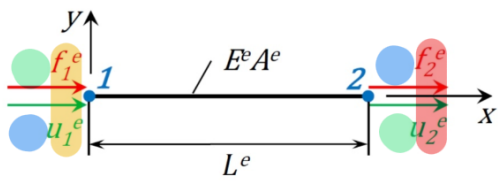


Lokale Elementsteifigkeitsmatrix Knoten+Freiheitsgrade einführen

- Knoten heissen immer 1 & 2 $f = 2K(R+S)$
- Jeder Knoten verschiebung u_1 und u_2 in Stabrichtung, sowie f_1 & f_2



$$\begin{pmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{pmatrix} = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix}$$

$$\underset{2 \times 1}{f^e} = \underset{2 \times 2}{k^e} \underset{2 \times 1}{u^e}$$

+ Wenn am gleichen Knoten

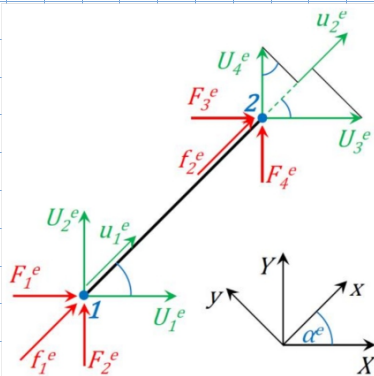
- Wenn am anderen Knoten

$$\begin{pmatrix} K_{11}^4 & K_{12}^4 & K_{13}^4 & K_{14}^4 \\ K_{21}^4 & K_{22}^4 & K_{23}^4 & K_{24}^4 \\ K_{31}^4 & K_{32}^4 & K_{33}^4 & K_{34}^4 \\ K_{41}^4 & K_{42}^4 & K_{43}^4 & K_{44}^4 \end{pmatrix}$$

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Globale Elementsteifigkeitsmatrix



$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{pmatrix} = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ U_4^e \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
Länge Effektiv Berechnen

$\underset{4 \times 1}{F^e} \quad \underset{4 \times 4}{K^e} \quad \underset{4 \times 1}{U^e}$

$K^T = K$ ist symmetrisch

Für jeden Stab machen

Struktursteifigkeitsmatrix (Assemblieren)

• Dimension ist Knoten $n \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ Jeder Knoten 2 Freiheitsgrade

Koinzidenztabelle erstellen

Elementnummer e	1	2	3	4	5
Elementverschiebung U_j^e	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
wird abgebildet auf	↓↓↓↓	↓↓↓↓	↓↓↓↓	↓↓↓↓	↓↓↓↓
Gesamtverschiebung U_i	1 2 3 4	1 2 5 6	3 4 5 6	3 4 7 8	5 6 7 8

$$\text{DoF}_x = K \cdot 2 - 1$$

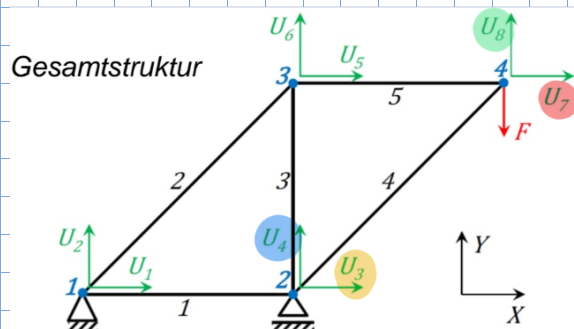
$$\text{DoF}_y = K \cdot 2$$

3		4	
5	6	7	8

Bsp. Element 4

Allgemein

1	2	3	4	5	6	7	8	l/k
+	+	+	+	+	+	+	+	1
+	+	+	+	+	+	+	+	2
+	+	K_{11}^4	K_{12}^4	+	+	K_{13}^4	K_{14}^4	3
+	+	K_{21}^4	K_{22}^4	+	+	K_{23}^4	K_{24}^4	4
+	+	+	+	+	+	+	+	5
+	+	+	+	+	+	+	+	6
+	+	K_{31}^4	K_{32}^4	+	+	K_{33}^4	K_{34}^4	7
+	+	K_{41}^4	K_{42}^4	+	+	K_{43}^4	K_{44}^4	8



Winkel berechnen

$$c \cdot s =$$

$$c^2 =$$

$$s^2 =$$

Elemente im gleichen Feld summieren

Randbedingungen einpflegen

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ 0 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{pmatrix}$$

Reduzierte Struktursteifigkeitsmatrix erstellen

- Identifizieren von fixierten Freiheitsgraden durch Randbedingung
- Entsprechende Zeilen und Spalten Eliminieren
- Red. Strukturst. erstellen
- Lösen des reduzierten Systems

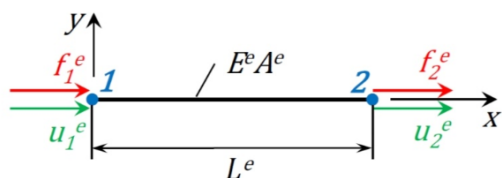
Bsp. $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$

$F = K \cdot u$ $F_{red} = K_{red} \cdot u_{red}$

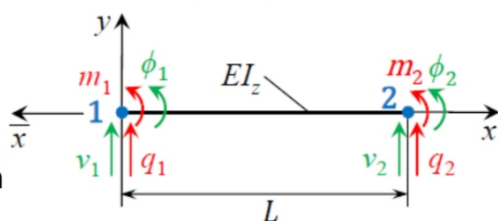
$$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \epsilon$$

$$F = \frac{EA}{l} \cdot \Delta l \quad \Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \epsilon l$$

Zug-/Druckstab (Truss)



Balken (Beam)



Konten

Konten		K=1		K=2		K=3		K=4		K=5		K=6	
Freiheitsgrad		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	S1K1cc	S1K1cs									S1K6cc	-S1K6cs
	2	S1K1cs	S1K1ss									-S1K6cs	-S1K6ss
2	3			S2K2cc	S2K2cs							-S2K6cc	-S2K6cs
	4			S2K2cs	S2K2ss							-S2K6cs	-S2K6ss
3	5					S3K3cc	S3K3cs					-S3K6cc	-S3K6cs
	6					S3K3cs	S3K3ss					-S3K6cs	-S3K6ss
4	7							S4K4cc	S4K4cs			-S4K6cc	-S4K6cs
	8							S4K4cs	S4K4ss			-S4K6cs	-S4K6ss
5	9									S5K5cc	S5K5cs	-S5K6cc	-S5K6cs
	10									S5K5cs	S5K5ss	-S5K6cs	-S5K6ss
6	11	-S1K6cc	-S1K6cs	-S2K6cc	-S2K6cs	-S3K6cc	-S3K6cs	-S3K6cs	-S3K6ss	S6K6cc	S6K6cs	Σ_{CC}	Σ_{CS}
	12	-S1K6cs	-S1K6ss	-S2K6cs	-S2K6ss	-S3K6cs	-S3K6ss	-S4K6cc	-S4K6cs	-S5K6cc	-S5K6cs	Σ_{CS}	Σ_{SS}

an, vgl. (1.21) bis (1.29) im Skriptum.

Summe

$$\begin{bmatrix} \Sigma_e CC & \Sigma_e CS \\ \Sigma_e CS & \Sigma_e SS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{FF} = [K]^g = [k]_{e=1}^g + [k]_{e=2}^g + [k]_{e=3}^g + [k]_{e=4}^g + [k]_{e=5}^g$$

$$[K]^g = \frac{EA}{a} \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{EA}{a} \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{EA}{a} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{EA}{a} \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{EA}{a} \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^g = \frac{EA}{a} \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{EA}{a} \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \frac{EA}{a} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{FF} = [K]^g = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{4\sqrt{2}} + \frac{2}{5\sqrt{5}} + 0\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{4\sqrt{2}} + \frac{8}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

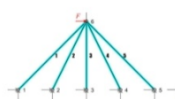


Abb. 1: Problem von Navier

$$[k]_{e=1}^g = \frac{EA}{a} \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{e=2}^g = \frac{EA}{a} \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{e=3}^g = \frac{EA}{a} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{e=4}^g = \frac{EA}{a} \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{e=5}^g = \frac{EA}{a} \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Welche Dimension hat die Struktursteifigkeitsmatrix $\underline{K}$?

