

Analysis 1

Fabian Starc

Version: October 28, 2025

Mengen und Zahlen

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
 $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$ Menge der positiven ganzen Zahlen
 $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen
 $\mathbb{Q} = \{x|x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}^*\}$ Menge der rationalen Zahlen
 $\mathbb{R}$ Menge der Reellen Zahlen

Symbolik

- Symbolische Schreibweise und Bedeutung:**

$a \in M$ a ist ein Element von M
 $a \notin M$ a ist kein Element von M

- beschreibende Darstellung:**

$M = \{x|x \text{ besitzt die Eigenschaften } E_1, E_2, E_3 \dots\}$

- aufzählende Darstellung:**

$M = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$

- leere Menge:**

Die Menge heisst leer wenn sie kein Element enthält:
 $\{\}$ oder $\emptyset$

- leere Menge:**

Die Menge heisst leer wenn sie kein Element enthält:
 $\{\}$ oder $\emptyset$

- Teilmengen:**

Eine Menge A heisst Teilmenge der Menge B wenn **jedes** Element von A auch zur Menge B gehört:
 $A \subset B$

- Das Komplement:**

Das Komplement $\bar{A}$ einer Menge A in einer Grundmenge G besteht aus allen Elementen von G die nicht in A liegen:
 $\bar{A} = \{x \in G | x \notin A\}$

Mengenoperationen

Durchschnitt	$A \cap B$	$\{x x \in A \text{ und } x \in B\}$
Vereinigung	$A \cup B$	$\{x x \in A \text{ oder } x \in B\}$
Differenz	$A \setminus B$	$\{x x \in A \text{ und } x \notin B\}$

Die Produktmenge:

Die Produktmenge zweier Mengen ist die folgende Menge:

$$A \times B = \{(a; b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Intervalle

Abgeschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

halboffenes Intervall: $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

halboffenes Intervall: $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

offenes Intervall: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

unendliches Intervall: $[a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$ (gegen Unendlich immer offen)

Potenzen

$$\begin{aligned} a^n &= a \cdot a \cdot a \dots \text{ (n Faktoren)} & n &\in \mathbb{N}^* \\ a^0 &= 0 & a &\in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} & n &\in \mathbb{N}^* \\ a^{1/n} &= \sqrt[n]{a} & n &\in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ a^{m/n} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m & m &\in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmus

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_b(x \cdot y) &= \log_b(x) + \log_b(y) \\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y) \\ \log_b(x^n) &= n \cdot \log_b(x) \\ \log_b(\sqrt[n]{x}) &= \frac{1}{n} \log_b(x) \\ \log_b(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \end{aligned}$$

Das Summenzeichen

$$\sum_{k=l}^n a_k$$

k : Laufvariable
 l : Startwert
 n : Endwert
 a : Summand

Betragsgleichungen

- Gegeben ist eine Gleichung der Form:

$$|f(x)| = a \quad \text{mit } a \geq 0$$

- Auflösen der Betragsgleichung durch Fallunterscheidung:

$$|f(x)| = a \iff \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$$

- Jede der beiden Gleichungen separat lösen.
- Lösungen auf Gültigkeit prüfen (z. B. bei Einschränkungen des Definitionsbereichs).
- Endergebnis als Lösungsmenge angeben:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a \vee f(x) = -a\}.$$

Ungleichungen

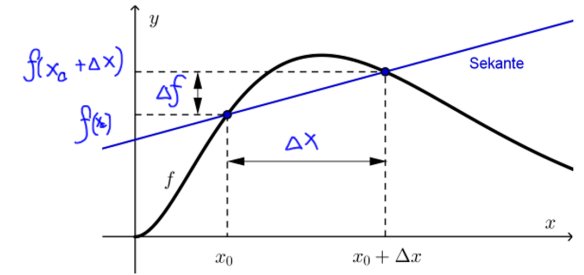
- Ungleichung aufstellen:** Gegeben ist eine Ungleichung der Form

$$f(x) \square 0 \quad \text{mit } \square \in \{\leq, <, \geq, >\}.$$

- Definitionsbereich bestimmen:** Bestimme den Definitionsbereich von $f(x)$ und berücksichtige Einschränkungen (z.B. Nenner $\neq 0$ oder Radikanden ≥ 0).
- Ungleichung umformen:** Bringe die Ungleichung in eine Form, die sich leichter analysieren lässt (z.B. durch Ausklammern, Faktorisieren oder gemeinsame Nenner).
- Nullstellen berechnen:** Löse $f(x) = 0$ und finde die kritischen Punkte, die die Zahlengerade in Intervalle teilen.
- Vorzeichenanalyse:** Untersuche das Vorzeichen von $f(x)$ in den einzelnen Intervallen (z.B. durch Testpunkte oder Vorzeichenregeln).
- Lösung bestimmen:** Wähle die Intervalle, in denen die Ungleichung erfüllt ist, und berücksichtige dabei, ob $\leq$ oder $<$ gilt (Randpunkte mit beachten!).
- Lösungsmenge angeben:** Gib die Lösung als Vereinigungsmenge von Intervallen an.

