}_P + M$$

$$\alpha = \|\vec{r}_{OS}\| = \text{const}$$



Drall

$$\vec{L}_O = m \cdot \vec{r}_{PS} \times \vec{v}_P + \Theta_P \vec{\Omega}$$

Allgemeine Drallformel

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{P} + \Theta_P \vec{\Omega} + m \vec{r}_{PS} \times \vec{v}_P$$

Dralländerung

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{r}_{OP} \times \dot{\vec{P}} + \dot{\Theta}_P \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times \Theta_P \vec{\Omega} + m \vec{r}_{PS} \times \dot{\vec{a}}_P$$

Vorgehen bei Handrechnungen:

a) Bezugspunktwahl bei Drall

i) Allgemeine Drallformel

$$\text{ii) } S = \text{ruhend} \quad (S=O=P, \vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OS} = 0) \rightarrow \vec{L}_O = \Theta_s \vec{\Omega}$$

$$\text{iii) Körper hat Fixpunkt P} \quad (P=O, \vec{r}_{OP} = 0, \vec{v}_P = 0) \rightarrow \vec{L}_O = \Theta_P \vec{\Omega}$$

$$\text{iv) Allgemeiner Fall: } (P=S, \vec{r}_{PS} = 0) \rightarrow \vec{L}_O = \underbrace{\vec{r}_{OS} \times \vec{P}}_{\text{Impulsmoment}} + \underbrace{\Theta_s \vec{\Omega}}_{\text{Spin}}$$

b) Berechne Impuls $\vec{P}$ und Drall $\vec{L}_O$ nach a

c) Berechne $(\dot{\vec{P}}) = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{\omega}_i \times \vec{P}$ und $(\dot{\vec{L}}_O) = \sum \vec{L}_i + \sum \vec{\omega}_i \times \vec{L}_i$ mit Euler

$\dot{\vec{L}}_O = 0$ wenn KOS sich mit Körper bewegt und keine äusseren Momente wirken (konst. $\vec{\Omega}$)

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

d) Werte Impuls und Drallsatz aus: $\sum \vec{F}_i$, $\sum \vec{L}_i$

$$\vec{M}_C = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A \quad \text{Bsp.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \cdot F_{Ay} \\ -2b \cdot F_{Ax} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{M}_C$$



Betrachtung vorher/nachher

$$\vec{L}_O^- \stackrel{!}{=} \vec{L}_O^+$$

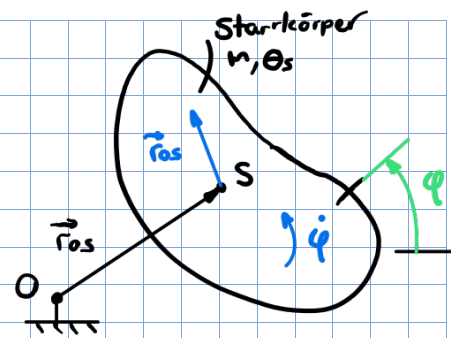
$$V = r \cdot \omega$$

Θ_S Massenträgheitsmoment im Punkt S

Satz von Steiner

$$\Theta_P = \Theta_S + m \cdot a^2 \quad a = \|\vec{r}_{PS}\|$$

P und S beide am gleichen Starrkörper

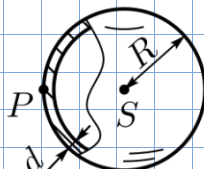
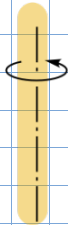
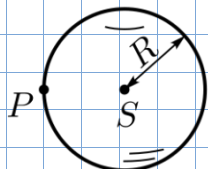


Kugel

Kugelschale ($d/R \ll 1$)

$$\Theta_S = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\Theta_P = \frac{7}{5} m R^2$$



$$\Theta_S = \frac{2}{3} m R^2$$

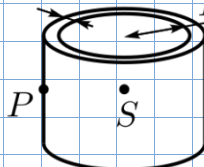
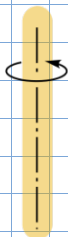
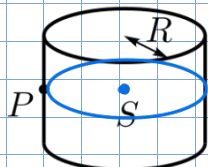
$$\Theta_P = \frac{5}{3} m R^2$$