$K^{3n \times 3n}$ Wenn u_2, u_3, u_1

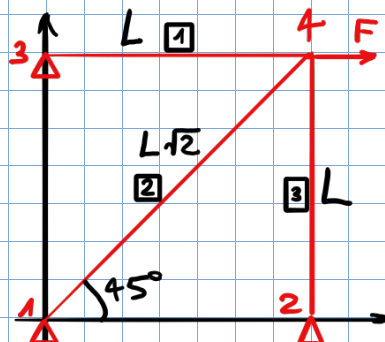
b) Welche Dimension hat die reduzierte Struktursteifigkeitsmatrix $\underline{K}_{FF}$?

a) $n \rightarrow K^{2n \times 2n}$, $4 \cdot 2 = 8 \rightarrow 8 \times 8$

b) $2n - \text{Fixierte Freiheitsgrade} = 8 - 6 = 2 \rightarrow 2 \times 2$

c) Geben Sie konkret alle drei globalen Elementsteifigkeitsmatrizen im XY-System an.

c)
$$k^g = \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}$$



$DoF_x = K \cdot 2 - 1$
 $DoF_y = K \cdot 2$

1 $\alpha = 0$ $\sin(0) = 0$ $\cos(0) = 1$ $k^1 = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $\alpha = 45^\circ$ $\sin(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(45) \cdot \sin(45) = \frac{1}{2}$ $k^2 = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3 $\alpha = 90^\circ$ $k^3 = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Erstellen Sie eine Koinzidenztabelle, in der Sie die Zuordnung der globalen Elementfreiheitsgrade auf die Strukturfreiheitsgrade angeben.

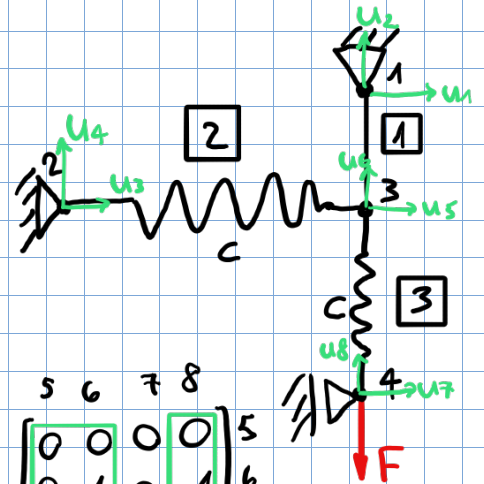
	K=1	K=2	K=3	K=4				
	1	2	3	4	5	6	7	8
(3,4) ∈ 1					1	2	3	4
(1,4) ∈ 2	1	2					3	4
(2,4) ∈ 3			1	2			3	4

e) Stellen Sie die reduzierte Struktursteifigkeitsmatrix $\underline{K}_{FF}$ konkret auf.

$k_{FF}^{2 \times 2} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 & 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \\ 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 & 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix}$

Freie Verschiebungen

1	1	2			3	4		
2			1	2	3	4		
3					1	2	3	4
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8



$$K^1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K^2 = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K^3 = c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{FF} = \begin{pmatrix} 0+c+0 & 0+0+0 & 0 \\ 0+0+0 & \frac{EA}{L}+0+c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L}+c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{matrix}$$

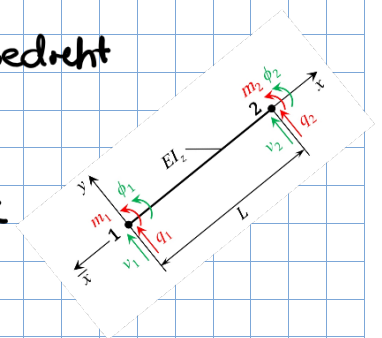
$$U_F? \quad K_{FF} \cdot U_F = F_F \quad F_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} \quad U_F = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_8 \end{pmatrix}$$

$$K_{FF}^{-1} \cdot F_F = U_F$$

$$K^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & \phi_1 & v_1 \\ m_2 & \phi_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{K}^e = \begin{pmatrix} \frac{AEC^2}{L} + \frac{12EI_z^2}{L^3} & \frac{AECs}{L} - \frac{12EI_zs}{L^3} & -\frac{6EI_zs}{L^2} & -\frac{AEC^2}{L} - \frac{12EI_z^2}{L^3} & \frac{12EI_zs}{L^3} - \frac{AECs}{L} & -\frac{6EI_zs}{L^2} \\ \frac{AECs}{L} - \frac{12EI_zs}{L^3} & \frac{12EI_z^2}{L^3} + \frac{AEs^2}{L} & \frac{6EI_zc}{L^2} & -\frac{12EI_zs}{L^3} - \frac{AECs}{L} & -\frac{12EI_zc}{L^3} - \frac{AEs^2}{L} & \frac{6EI_zc}{L^2} \\ -\frac{6EI_zs}{L^2} & \frac{6EI_zc}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & \frac{6EI_zs}{L^2} & -\frac{6EI_zc}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AEC^2}{L} - \frac{12EI_z^2}{L^3} & \frac{12EI_zs}{L^3} - \frac{AECs}{L} & \frac{6EI_zc}{L^2} & \frac{AEC^2}{L} + \frac{12EI_z^2}{L^3} & \frac{AECs}{L} - \frac{12EI_zs}{L^3} & \frac{6EI_zs}{L^2} \\ \frac{12EI_zs}{L^3} - \frac{AECs}{L} & -\frac{12EI_zc}{L^3} - \frac{AEs^2}{L} & -\frac{6EI_zc}{L^2} & \frac{AECs}{L} - \frac{12EI_zs}{L^3} & \frac{12EI_zc}{L^3} + \frac{AEs^2}{L} & -\frac{6EI_zc}{L^2} \\ -\frac{6EI_zs}{L^2} & \frac{6EI_zc}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_zs}{L^2} & -\frac{6EI_zc}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix}$$

Gedreht

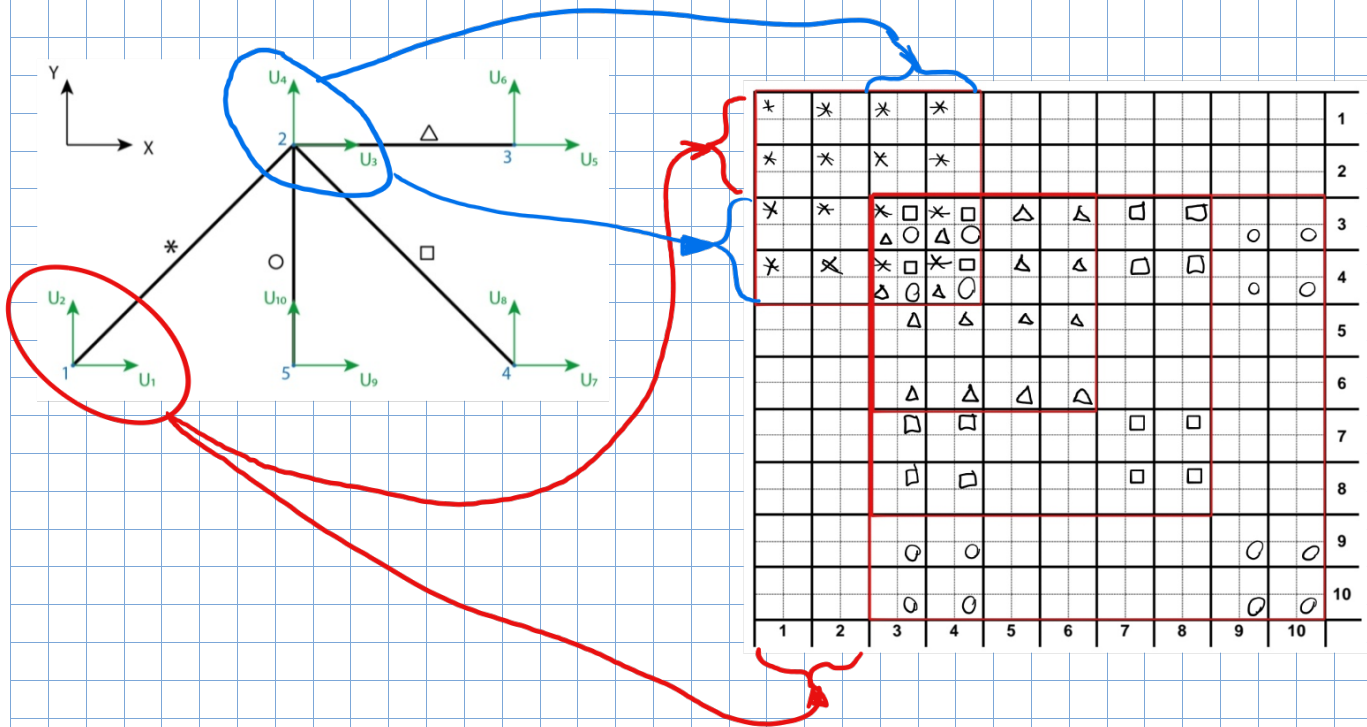


f) Berechnen Sie die Verschiebung des Knotens 4 in X- und Y-Richtung.