Die Ableitung

Definition und Geometrische Interpretation:



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Schreibweise:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

Die Steigung der Tangente von Funktion f an der Stelle x_0

Ableitungsregeln $f(x) \longrightarrow f'(x)$

Konstantenregel:	c	$\longrightarrow$	0
Summenregel:	$g(x) + h(x)$	$\longrightarrow$	$g'(x) + h'(x)$
Faktorregel:	$k \cdot g(x)$	$\longrightarrow$	$k \cdot g'(x)$
Produktregel:	$g(x) \cdot h(x)$	$\longrightarrow$	$g(x)h'(x) + g'(x)h(x)$
Potenzregel:	$(g(x))^n$	$\longrightarrow$	$n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$
Quotientenregel:	$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\longrightarrow$	$\frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{(h'(x))^2}$
Kettenregel:	$h(g(x))$	$\longrightarrow$	$h'(g(x)) \cdot g'(x)$

wichtige Ableitungen $f(x) \longrightarrow f'(x)$

x^n	$\longrightarrow$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\longrightarrow$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\longrightarrow$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\longrightarrow$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\longrightarrow$	$1 + \tan^2(x)$
e^{ax}	$\longrightarrow$	ae^{ax}
a^x	$\longrightarrow$	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\longrightarrow$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{1+x^2}$

Linearisierung einer Funktion

Eine differenzierbare Funktion $f(x)$ lässt sich in der unmittelbaren Umgebung des Punktes $(x_0; f(x_0))$ durch die dortige Kurventangente approximieren. Die Gleichung der linearisierten Funktion lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

höhere Ableitungen und Anwendungen aus der Physik

Bei höheren Ableitungen wird einfach die erste Ableitung mehrfach angewendet:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \qquad f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)} f}{dx^{(n)}}$$

Bei Ableitungen nach der Zeit t wird in der Physik folgende Schreibweise verwendet:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) \qquad \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \ddot{x}(t)$$

Das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx$$

Das Integral ist die Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Bereich zwischen x_0 und x_1 .

Gegeben ist eine Funktion f , die auf einem Intervall I stetig ist, und eine beliebige Stammfunktion F von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \qquad \int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b$$

Wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Rechenregeln für Integration

$$\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

Integration von Polynomfunktionen:

$$x^n \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Wichtige Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	$ax + C$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
e^x	$e^x + C$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

Allgemeines über Funktionen

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **injektiv**, wenn gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(Kein Wert in B wird von mehr als einem Element aus A getroffen.)

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **surjektiv**, wenn gilt:

$$\forall y \in B \, \exists x \in A : f(x) = y.$$

(Jedes Element in B wird erreicht.)

Wenn eine Funktion sowohl injektiv als auch surjektiv ist redet man von bijektiv.
Wenn mehr als ein Element in B erreicht wird handelt es sich nicht um eine Funktion.

Formmässige Definitionen

Wenn ein Funktionsgraph **achsensymmetrisch zur y-Achse** ist redet man von einer **geraden** Funktion:

$$f(-x) = f(x)$$

Wenn ein Funktionsgraph **Punktsymmetrisch zum Ursprung** ist redet man von einer **ungeraden** Funktion:

$$f(-x) = -f(x)$$

Eine Funktion heisst **periodisch** wenn sich ein Abschnitt p der Funktion immer wiederholt:

$$f(x \pm p) = f(x)$$

Komposition

Eine Komposition von zwei Funktionen wird folgendermassen geschrieben:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Umkehrfunktion

Jede **bijektive Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1} .**

Man erhält den Graphen der Umkehrfunktion aus dem Graphen der ursprünglichen Funktion durch Spiegeln an der Diagonale $y = x$.

Bestimmen der Umkehrfunktion:

- $y = f(x)$ nach x auflösen
 - damit hat man $f(y)$
 - Namen der Variablen vertauschen gibt uns $f^{-1}(x)$

Gebrochen Rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Nullstellen von $f(x)$:

Wenn $g(x) = 0$ ist. Nullstellen von $h(x)$ zählen **nicht** dazu!

Hebbare Definitionslücken von $f(x)$:

Wo $h(x)$ und $g(x) = 0$ sind.

Polstellen von $f(x)$:

Restliche Nullstellen von $h(x)$.

Asymptote von $f(x)$:

schriftlich teilen: $\frac{g(x)}{h(x)}$, Restwert hinter Term geht gegen 0 wenn $x \rightarrow \infty$ und kann somit vernachlässigt werden.

Echt gebrochen rationale Funktionen haben die Asymptote $y = 0$

Polynomdivision:

Polynom : $(x - \text{Nullstelle}) \Rightarrow$ um Nullstellen herauszufinden

Grenzwerte

Vorgehen bei Grenzwerten:

- Terme vereingachen und Brüche kürzen wo möglich.
 - Einzelne Summanden mit höchster Potenz aus dem Nenner kürzen.
 - wo nötig Binome finden und mit diesen erweitern, um Wurzeln loszuwerden.
 - Einzelne Komponenten anschauen und bestimmen wo sich x hinbewegt wenn $\lim_{x \rightarrow \infty}$ oder $\lim_{x \rightarrow 0}$ etc.

Regel von Bernoulli

Wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

zu einem unbestimmten Ausdruck wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führt, darf die Regel von Bernoulli angewendet werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Folgen und Reihen

Arithmetische Folge:

$$a_1 = c$$
$$a_{n+1} = a_n + d$$
$$a_n = c + (n - 1) \cdot d$$

Geometrische Folge:

$$a_1 = c$$
$$a_{n+1} = a_n \cdot d$$
$$a_n = c \cdot q^{(n-1)}$$

n-te Teilsumme einer arithmetischen Reihe:

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

n-te Teilsumme einer geometrischen Reihe:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Grenzwerte von Reihen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Newtonisches Tangentenverfahren

Approximation der Nullstelle einer Funktion f :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$