Scheibe ($h/R \ll 1$), Zylinder

Ring ($h/R \ll 1$), Hohlzylinder ($d/R \ll 1$)

$$\Theta_S = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\Theta_P = \frac{3}{2} m R^2$$



$$\Theta_S = m R^2$$

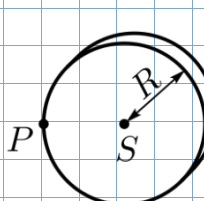
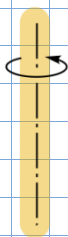
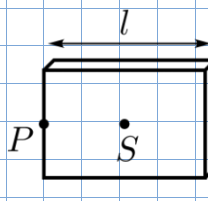
$$\Theta_P = 2 m R^2$$

Stab ($h/l \ll 1$), Platte

Scheibe

$$\Theta_S = \frac{1}{12} m l^2$$

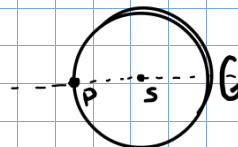
$$\Theta_P = \frac{1}{3} m l^2$$



$$\Theta_S = \frac{1}{4} m R^2$$

$$\Theta_P = \frac{5}{4} m R^2$$

P und S liegen auf gleicher Achse



Bsp. Vor Blockade

$$\vec{L}_O^- = \Theta_S \cdot \Omega$$

Nach Blockade

$$\vec{L}_O^+ = \vec{L}_O^{+ \text{Stab}} + \vec{L}_O^{+ \text{Scheibe}}$$

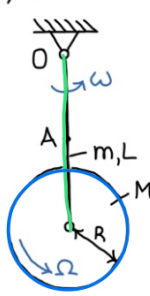
$$\vec{L}_O^- = \vec{L}_O^+$$

$$\frac{1}{2} M R^2 \Omega = \omega \left(\frac{1}{3} m l^2 + M l^2 + \frac{1}{2} M R^2 \right)$$

Nach ω Umstellen

Θ

• System



$$V = r \cdot \omega$$

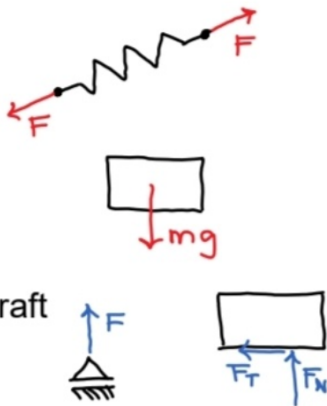
$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \dot{\varphi}$$

2D Starrkörper!

Potentialkräfte (P)

konservativ

- Feder
- Gravitation
- Zwangskräfte/Haftkraft



Energiesatz

Energie wechselt zwischen Kin. und Pot. Energie

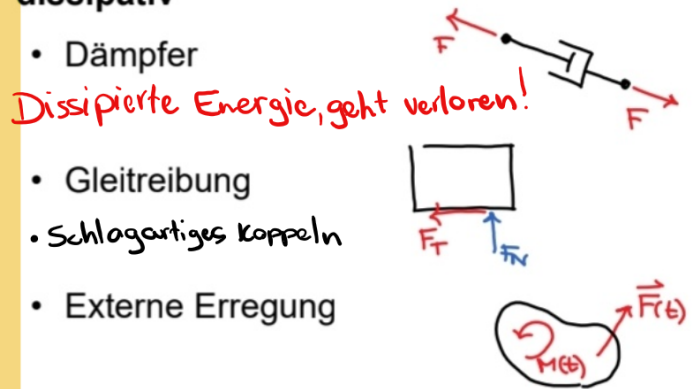
$$T + V = \text{const}$$

Nichtpotentialkräfte (NP)