$$K_{FF} \cdot U = F$$

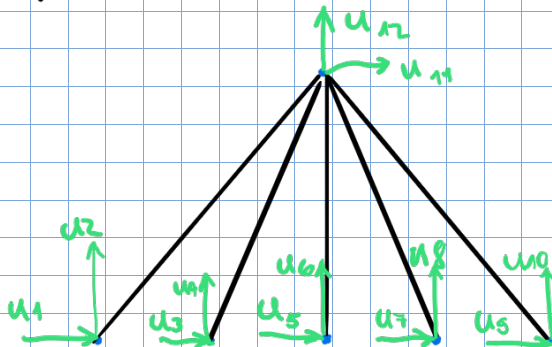
$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_7 \\ U_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow U_7 = -(2\sqrt{2} + 1)U_8$$

$$F = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} (-(2\sqrt{2} + 1)^2 U_8) + U_8 \rightarrow \begin{cases} U_8 = -\frac{FL}{EA} \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ U_7 = \frac{FL}{EA} \frac{3-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



Koinzidenztabelle

Naviers Problem



e	1	2	3	4	5
1	1	3	5	7	9
2	2	4	6	8	10
3	11	11	11	11	11
4	12	12	12	12	12

Lösung Gleichungssystem

$$K = \begin{pmatrix} K_{FF} & K_{FU} \\ K_{UF} & K_{UU} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_F \\ U_U \end{pmatrix}$$

Index F = Frei
Index U = Fixiert

$$U_F = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad U_U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix}$$

K_{FF} : Kopplung zwischen zwei Freiheitsgraden

K_{FU} : Kopplung von freien zu festen

K_{UF} : Kopplung von festen zu freien

K_{UU} : Kopplung zwischen festen

Gleichung für freie Verschiebung

Allgemein

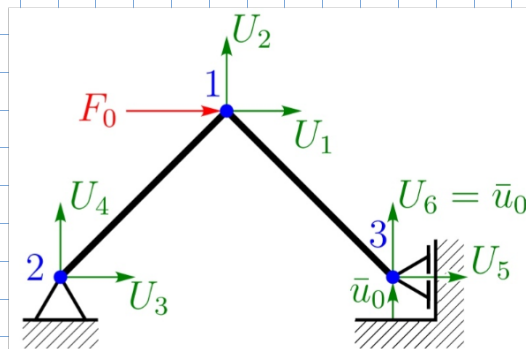
$$K_{FF} \cdot U_F = f_F - K_{FU} \cdot U_U$$

Wenn $U_U = 0$

$$K_{FF} \cdot U_F = f_F$$

$$K_{FF} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad f_F = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$U_6 = \bar{u}_0$ eingeprägt



$$\frac{c}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{c}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{c}{2} \cdot 2 \cdot U_1 = F_0 - \frac{c}{2} \cdot \bar{u}_0 \quad U_1 = \frac{F_0 - \frac{c}{2} \bar{u}_0}{c} = \frac{F_0}{c} - \frac{\bar{u}_0}{2}$$

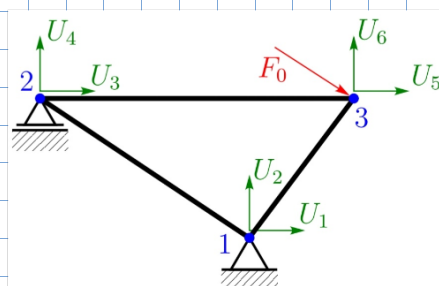
$$\frac{c}{2} \cdot 2 \cdot U_2 = -\frac{c}{2} \cdot (-1) \cdot \bar{u}_0 \quad U_2 = \frac{1}{2} \bar{u}_0$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & 0 & 0 & k_{65} & k_{66} \end{pmatrix}$$

Spalte

k_{53}

Zeile



(U)Fest: U_1, U_2, U_4 , (F)Frei: U_3, U_5, U_6

K_{FF} : Zeile/Spalten für freie u_i

→ $k_{33} \dots k_{66}$

K_{FU} : Zeilen Frei, Spalten fest

→ k_{31}, k_{52}, k_{64}

K_{UF} : Zeilen Fest, Spalten frei

→ k_{13}, k_{25}, k_{46}

K_{UU} : Zeilen/Spalten fest

→ k_{11}, k_{22}, k_{44}

Näherungslösung mit Galerkin

System	Schwache Form des Gleichgewichts
Diagram of a cantilever beam of length L fixed at $x=L$ and free at $x=0$. A distributed load $n(x) = \nu A x^2$ acts to the right. A shear force $\bar{t}_0$ acts to the left at $x=0$. The beam has axial stiffness EA. The displacement at $x=L$ is $\bar{u}_L \neq 0$.	$0 = - \int_0^L g'(x) EA u'(x) dx - g(0) A \bar{t}_0 + \int_0^L g(x) \nu A x^2 dx \quad \forall g^{\text{vert}} \quad (*)$

1. Ansatzfunktion wählen

$$u(x) = c_0 + c_1 x$$

2. Passende Gewichtsfunktion $u(x)$ mit δ multiplizieren

$$g_u(x) = \delta c_0 + \delta c_1 x$$

3. Verschiebungsrandbedingung auswerten (Ansatzfunktion)

$$\bar{u}_L = u(L) = c_0 + c_1 L \rightarrow c_0 = \bar{u}_L - c_1 L \rightarrow u(x) = \underbrace{\bar{u}_L}_{c_0} - c_1 L + c_1 x \quad \text{nur noch 1. Unbekannte}$$

4. Bedingung für Gewichtsfunktion einfügen, damit mit Verschiebungs. verträglich.

$$0 = g_u(L) = \delta c_0 + \delta c_1 L \rightarrow \delta c_0 = -\delta c_1 L \rightarrow g_u(x) = -\delta c_1 L + \delta c_1 x$$

Wenn $u(x)$ an einer Stelle hier ($x=L$) gegeben, dann muss Gewichtsfunktion an derselben Stelle $= 0$ sein $g_u(L) = 0$

5. $u(x)$ und $g(x)$ ableiten

$$u(x) = \bar{u}_L - c_1 L + c_1 x \rightarrow u'(x) = c_1, \quad g_u(x) = -\delta c_1 L + \delta c_1 x \rightarrow g_u'(x) = \delta c_1$$

6. Einsetzen in schwache Form Schwache Form aus aufgabe gegeben

$$0 = - \int_0^L g'(x) EA u'(x) dx - g(0) A \bar{t}_0 + \int_0^L g(x) \nu A x^2 dx \quad \forall g^{\text{vert}}$$

$$0 = - \int_0^L \underbrace{\delta c_1}_{g'(x)} EA \underbrace{c_1}_{u'(x)} dx - \underbrace{(-\delta c_1 L)}_{g(0)} A \bar{t}_0 + \int_0^L \underbrace{(-\delta c_1 L + \delta c_1 x)}_{g(x)} \nu A x^2 dx$$

$$0 = \underbrace{-\delta c_1 EA c_1}_{\text{Konstant}} \int_0^L dx + \delta c_1 L A \bar{t}_0 + \underbrace{\nu A \delta c_1}_{\text{Konstant}} \int_0^L (x-L) x^2 dx$$

$$x^3 - x^2 L \rightarrow \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3 L}{3} \right]_0^L = \left(\frac{L^4}{4} - \frac{L^4}{3} \right)$$

$$0 = -\delta c_1 EA c_1 L + \delta c_1 L A \bar{t}_0 - \nu A \delta c_1 \frac{L^4}{12} \quad \forall \delta c_1 \quad | : \delta c_1 \quad \text{Dividieren durch } \delta c_1 \neq 0$$

$$0 = -EA c_1 L + LA \bar{t}_0 - \nu A \frac{L^4}{12}$$

$$c_1 = \frac{-\nu A \frac{L^4}{12} + LA \bar{t}_0}{EA L} = \frac{\bar{t}_0 - \nu \frac{L^3}{12}}{E}$$

