

NUMERIK

Fehleranalyse:

$y \in \mathbb{R}$: Die exakte Lösung eines Math. Problems

$\tilde{y}$: Eine Numerische Berechnung

Absoluter Fehler: $\Delta y = |\tilde{a} - a| = |a_{\text{approx}} - a_{\text{exakt}}|$ (Sagt uns nichts, solange wir das Ergebnis nicht kennen)

Relativer Fehler: $\frac{\Delta y}{|y|} = \frac{|\tilde{a} - a|}{|a|}$ (Wird oft in Praxis verwendet!)

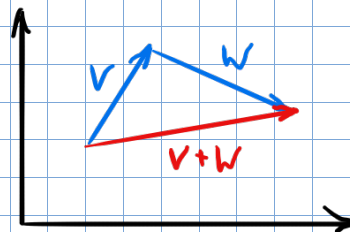
Norm: Eine Norm ordnet jedem Vektor x eine reelle Zahl $\|x\|$ zu

Bedingungen: $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ $z = a + bj \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

a) $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$ (Positivität)

b) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (Homogenität)

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksgl.)



$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ Summennorm $|2| + |4| + |-6|$

$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$ Euklidische Norm $\sqrt{|2|^2 + |4|^2 + |-6|^2}$

$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$ P-Norm

$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ Maximumnorm $\rightarrow |-6| = \underline{\underline{6}}$ (Maximale Zahl als Betrag)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Induzierte Norm einer Matrix

$\|A\|_1 := \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ Spaltennorm $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$
 $|5| + |-2| = 7$ $|1| + |8| = 9$ $\underline{\underline{9}}$

$\|A\|_2 := \sqrt{\max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(A^T A)}$ Spektralnorm (EW)
Grösster Eigenwert

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -11 \\ -11 & 65 \end{pmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} 29 & -11 \\ -11 & 65 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \lambda_1 = 68.1 \\ \lambda_2 = 25.9 \end{matrix} \rightarrow \sqrt{68.1} \approx \underline{\underline{8.25}}$$

$\|A\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ Zeilensummenorm $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$
 $|5| + |1| = 6$ $| -2 | + | 8 | = 10$ $\underline{\underline{10}}$

Spektralradius Grösster Betrag eines Eigenwerts

$$r(A) = \max \{ |\lambda_k| \}$$
$$\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 7 \rightarrow 7 \\ \lambda_2 = 6 \rightarrow 6 \end{matrix} \rightarrow \underline{\underline{7}}$$

Eigenwerte

$$\det(A - \lambda) = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} (5-\lambda)(8-\lambda) - (1 \cdot (-2)) = 0 \rightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Inverse

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 9 \quad \|A^{-1}\|_1 = 6$$

$$\|A\|_2 = 8.25 \quad \|A^{-1}\|_2 = 0.167$$

$$\|A\|_\infty = 10 \quad \|A^{-1}\|_\infty = 6$$

Konditionszahl einer Matrix

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 \quad 9 \cdot 6 = 54$$

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \quad 8.25 \cdot 0.167 = 1.38$$

$$\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \quad 10 \cdot 6 = 60$$

Landausches O-Symbol

O-Notation beschreibt, wie schnell eine Funktion $f(x)$ wächst
 $f(x) = O(g)$ für $x \rightarrow a$ im Vergl. zu einer anderen Fkt. $g(x)$, wenn x sich Wert a nähert.

$f(x)$ wächst nicht schneller als $g(x)$ in der Umgebung von a

Konditionszahl eines Problems f

$$\text{Kabs}(x_0) = |f'(x_0)|$$

$$\text{Krel}(x_0) = |f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}| \quad f(x) = e^{3x^2} \rightarrow f'(x) = e^{3x^2} \cdot 6x \quad \text{Krel}(x) = \left| e^{3x^2} \cdot 6x \cdot \frac{x}{e^{3x^2}} \right| = 6x^2$$

Numerisch Differenzieren

Ableitung näherungsweise mit Differenzenquotienten berechnen

Vorwärtsdifferenz

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad 1. \text{ord.}$$

Rückwärtsdifferenz

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \quad 1. \text{ord.}$$

Zentrale Differenz

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \quad 2. \text{ord.}$$

Diskretisierungsfehler

$$|D_f(x_0, h) - f'(x_0)| = O(h^k)$$

h = Schrittweite
 k = Fehler k. Ordnung

Zentral DQ zweite Ableitung

$$f''(x_0) + O(h^2) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \quad 2. \text{ord.}$$