Nicht Energieerhaltung wegen Reibung

dissipativ

- Dämpfer
- Gleitreibung
- Schlagartiges Koppeln
- Externe Erregung



Arbeitssatz

$$W_{12}^{NP} = \text{Arbeit}_{1 \rightarrow 2} \text{ Nichtpotential kraft}$$

$$(T + V)|_{t_2} = (T + V)|_{t_1} + W_{12}^{NP}$$

Arbeit und Energie

$$E_{\text{diss}} = E_{\text{vor}} - E_{\text{nach}}$$

Am System verrichtete Arbeit entlang einer Kurve $\vec{r}_{12}$

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_{12}} \vec{F}_A \cdot d\vec{r}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A \cdot \dot{\vec{r}}_{0A} dt$$

$$[Nm] = [J]$$

Definition: Eine Kraft heisst Potentialkraft $\vec{F}^P$

Wenn ihre Arbeit für beliebige geschlossene Kurven verschwindet.

$$0 \stackrel{!}{=} W_0^P = \oint_{\vec{r}_{11}} \vec{F}^P \cdot d\vec{r} = \oint_{\vec{r}_{11}} \vec{F}^P \cdot d\vec{r} = \tilde{W}_0^P$$

Kinetische Energie eines Starrkörpers

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2 \quad [kg \frac{m^2}{s^2}] = [Nm] = [J]$$

Translations-

Rotationsanteil

2D

Pot. Energie Höhe z

$$V = m \cdot g \cdot z$$

Pot. Energie Feder

$$V = \frac{1}{2} c (z - z_0)^2$$

Auslenkung aus Entspannter Lage

$$V = \frac{1}{2} c \cdot (\varphi - \varphi_0)^2$$

$$(T^{\text{tot}} + V^{\text{tot}})_{t_2} = (T^{\text{tot}} + V^{\text{tot}})_{t_1} + W_{12}^{NP} \rightarrow W_{12}^{NP} = (T^{\text{tot}} + V^{\text{tot}})_{t_2} - (T^{\text{tot}} + V^{\text{tot}})_{t_1}$$

Zwei Punkte wählen

Trockene Reibung

Kraftgesetz tangential (Coulomb Reibung)

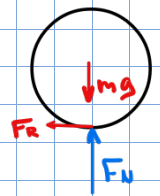
1. $F_R = -\mu \cdot F_N$ für $y_T > 0$ Vorwärtsgleiten
2. $|F_R| \leq \mu_0 F_N$ für $y_T = 0$ Haften (Zwangskraft)
3. $F_R = +\mu \cdot F_N$ für $y_T < 0$ Rückwärtsgleiten

$$\uparrow m \ddot{y} = F_N - m \cdot g$$

$$F_R = \mu \cdot F_N = \mu m g$$

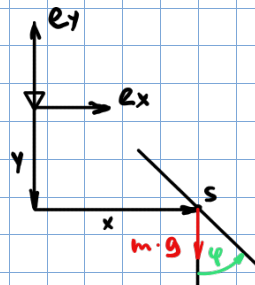
Rückwärtsgleiten 3. Fall

$$y_T = R \cdot \dot{\varphi} - \dot{x} < 0$$



$$\uparrow m \cdot \ddot{x} = F_N - m \cdot g \quad F_N \text{ ist positiv wenn } \uparrow$$

$$x = 0, \dot{x} = \sqrt{\frac{3}{4} g l}, y = \frac{l}{2}, \dot{y} = 0$$



Wir suchen $x(t), \dots$ 2x Integrieren

Impuls & Spinsätze:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{3}{4} g l}$$

$$\rightarrow m \cdot \ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0 \int 0 dt = c_1 \rightarrow \int c_1 dt = c_1 t + c_2 = \sqrt{\frac{3}{4} g l} \cdot t$$

$$\downarrow m \cdot \ddot{y} = m \cdot g \rightarrow \ddot{y} = g \rightarrow g \cdot t^2 + d_1 t + d_2$$

$$\uparrow \theta \cdot \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

Tilde Matrix

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor

$${}_R \bar{\Theta}_P = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Massenträgheitsmomente