1. Ansatzfunktion wählen

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$$

$$0 = \left[G I_T g(z) \frac{d\varphi}{dz} \right]_0^L - \int_0^L G I_T \frac{dg}{dz} \frac{d\varphi}{dz} dz + \int_0^L g(z) m(z) dz$$

2. Passende Gewichtsfunktion $\varphi(z)$ mit δ multiplizieren

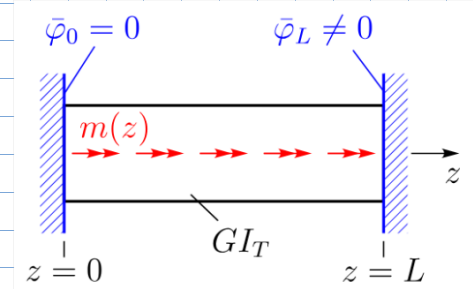
$$g(z) = \delta c_0 + \delta c_1 z + \delta c_2 \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$$

3. Verschiebungsrandbedingung auswerten (Ansatzfunktion)

$$0 = \varphi(0) = c_0 \rightarrow c_0 = 0$$

$$\varphi_L = \varphi(L) = c_1 L + c_2 \sin\left(\pi \frac{L}{L}\right) \rightarrow c_1 = \frac{\varphi_L}{L}$$

$$\varphi(z) = \frac{\varphi_L}{L} \cdot z + c_2 \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$$



4. Bedingung für Gewichtsfunktion einfügen, damit mit Verschiebungs. verträglich.

Wenn $u(x)$ an einer Stelle hier ($z=L$) gegeben, dann muss Gewichtsfunktion an derselben Stelle $= 0$ sein $g_u(L) = 0$

$$0 = g(0) = \delta c_0 \rightarrow \delta c_0 = 0$$

$$0 = g(L) = \delta c_1 L + \delta c_2 \sin\left(\pi \frac{L}{L}\right) \rightarrow \delta c_1 = 0$$

$$g(z) = \delta c_2 \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$$

5. Schwache Form vereinfachen

$$0 = \left[G I_T g(z) \frac{d\varphi}{dz} \right]_0^L - \int_0^L G I_T \frac{dg}{dz} \frac{d\varphi}{dz} dz + \int_0^L g(z) m(z) dz$$

$$g(0) = g(L) = 0$$

$$0 = - \int_0^L G I_T g'(z) \varphi'(z) dz + \int_0^L g(z) m(z) dz$$

6. $\varphi(z)$ und $g(z)$ ableiten

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi_L}{L} + c_2 \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \cdot \frac{\pi}{L}$$

$$g'(z) = \delta c_2 \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \frac{\pi}{L}$$

7. Einsetzen in schwache Form Schwache Form aus aufgabe gegeben

$$0 = - G I_T \delta c_2 \frac{\pi}{L} \int_0^L \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \left(\frac{\varphi_L}{L} + c_2 \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \cdot \frac{\pi}{L} \right) dz + \int_0^L \delta c_2 \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) \cdot \frac{4 M_0}{L} \left(\frac{z}{L} - \frac{1}{2} \right)^2 dz$$

$$- G I_T \delta c_2 \frac{\pi}{L} \int_0^L \cos\left(\pi \frac{z}{L}\right) \frac{\varphi_L}{L} + c_2 \cos^2\left(\pi \frac{z}{L}\right) \frac{\pi}{L} dz + \frac{4 M_0}{L} \delta c_2 \int_0^L \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) \cdot \left(\frac{z}{L} - \frac{1}{2} \right)^2 dz$$

$$0 = - G I_T \delta c_2 \frac{\pi}{L} \frac{\pi}{2} \cdot c_2 + \frac{4 M_0}{L} \delta c_2 \cdot \frac{L (\pi^2 - 8)}{2 \pi^3}$$

$$\rightarrow c_2 = \frac{4 L M_0 (\pi^2 - 8)}{G I_T \pi^5}$$

$$0 = - G I_T \delta c_2 \cdot c_2 \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{2 M_0 \delta c_2 (\pi^2 - 8)}{\pi^3}$$

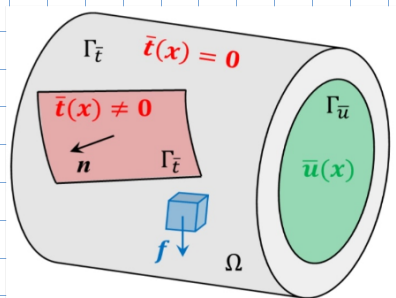
$$\varphi(z) = \frac{\varphi_L}{L} \cdot z + \frac{4 L M_0 (\pi^2 - 8)}{G I_T \pi^5} \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$$

15 Gleichungen ergeben partielles DGL System (GB, MG, KG)

Verschiebungsrandbedingungen $\bar{u}$

Spannungsrandbedingungen $\bar{t} = n \cdot \sigma$

Wenn beides gegeben $\rightarrow$ gemischtes Randwertproblem



Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{GB})$$

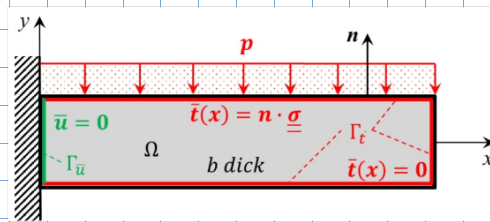
Hookesches Gesetz / Konstitutive Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{zz} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\epsilon_{xx} + (1-\nu)\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{zz} \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy} + (1-\nu)\epsilon_{zz} \right) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \quad \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (\text{MG})$$

Starke Lösung

Starke Form des Z/D-Problems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + n &= 0 \\ u(0) &= \bar{u}_0 \\ \sigma(L) = E u'(L) &= \bar{t}_L \end{aligned}$$



Kinematische Gleichungen

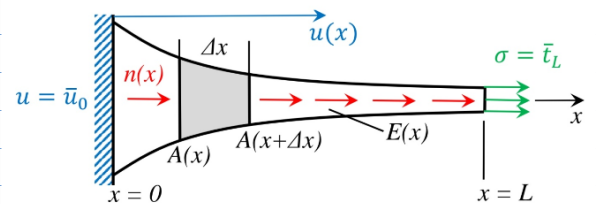
$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{KG})$$

Konstruktion der Schwachen Form

$$\begin{aligned} (EA u'(x))' + n &= 0 \\ \int_0^L (EA u'(x))' \cdot g(x) dx + \int_0^L n \cdot g(x) dx &= 0 \end{aligned} \quad \text{Partielle Integration}$$

Schwache Form des Z/D-Problems

$$\begin{aligned} \int_0^L AE u(x) g'(x) dx &= \bar{t}_L (gA) \Big|_L + \int_0^L g n dx \\ u(0) &= \bar{u} \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$



$$\sigma = t_L = \frac{F}{A}$$

Wesentliche Randbedingung: $u(L) = u(0) = 0$

Natürliche Randbedingung: $t(0) = \frac{F}{A(0)}$

n Gausspunkten $\rightarrow$ Polynom Grad $p = 2n - 1$

Grad p Polynom $\rightarrow n \geq \frac{p+1}{2}$ Gausspunkte

$g(x)$ Gewichtsfunktion

Schwache Form

$$0 = - \int_0^L AE u'(x) g_u'(x) dx + g_u(L) A t_L + \int_0^L g_u(x) n(x) dx \quad \forall g_u$$

$$\sigma(x) = E \cdot u'(x)$$

Verschiebungsfunktionen $u(x)$ (auch Ansatzfunktionen genannt) $\rightarrow$ Koeffizienten unbekannt

Ansatz Z/D stab $\rightarrow u(x) = c_0 + c_1 x$ mit $u(0) = u_1, u(L) = u_2 \rightarrow c_0 = u_1, c_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$

$$\rightarrow u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot x = \underbrace{\left(1 - \frac{x}{L}\right)}_{N_1(x)} u_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2(x)} u_2 = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2$$

$N(x)$ = Formfunktion

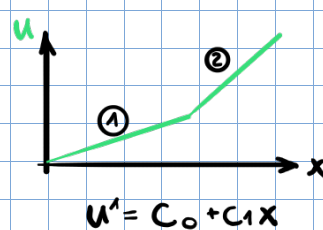
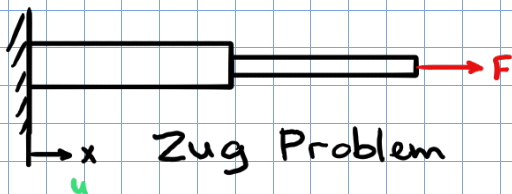
N-Matrix (Verschiebungsfeld)