Zweiseitig DQ

$$h \approx \sqrt{\epsilon_{\text{ps}}}$$

$$h \approx \sqrt[3]{\epsilon_{\text{ps}}}$$

x	3.8	3.9	4.0	4.1
$f(x)$	1.2	0.8	0.2	-0.7

$\rightarrow h = 0.1$

~~$\lim_{h \rightarrow 0}$~~ $\rightarrow h = 0.000000000001$
 Wählen ein kleines h

Maschinendynamigkeit ϵ_{ps}
 Auflösungsvermögen von Rechner

- Diskretisierungsfehler wird kleiner, wenn h kleiner wird
- Rundungsfehler wird grösser, wenn h zu klein wird (Genauigkeit $\rightarrow$ ϵ_{ps})

Gleitpunktdarstellung

half 16-bit single (float) 32-bit double 64-bit

	Vorzeichen X	Exponent X X X X X X X X	Mantisse X X X X X X X X X	Bias
32-Bit	1 Bit	8 Bit	23 Bit	127
64-Bit	1 Bit	11 Bit	52 Bit	1023

+ = 0
- = 1

$$128_{10} = 100000000_2$$

$$1024_{10} = 1000000000000_2$$

$$x = f \cdot b^e$$

$$E = e + \text{Bias}$$

b = Basis

e = Exponent

f = Mantisse

Dezimalsystem $318 = 3.18 \cdot 10^2$

Binärsystem $7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

23.375

$$23 : 2 = 11 \text{ R } 1$$

$$11 : 2 = 5 \text{ R } 1$$

$$5 : 2 = 2 \text{ R } 1$$

$$2 : 2 = 1 \text{ R } 0$$

$$1 : 2 = 0 \text{ R } 1$$

$$10111$$

$$23_{10} = 10111_2$$

$$0.375 \cdot 2 = 0.75$$

$$0.75 \cdot 2 = 1.5$$

$$0.5 \cdot 2 = 1.0$$

$$0.375_{10} = 0.011_2$$

$$23.375_{10} = 10111.011_2$$

Normalisierte Gleitpunktdarstellung

$$10111.011_2$$

$$1.0111011_2 \cdot 2^4$$

$$E = e + 127 = 4 + 127 = 131_{10}$$

$$0100000110111011...$$

↑
+
131₁₀

Fehlerfortpflanzung (relative Fehler/rel. Condzahl.)

1. Addition und Subtraktion Absoluter Fehler x_1 und x_2 addieren sich

$$\frac{\Delta(x_1 \pm x_2)}{x_1 \pm x_2}$$

Falls $x_1 \approx x_2$ und subtrahiert werden, kann Nenner sehr klein werden $\rightarrow$ grosser Fehler (Auslöschung)

2. Multiplikation $\frac{\Delta(x_1 \cdot x_2)}{x_1 \cdot x_2} \approx \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$

Relative Fehler addieren sich

3. Division $\frac{\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\frac{x_1}{x_2}} \approx \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$

Relative Fehler subtrahieren sich

Algorithmus

Eine Sequenz von Rechenschritten zur Lösung eines Problems (approximation)

Stabilität

Algorithmus stabil, wenn kleine Fehler in Eingabedaten nicht stark auf Ergebnis auswirken

Lineare Gleichungen

$Ax = b$ hat genau eine Lösung

A hat vollen Rang n , falls A eine $n \times n$ -Matrix ist

$A \cdot x = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$

A ist invertierbar $\det(A) \neq 0$

A heisst regulär, wenn $\det(A) \neq 0$

sonst A singular

Lösungsverfahren

Direkte Methode $\rightarrow$ Exakte Lösung

LR-Zerlegung

Cholesky-Verfahren

QR-Zerlegung

Gauss-Elimination

Iterative Methode $\rightarrow$ Schrittweises nähern der Lösung durch Iteration

Gauss-Seidel-Verfahren

Gradienten-Verfahren

Residuum

$$\vec{r} = \vec{b} - A \cdot \vec{x}$$

Dreiecksmatrix

Untere Dreiecksmatrix

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} L$$

Obere Dreiecksmatrix

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} R$$

Wenn Diagonaleinträge = 1, heisst normiert.

$$5x + 3y + 7z = 5 \rightarrow x = 1$$

$$2y + 3z = 5 \rightarrow y = 1$$

$$2z = 2 \rightarrow z = 1$$

Rückwärtseinsetzen

Gauss-Elimination ohne Pivotisierung

Matrix $\rightarrow$ Obere Dreiecksmatrix $\rightarrow$ Rückwärtseinsetzen

Gauss-Elimination mit Pivotisierung

Pivotisierung $\rightarrow$ Obere Dreiecksmatrix $\rightarrow$ Rückwärtseinsetzen