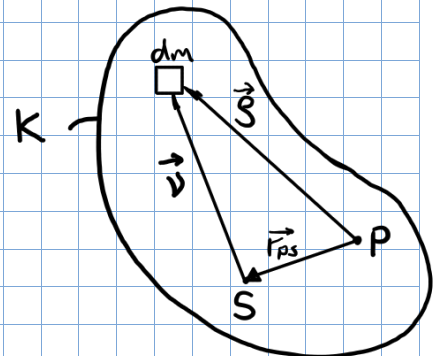
$A = \bar{\Theta}_s$ Um x-Achse

$B = \bar{\Theta}_s$ Um y-Achse

$C = \bar{\Theta}_s$ Um z-Achse

Massenträgheitsmomente additiv für gleichen Bezugspkt.!

$$\begin{aligned} \Theta_Q^{\text{Stern}} &= \Theta_Q^{\text{Ring}} + 3 \cdot \Theta_Q^{\text{Stab}} \\ &= m_1 R^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} m_2 R^2 \\ &= (m_1 + m_2) R^2 \end{aligned}$$



$$\bar{\Theta}_P = \bar{\Theta}_s + m \cdot \tilde{\vec{r}}_{Ps} \cdot \tilde{\vec{r}}_{Ps}^T \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

Massenmittelpunkt

KOS Wechsel Trägheitstensor

$${}_C \bar{\Theta}_P = A_{CB} {}_B \bar{\Theta}_P A_{CB}^T$$

Kinetische Energie $\mathbb{R}^3$

$$\vec{V}_P^T \cdot \vec{V}_P = \|\vec{V}_P\|^2 = V_{Px}^2 + V_{Py}^2 + V_{Pz}^2$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}$ **bleibt Vektor**

Immer gleichen Bez. Punkt P wählen!

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m \vec{V}_P^T \vec{V}_P}_{\text{Translationsterm}} + \underbrace{m \vec{V}_P^T (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{Ps})}_{\text{Koppelterm}} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \bar{\Theta}_P \vec{\Omega}}_{\text{Rotationsterm}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $\bar{\Theta}_P \cdot \Omega$
2. $\Omega^T \cdot (\bar{\Theta}_P \cdot \Omega)$
3. Vereinfachen

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & e & f \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (a^2 d + b^2 e + c^2 f)$$

$$T = \frac{1}{2} m (V_{Px}^2 + V_{Py}^2 + V_{Pz}^2)$$

Bsp. $\begin{pmatrix} -R \dot{\alpha} \sin \beta \\ R \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow R ((-\dot{\alpha} \sin(\beta))^2 + \dot{\beta}^2)$
Skalarprodukt mit $(\cdot)^2$ lassen!

Sonderfälle:

Wenn Bez. Pkt = Massenmittelpunkt

(i) $P \equiv S$ (Massenmittelpunkt, $\vec{r}_{Ps} \equiv 0$): Starkkörperformel um $\vec{V}$ berechnen,

wenn Ω gegeben ist!

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_s^T \vec{V}_s + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \bar{\Theta}_s \vec{\Omega}$$

(ii) P ist ruhend (Fixpunkt, $\vec{V}_P \equiv 0$) (oder Momentanpol)

$$T = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \bar{\Theta}_P \vec{\Omega}$$

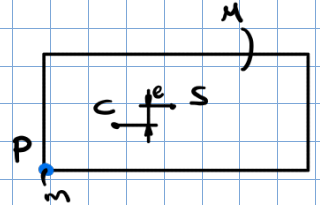
Maple Taschenrechner Benutzen um Ausdrücke umzuformen

Statisches Auswuchten

Was sind Gesamtmassen des Systems? $M+m$

Welche Massen und Positionen ergeben Schwerpunkt?

Rotor = M , $\vec{r}_{ss}$ / Punktmasse m , $\vec{r}_{sp}$



Schwerpunkt als Mittelwert formulieren

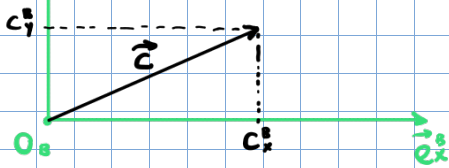
$$\vec{r}_{sc} = \frac{M \cdot \vec{r}_{ss} + m \cdot \vec{r}_{sp}}{M+m} \rightarrow \frac{m}{M+m} \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ e \\ * \end{pmatrix} \rightarrow m = M \frac{e}{R-e}$$