• Ansatzfunktionen

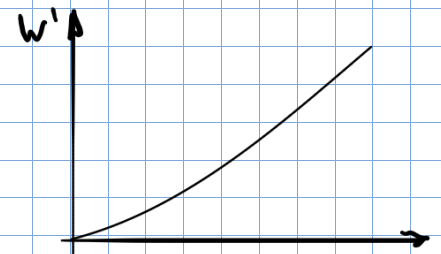
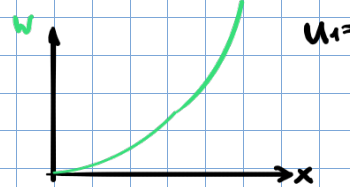
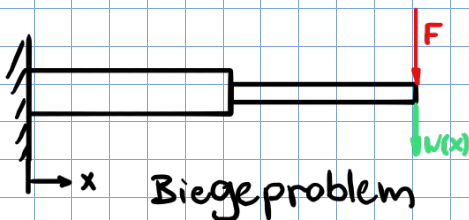
B-Matrix (Verzerrungsfeld)

• Enthält die Ableitungen der Ansatzfunktionen

Wann welche Ansatzfunktion:



$$u^2 = c_2 + c_3 x$$



Wenn Kubis muss ableitung stetig sein

$$w^1 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

MFEM – Mathematische Grundlagen

- Beispiel:** Zugstab gemäss Abbildung auf S. 5:

- Länge $L = 2$, konstante Dehnsteifigkeit $EA = \text{const}$, E-Modul $E = 10^5$, Linienlast $n = 10Ax$, $A = 1$, $\sigma(L) = 10$
- Randbedingung: Vorgegebene Verschiebung $u(0) = 10^{-4}$, daraus folgt $g(0) = 0$.
- Rechnung der Einfachheit halber ohne Einheiten.

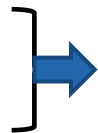
$$\begin{aligned}
 (a) \quad & E \int_0^2 \frac{dg_u}{dx} \frac{du}{dx} dx = 10 (g_u)|_2 + 10 \int_0^2 g_u x dx \\
 (b) \quad & u(0) = 10^{-4} \\
 (c) \quad & g_u(0) = 0
 \end{aligned} \tag{*}$$

- Einsetzen in (18) liefert:

- Ansetzen einer Funktion $u(x)$ mit $u(0) = 10^{-4}$

- Z.B. linearer Ansatz $u(x) = c_0 + c_1x$, also wegen gleicher Bauart der Gewichtsfunktion: $g(x) = \delta c_0 + \delta c_1x$

- Wegen $u(0) = 10^{-4}$ folgt sofort $c_0 = 10^{-4}$
- Wegen $g(0) = 0$ folgt sofort $\delta c_0 = 0$



$$\begin{aligned}
 u(x) &= 10^{-4} + c_1x \Rightarrow \frac{du}{dx} = c_1 \\
 g_u(x) &= \delta c_1x \Rightarrow \frac{dg_u}{dx} = \delta c_1
 \end{aligned}$$

- Einsetzen in (*) (a) liefert

$$E \int_0^2 \delta c_1 c_1 dx = 10 (\delta c_1 x)|_2 + 10 \int_0^2 \delta c_1 x^2 dx$$

- Nachfolgende Integration und Ausklammern ergibt: $\delta c_1 \left(2Ec_1 - 20 - \frac{80}{3} \right) = 0$.

- Weil δc_1 vollkommen beliebig, muss Klammerausdruck verschwinden, daraus $c_1 = 70/3E$ und damit:

$$u_L(x) = 10^{-4} + \frac{70}{3E}x = 10^{-4} \left(1 + \frac{7}{3}x \right) \Rightarrow \sigma_L(x) = E \frac{du}{dx} = \frac{70}{3}$$

Numerische Integration Transformation $\xi = \frac{2}{L}x - 1, 0 \leq x \leq L \rightarrow x = \frac{L}{2}(\xi + 1), -1 \leq \xi \leq 1$

Gauss Quadratur

$$I = \int_0^L f(x) dx$$

n Formel

$$1 \quad (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$2 \quad \frac{L}{2} (\omega_1 \hat{f}(\xi_1) + \omega_2 \hat{f}(\xi_2))$$

Polynomgrad p	Gausspunkte n	Stützstelle $\xi_i, 1 \leq i \leq n$	Gewicht ω_i
1	1	0.0	2.0
3	2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1.0
5	3	± 0.7745966692 0.0	0.5555555556 0.8888888889
7	4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549

Grad $p = 2n - 1$
Gausspunkte $n \geq \frac{p+1}{2}$
 $2.5 \rightarrow 3 = n$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot f\left(\frac{b-a}{2} \xi_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

1. $\frac{L}{2} = \frac{b-a}{2}$ berechnen

Bsp. $\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$

2. $x = \frac{b-a}{2} (\xi + 1)$
↑
Tabelle

$\frac{\pi}{4} (0 + 1) = \frac{\pi}{4}$

3. ω_i aus Tabelle $\rightarrow n=1 \rightarrow \omega=2$

$$\frac{b-a}{2} \omega_1 \cdot f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

Korrekte Anzahl Stützstellen

$$J\left(\xi, \eta\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

$$\xi = 1, \eta = 1$$

Formfunktionen partiell abgeleitet

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta), \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$0, 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta), \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)$$

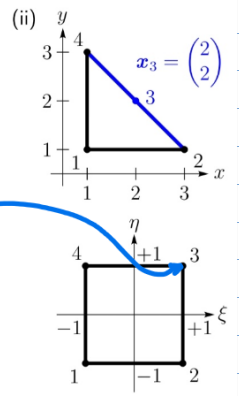
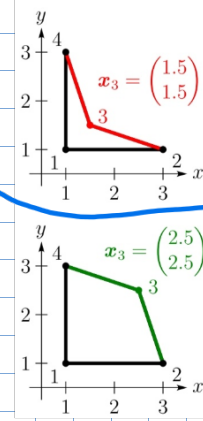
$$0, \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta), \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta), \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$-\frac{1}{2}, 0$$



$$x_1 = (1, 1)$$

$$x_2 = (3, 1)$$

$$x_3 = (x_3, y_3)$$

$$x_4 = (1, 3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot x_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 + \frac{1}{2} x_3 + 0 \cdot 1 = \frac{1}{2} x_3 - \frac{3}{2}$$

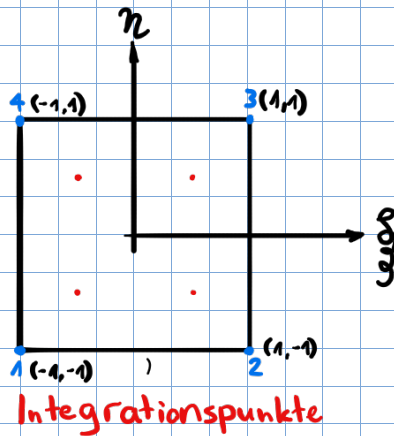
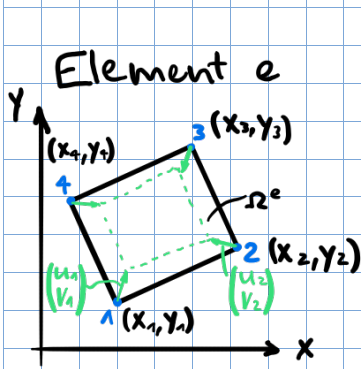
$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} y_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = \frac{1}{2} y_3 - \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \frac{1}{2} y_3 + 0 \cdot 3 = \frac{1}{2} y_3 - \frac{1}{2}$$

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} x_3 - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} y_3 - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} y_3 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Isoparametrisches 4-Knoten Element

isop4.py



Formfunktionen

$$\hat{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\hat{N}_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$\hat{N}_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

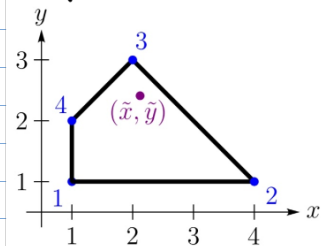
$$\hat{N}_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Physikalische Koordinaten der Knoten

$$x(\xi, \eta) = x_1 \cdot \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + x_2 \cdot \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) + x_3 \cdot \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) + x_4 \cdot \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$y(\xi, \eta) = y_1 \cdot \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + y_2 \cdot \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) + y_3 \cdot \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) + y_4 \cdot \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Bsp.



$$(x_1, y_1) = (1, 1)$$

$$(x_2, y_2) = (4, 1)$$

$$(x_3, y_3) = (2, 3)$$

$$(x_4, y_4) = (1, 2)$$

$$x(\xi, \eta) = -0.5\xi\eta - 0.5\eta + \xi + 2$$

$$y(\xi, \eta) = 0.25\xi\eta + 0.75\eta + 0.25\xi + 1.75$$

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden vier Funktionen „Ja“ oder „Nein“ an, ob sich diese grundsätzlich als Formfunktion für den Knoten 1 des skizzierten Viereck-Elements mit den Eckknoten 1, ..., 4 eignet.