Permutationsmatrix

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilen vertauschen

a_{11} darf nicht 0 sein, wenn Hauptdiagonalelement nahe 0 ist, gibt es Fehler!

$$\begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung

$$PA = LR$$

$$\text{Diagonalmatrix } D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3 \\ 1 \\ 2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}I} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{4}II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = R$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot R$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 3 & 6 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 3 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Rückwärtseinsetzen

$$\begin{aligned} x_2 &= -1 - 1 \cdot -3 = 1 \\ -1 & 3 | 1 \quad | -3 \\ -1 & 0 | -2 \quad | -1 \\ x_2 \cdot 1 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_3 \cdot 1 = -3$$

Cholesky-Zerlegung

$$A = L \cdot L^T$$

$$L = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ & \times & 0 \\ & & \times \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ & \times & 0 \\ & & \times \end{pmatrix}$$

Bedingungen:

Symmetrie $A = A^T$

Positiv definit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \det(4) = 4 > 0$$

$$A_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 17 \end{pmatrix} = 64 > 0$$

$$A_3 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} = 576 > 0$$

Positiv definit

$$\begin{pmatrix} |_{11} & 0 & 0 \\ |_{21} & |_{22} & 0 \\ |_{31} & |_{32} & |_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |_{11} & |_{21} & |_{31} \\ 0 & |_{22} & |_{32} \\ 0 & 0 & |_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |_{11}^2 & |_{11}|_{21} & |_{11}|_{31} \\ * & |_{21}^2 + |_{22}^2 & |_{21}|_{31} + |_{22}|_{32} \\ * & * & |_{31}^2 + |_{32}^2 + |_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich!

$$|_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$|_{21} = \frac{a_{12}}{|_{11}} \quad |_{22} = \sqrt{a_{22} - |_{21}^2}$$

$$|_{31} = \frac{a_{13}}{|_{11}} \quad |_{32} = \frac{a_{23} - |_{21} \cdot |_{31}}{|_{22}} \quad |_{33} = \sqrt{a_{33} - |_{31}^2 - |_{32}^2}$$

Lineares Gleichungssystem LGS mit mehr Unbekannten als Gleichungen

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m > n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$A^T A x = A^T b \quad \text{Normalengleichungssystem}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

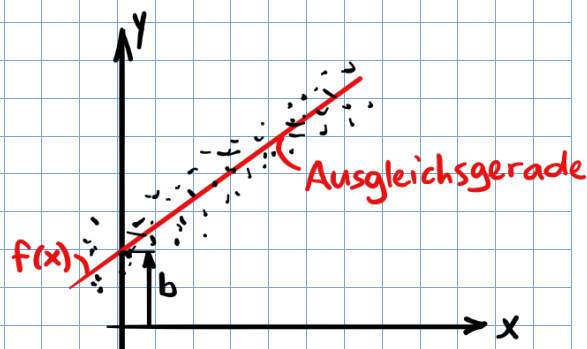
$$A^T \cdot A = \tilde{A} \quad (\text{wird immer quadratisch})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \tilde{b}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Bsp. $f(x) = ax + b$
Ausgleichsfunktion

Bei Messpunkten

x	-1	0	1	2	3	4
y	2	6	7	8	10	12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 31 \end{pmatrix}$$

Summe der Fehlerquadrate (für jeden Punkt)

$$E(f) := \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i))^2 \text{ für } f \text{ minimal}$$

f ist dabei die Ausgleichsfunktion

$$\|y - Ax\|_2^2 \rightarrow \min \quad Ax = y = \text{Fehlergleichungssystem}$$

$$A^T A x = A^T b$$

Bsp. für $f(x) = mx + b$ = Lineare Ausgleichsfunktion

$$\text{Einsetzen in } E(f) = \sum_{i=0}^n (y_i - (mx + b))^2$$

Ableiten nach m und b

$$\frac{\partial E}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

In Matrix Schreibweise:

QR-Zerlegung

$$A = Q \cdot R \quad Q^T = Q^{-1} \quad R = \begin{pmatrix} \triangle & & \\ 0 & \triangle & \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix}$$

$$\text{Bsp. } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$$

$$v_1 = a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonalen $|q_i|$
 $r_{ij} = \frac{v_i^T \cdot q_j}{|q_j|}$

$$v_2 = a_2 - \underbrace{\frac{v_1^T a_2}{\|v_1\|_2^2}}_{\text{Skalarprodukt}} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{(-1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5)}{-1^2 + 2^2 + 2^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