m einsetzen und z Komponente herausfinden

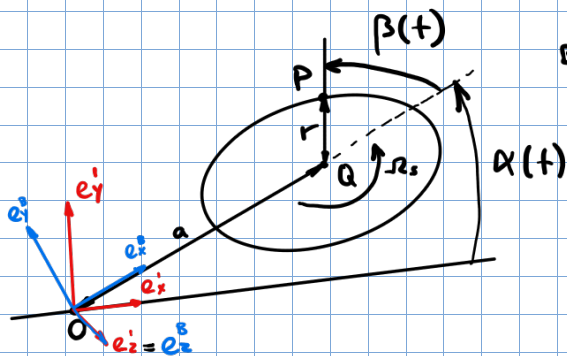
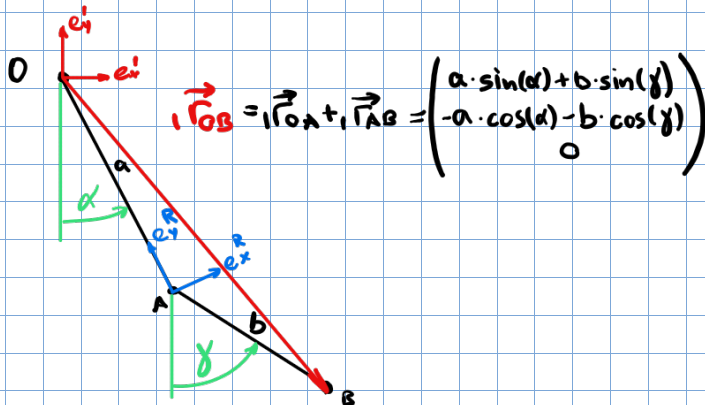
Vektor und Koordinaten Beispiele

$$\vec{c} = c_x^B \cdot \vec{e}_x^B + c_y^B \cdot \vec{e}_y^B + c_z^B \cdot \vec{e}_z^B, \quad {}_B\vec{c} := \begin{pmatrix} c_x^B \\ c_y^B \\ c_z^B \end{pmatrix}$$

$${}_B\vec{c} = K_B(\vec{c}), \quad \vec{c} = K_B^{-1}({}_B\vec{c}) \quad \text{Koordinatenabb}$$



Beachte: ${}_B\vec{e}_x^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ${}_B\vec{e}_y^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ${}_B\vec{e}_z^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



${}_B\vec{\Omega}_s$ = Drehung um e_z^B mit $\dot{\alpha}(t)$ +

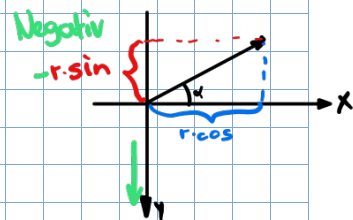
Drehung um e_y^B mit $\dot{\beta}(t)$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}}}$$

$${}_B\vec{\Psi}_s = {}_B\vec{\Omega}_s + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Drehgeschw. B geg. I}}}{{}_B\vec{\omega}_{IB}} \times {}_B\vec{\Omega}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}}}$$

$${}_B\vec{r}_{OP} = {}_B\vec{r}_{OQ} + {}_B\vec{r}_{QP} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ -r \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ -r \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix}}}$$

Koordinaten in Aufgabe überprüfen!



$${}_B\vec{v}_P = {}_B(\vec{r}_{OP}) = \dot{{}_B\vec{r}_{OP}} + {}_B\vec{\omega}_{IB} \times {}_B\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \\ 0 \\ -r \cdot \cos(\beta) \cdot \dot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(\beta) \\ 0 \\ -r \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -r \cdot \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} (a + r \cdot \cos(\beta)) \\ -r \cdot \cos(\beta) \cdot \dot{\beta} \end{pmatrix}}}$$

a) $\vec{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_{IA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v}_Q = \vec{v}_C + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{CQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{\omega}_R = \vec{\omega}_{IA} + \vec{\omega}_{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ -\Omega \end{pmatrix}$

e) $\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}_R \times \vec{r}_{QP} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ -\Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \sin \beta - r \cos \beta \\ b \cos \beta + r \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l + \Omega b \cos \beta + \Omega r \sin \beta \\ \Omega r \cos \beta - \Omega b \sin \beta \\ \dot{\alpha} b \sin \beta - \dot{\alpha} r \cos \beta \end{pmatrix}$