Ja Nein

☒ ☐ $\hat{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) = \frac{1}{4}(1+1)(1+1)(1+1-1) = 1$

☐ ☒ $\hat{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \frac{1}{4}(1-1)(1+1) = 0$

☒ ☐ $\hat{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \frac{1}{4}(1+1)(1+1) = 1$

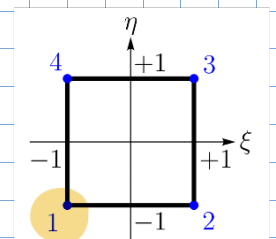
☐ ☒ $\hat{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi - 1)(\eta^2 - \eta - 1) \frac{1}{4}(1+1-1)(1+1-1) = \frac{1}{4}$

Damit als Funktion eignet, muss am Knoten 1 = 1

an allen anderen Knoten = 0

$$\xi = -1$$

$$\eta = -1$$



FEM Zusammenfassung

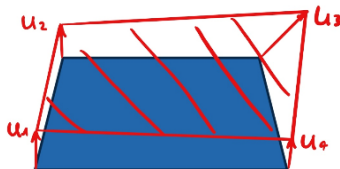
Vernetzen

u = Elementknotenverschiebung

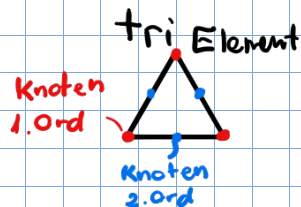
$$f = k \cdot u$$

Knoten verschieben sich unter Belastung

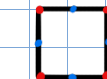
Formfunktion, nur an Punkten diskrete Verschiebung



$$u(x,y) = N_1(x,y)u_1 + N_2(x,y)u_2 + N_3(x,y)u_3 + N_4(x,y)u_4$$



Quad Element

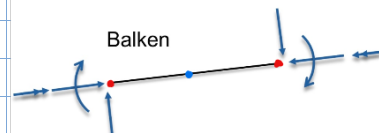


1D Linienelemente

Stab



Balken

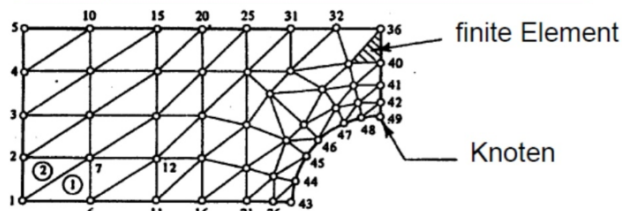


Grundlage für FEM ist das Prinzip der virtuellen Arbeit

Eine virtuelle Verschiebung wird betrachtet, um Gleichgewichtsbedingungen herzuleiten.

Räumliche Diskretisierung

- Ein Körper wird in N finiten Elemente unterteilt



$$K^e u^e = F^e$$

Nichtlineare Probleme

Geometrische Nichtlinearitäten

- Grosse Deformationen
- Instabilitäten (Knicken, Beulen)

Nichtlineares Werkstoffverhalten

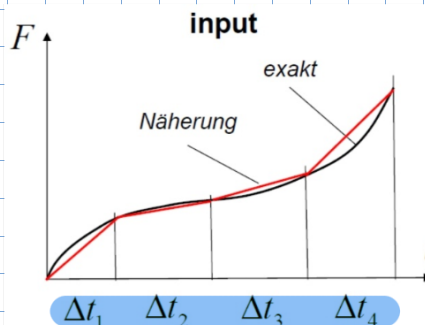
- Elastisch-Plastisches Material
- Zeitabhängigkeit (Visco-Plastizität, Kriechen)

Nicht lineare Randbedingungen

- Kontakt

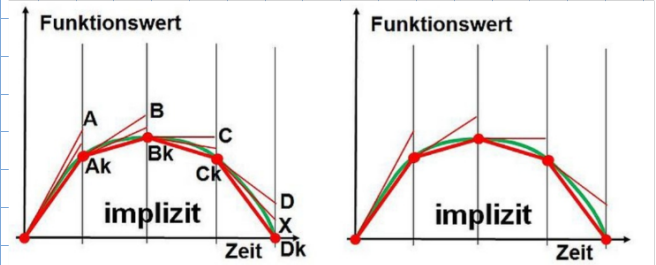
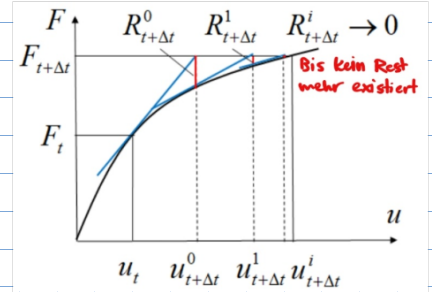
Nichtlineare Probleme werden
Inkremental mit Zeitschrittverfahren gelöst

Zeitinkremente



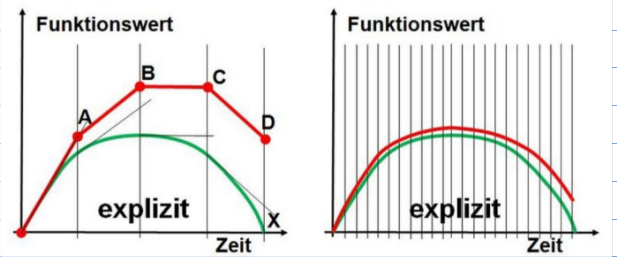
Implizite Integration (Langsam, stabil, genau)

- Newton-Verfahren
- Gleichgewicht für jedes Inkrement zum Zeitpunkt $t+\Delta t$
- Mit jeder Iteration nähert man sich der exakten Lösung mithilfe der Korrektur
- Grosse Zeitschritte
- Hohe Genauigkeit
- Rechenintensiv
- Kann instabil werden



Explizite Integration (Schnell, direkt)

- Stark dynamische Probleme
- Nichtlineare Probleme
- sehr stabil

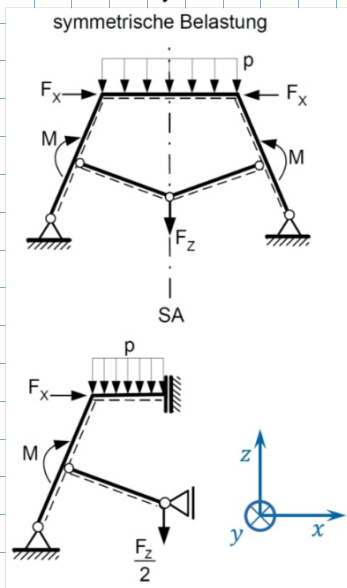


FEM Simulation – Workflow

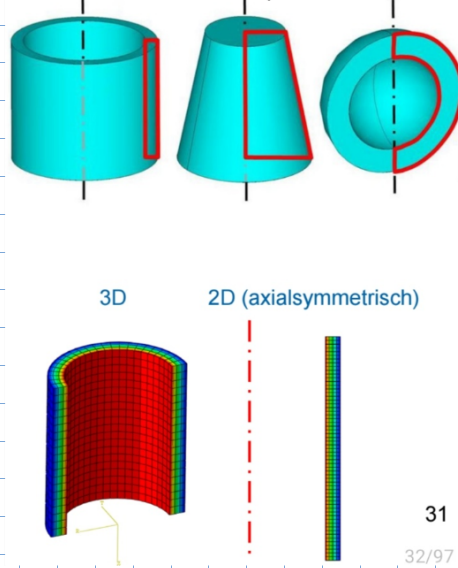
- Modellierungsansatz
- Pre-Processing
 1. Erstellen / Import der CAD Geometrie (Parts)
 2. Diskretisierung: Vernetzen (Mesh)
 3. Definition der Material-, Querschnitseigenschaften (Property → Materials, Sections, Profiles)
 4. Erstellen von Simulationsobjekten (Instances) und der Baugruppen (Assembly)
 5. Definition von Kontakten (Interactions) und Zwangsbedingungen (Constraints)
 6. Definition der Analyse (implizit, explizit) und von Lastfällen (Step)
 7. Definition der Verschiebungsrandbedingungen (Load → BCs)
 8. Definition der Krafterandbedingungen (Load → Load)
- Solver
 - Definition der Berechnungsoptionen (Job) → Starten der Simulation
 - Implizites / Explizites Lösungsverfahren des Gleichungssystems
- Post-Processing (Visualization)
 - graphische Darstellung und Auswertung der Solver-Ergebnisse
 - kritisches Auseinandersetzen mit Resultaten / Abgleich mit analytischen Abschätzungen oder Experimenten (wenn möglich)

Modellierungsansätze

• Spiegelsymmetrisch



• Rotations/Axialsymmetrie



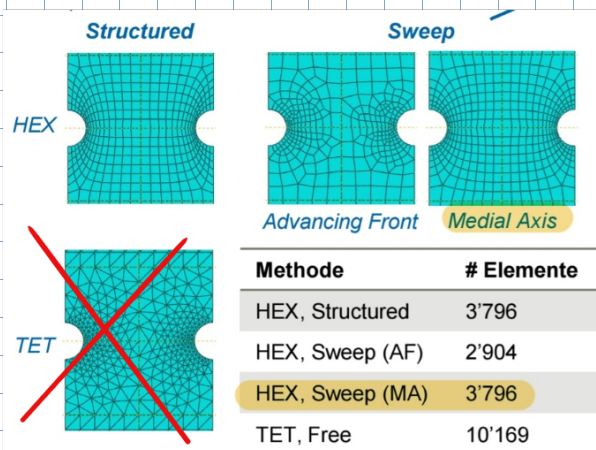
• Ebener Spannungszustand

- Eine Hauptspannung ist $\sigma = 0$
- Dünnwandige Druckbehälter
- Dünnes Blech

• Ebener Verzerrungszustand

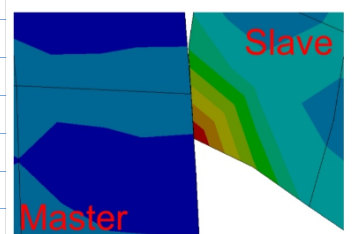
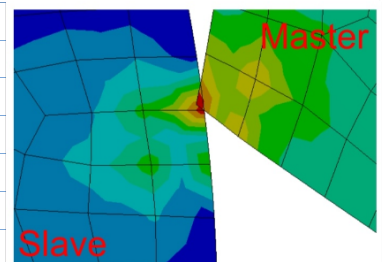
- Dicke, Prismatische Körper

Mesh



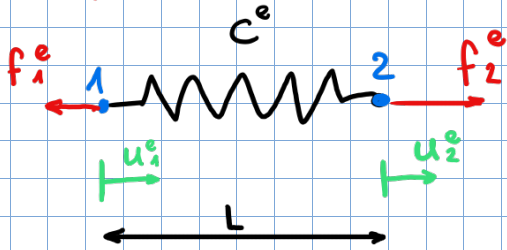
Interactions

Kriterium	Master	Slave
Bewegung	ist in Ruhe	bewegt sich auf Master zu
Stetigkeit	sollte stetig sein (keine Ecken), konkave oder ebene Flächen	konvexe Flächen
Flächen- / Liniengröße	grössere Kontaktfläche	kleiner Kontaktfläche
Vernetzung	gröberes Netz	feineres Netz
Steifigkeit	höhere Steifigkeit (der Struktur, nicht nur Material)	geringere Steifigkeit (der Struktur, nicht nur Material)



Eindimensionale FE-Probleme

Feder System



$$f_2^e = -f_1^e = c^e (u_2^e - u_1^e)$$

Steifigkeitsmatrix

Vektor

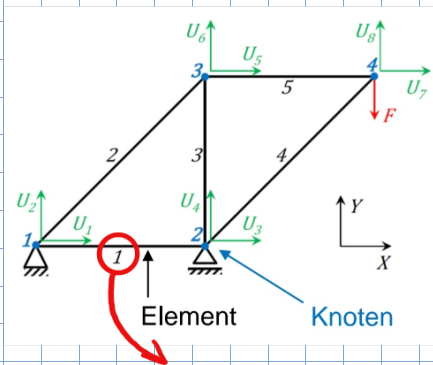
Vektor

$$\{f^e\} = [k^e] \{u\}$$

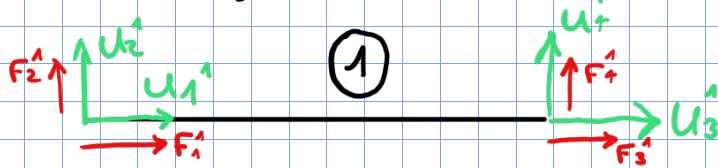
$$f^e = k^e u^e$$

$$\begin{pmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{pmatrix} = c^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix}$$

$n \quad n \times n \quad n$

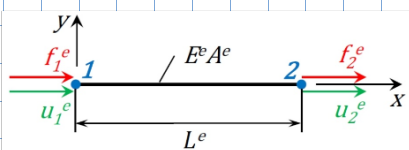


Elementsteifigkeitsmatrix Stab 1



$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{pmatrix} = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{pmatrix}$$

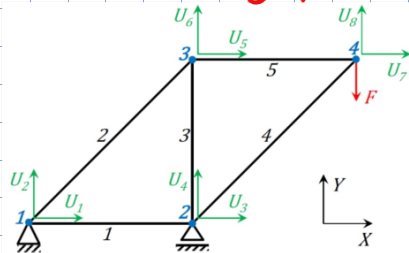
Lokale Elementsteifigkeitsmatrix



$$\underline{f}^e = \underline{k}^e \underline{u}^e$$

$2 \times 1 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times 1$

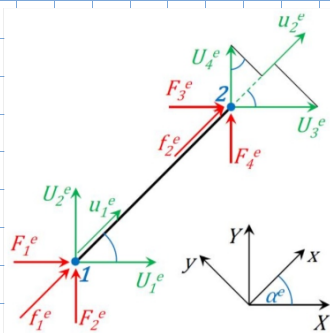
Globalen Gleichungssystem



$$\underline{F} = \underline{K} \underline{u}$$

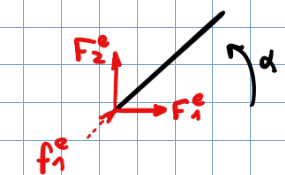
$8 \times 1 \quad 8 \times 8 \quad 8 \times 1$

Globale Elementsteifig.



$$\underline{F}^e = \underline{k}^e \underline{u}^e$$

$4 \times 1 \quad 4 \times 4 \quad 4 \times 1$



$$\begin{aligned} F_1^e &= f_1^e \cos(\alpha^e) \\ F_2^e &= f_1^e \sin(\alpha^e) \\ F_3^e &= f_2^e \cos(\alpha^e) \\ F_4^e &= f_2^e \sin(\alpha^e) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}^e = \underline{T}^{eT} \underline{f}^e$$

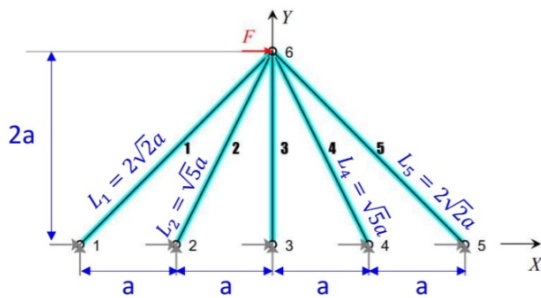
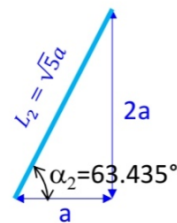


Abb. 1: Problem von Navier

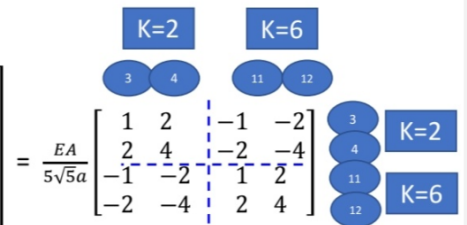


$$\sin(\alpha_2)_{e=2} = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos(\alpha_2)_{e=2} = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\mathbf{k}^g = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{e=2}^g = \frac{EA}{\sqrt{5}a} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$



f) Berechnen Sie nun die X-Verschiebung des Knotens 6 sowie die Spannung im Stab 4 für $F = 1\text{KN}$, einheitliche $A^e = A = 100\text{mm}^2$ und $E^e = E = 10000\text{MPa}$ sowie $a = 250\text{mm}$.