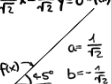
$\vec{a}_{QP} = \vec{a}_{RR} \vec{r}_{QP} = \begin{pmatrix} c \beta & s \beta & 0 \\ -s \beta & c \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \sin \beta - r \cos \beta \\ b \cos \beta + r \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $\vec{\psi}_A = \vec{\omega}_A \stackrel{E}{=} \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{IA} \times \vec{\omega}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\vec{\omega}_Q = \vec{\omega}_A \stackrel{E}{=} \vec{\omega}_Q + \vec{\omega}_{IA} \times \vec{\omega}_Q = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l \\ 0 \\ \dot{\alpha}^2 l \end{pmatrix}$

h) $\vec{\psi}_R = \vec{\omega}_R \stackrel{E}{=} \vec{\omega}_R + \vec{\omega}_{IA} \times \vec{\omega}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ -\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \Omega \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$

i) $\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_A \stackrel{E}{=} \vec{\omega}_P + \vec{\omega}_{IA} \times \vec{\omega}_P$
 $= \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l + \Omega^2 (r \sin \beta - b \sin \beta) \\ -\Omega^2 (r \sin \beta + b \cos \beta) \\ \dot{\alpha} (b \sin \beta - r \cos \beta) + \dot{\alpha} \Omega (r \sin \beta + b \cos \beta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l + \Omega (r \sin \beta + b \cos \beta) \\ \Omega (r \cos \beta - b \sin \beta) \\ \dot{\alpha} (b \sin \beta - r \cos \beta) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \dot{\alpha} l + \Omega^2 (r \sin \beta - b \sin \beta) + \dot{\alpha}^2 (r \cos \beta - b \sin \beta) \\ -\Omega^2 (r \sin \beta + b \cos \beta) \\ \dot{\alpha} (b \sin \beta - r \cos \beta) + \dot{\alpha}^2 l + 2 \dot{\alpha} \Omega (r \sin \beta + b \cos \beta) \end{pmatrix}$

Streckung um λ_1 in x und λ_2 in y	orthogonale Projektion auf die Gerade $g: ax+by=0$ mit $a^2+b^2=1$	Spiegelung an der Geraden $g: ax+by=0$ mit $a^2+b^2=1$	Rotation um den Ursprung um Winkel φ	Scherung in x -Richtung mit Faktor m
	 $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0 \rightarrow (0)$ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$			
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab \\ -ab & 1-b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{c} \in V$ Pfeil (V ruhend!)

$\dot{\vec{c}} \in V$ (absolute) zeitl. Änderung von $\vec{c}(t)$

${}_B(\dot{\vec{c}}) \in \mathbb{R}^3$ Koord. von $\dot{\vec{c}}$ in der (bewegten) Basis B (Punkt vor B)

$({}_B\dot{\vec{c}})' \in \mathbb{R}^3$ zeitliche Ableitung der Koordinaten ${}_B\dot{\vec{c}}$ Vereinbarung ${}_B\ddot{\vec{c}} := ({}_B\dot{\vec{c}})'$

$\vec{r}_{AB} \in V$ Ortsvektor vom Punkt A zum Punkt B

$\vec{v}_B \in V$ (absolute) Geschwindigkeit von Punkt B

$\vec{a}_B \in V$ (absolute) Beschleunigung von Punkt B

$\vec{\Omega} \in V$ (absolute) Drehgeschwindigkeit des Körpers ${}_A\vec{\Omega}_R = {}_A\vec{\omega}_{IA} + {}_A\vec{\omega}_{AR}$

$\vec{\Psi} \in V$ (absolute) Drehbeschleunigung des Körpers

A_{DB} Transformatrix von B nach D

${}_B\vec{\omega}_{IB}$ Drehgeschwindigkeit, B gegenüber I mit Basis B