$$U_{11} = \frac{Fa}{EA} \frac{100}{25\sqrt{2} + 8\sqrt{5}} = \frac{25\text{mm}}{25\sqrt{2} + 8\sqrt{5}} = 0.4695\text{mm}.$$

Die axiale Durchbiegung des Stabes ist die Differenz zwischen den Verschiebungen der Punkte 4 und 6. Punkt 4 ist starr befestigt, seine Verschiebung ist also 0.

$$\Delta L_{e=4} = 0 - U_{11,e=4} = U_{11,e=4}$$

$$U_{11,e=4} = U_{11} \cos(\alpha_4) = \frac{Fa}{EA} \frac{100}{25\sqrt{2} + 8\sqrt{5}} \cos(\alpha_4) = \frac{Fa}{EA} \frac{100}{25\sqrt{2} + 8\sqrt{5}} \cos(\alpha_4) = \frac{-Fa}{EA} \frac{20}{\sqrt{10} + 8}$$

Die Normalspannung im Stab 4 wird berechnet mit

$$\sigma_{e=4} = E_{e=4} \varepsilon_{e=4} = E_{e=4} \frac{\Delta L_{e=4}}{L_{e=4}}$$

$$\sigma_{e=4} = E_{e=4} \frac{U_{11,e=4}}{L_{e=4}} = E_{e=4} \frac{U_{11,e=4}}{\sqrt{5}a}$$

$$\sigma_{e=4} = -3.7563\text{ MPa}$$

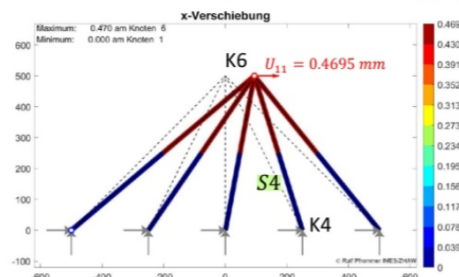
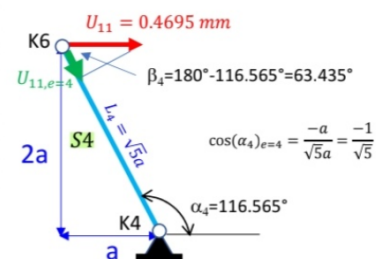
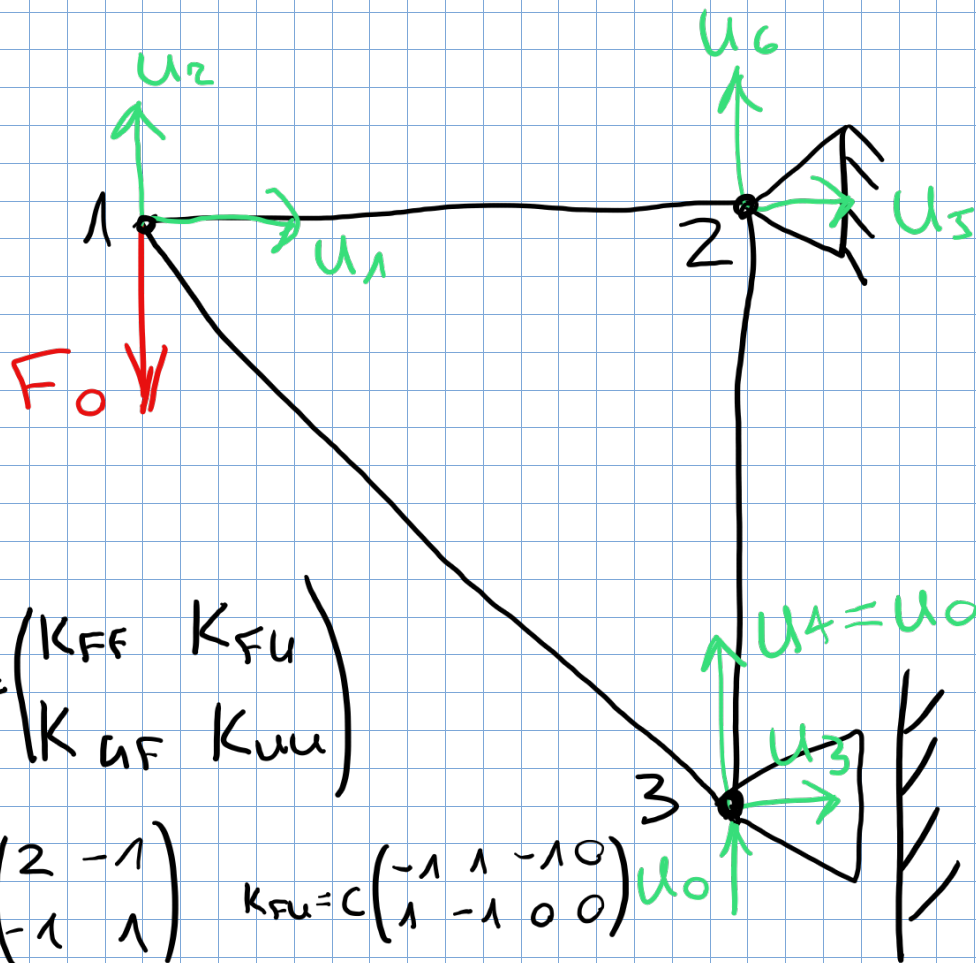
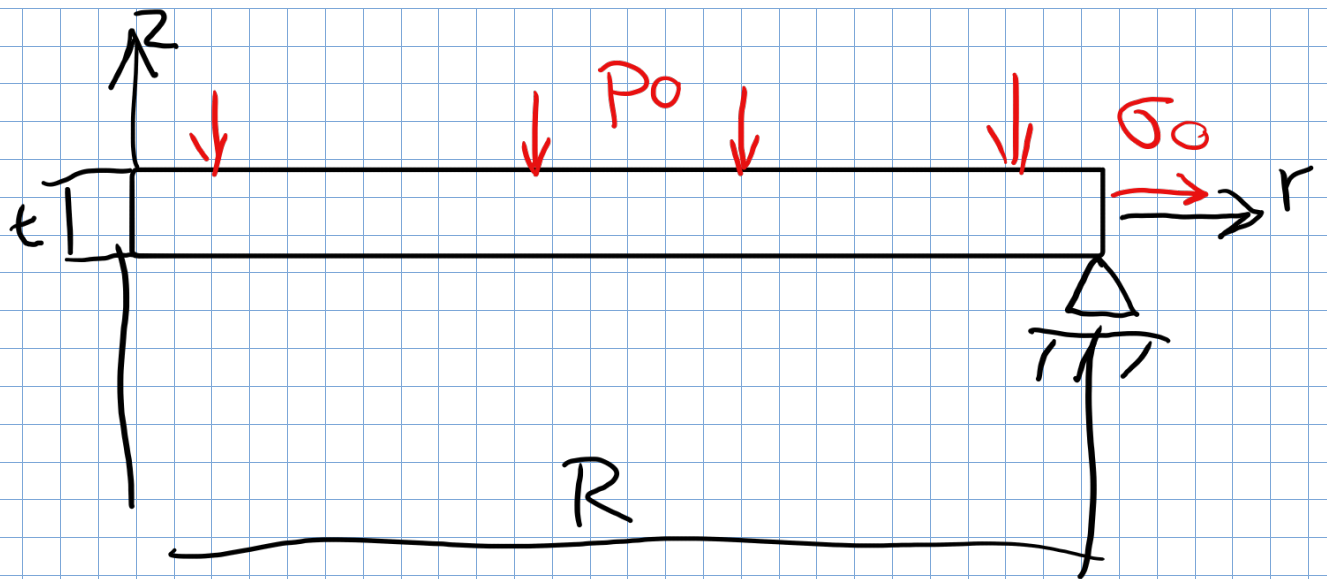


Abb. 1: x-Verschiebungen des Problems von Navier, 200-fach vergrößert





$$K = \begin{pmatrix} K_{FF} & K_{FU} \\ K_{UF} & K_{UU} \end{pmatrix}$$

$$K_{FF} = C \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{FU} = C \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{UF} = C \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{UU} = C \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$