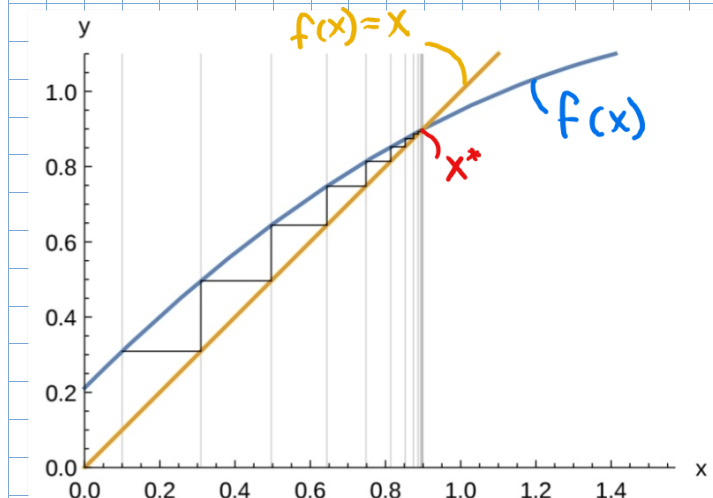
$$v_3 = a_3 - \frac{v_1^T a_3}{\|v_1\|_2^2} v_1 - \frac{v_2^T a_3}{\|v_2\|_2^2} v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(-1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 2)}{-1^2 + 2^2 + 2^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3))}{2^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|_2} = \frac{1}{3} \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+25+16}} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nichtlineare Gleichungen

Fixpunktiteration lösen von Gleichungen in Form $x = f(x)$

Fixpunkte von f sind Schnittpunkte des Graphen f mit Gerade $y=x$

$x^* = \text{Fixpunktstelle}$



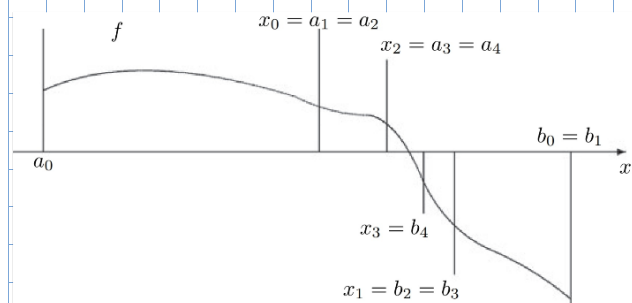
$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \end{aligned}$$

Banachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K \cdot |x_1 - x_2|,$$

Intervallhalbierungsverfahren - Bisektion

$x_m = \frac{a+b}{2}$ $f: [a, b]$ stetige Funktion $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen



Iterationsschritt k	Näherungswert x_k	$f(x_k)$	linker Rand a_k	rechter Rand b_k
0	-0.2	0.988 > 0	-1.5	1.1
1	0.45	0.809 > 0	-0.2	1.1
2	0.775	0.249 > 0	0.45	1.1
3	0.9375	-0.232 < 0	0.775	1.1
4	0.856		0.775	0.9375
$\vdots$	$\vdots$			

Newtonsches Tangentenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Bsp. $f(x) = -x^3 - 4x + 10 = 0$

Tabelle

x	-1	0	1	2	3
y	15	10	5	-6	-29

Nullstelle zwischen $x=1$ und $x=2$

$$f'(x) = -3x^2 - 4$$

$$x_{n1} = 1 - \frac{-1^3 - 4 \cdot 1 + 10}{-3 \cdot 1^2 - 4} = 1.71428$$

$$x_{n2} = 1.71428 - \frac{-1.71428^3 - 4 \cdot 1.71428 + 10}{-3 \cdot 1.71428^2 - 4} = 1.5676$$

$\vdots$

$$x_n = 1.5567 \dots$$

Nichtlineare Gleichungssysteme

Gleichungssystem aus mehreren Gleichungen, bei denen mind. 1. Gl. nichtlinear ist

Bsp. $\begin{cases} 6x = \cos(x) + 2y \\ 8y = xy^2 + \sin(x) \end{cases}$ Gesucht ist ein Punkt (x, y) , der beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt

Approximative Lösung

Nullstellenproblem

$$\vec{f}(x) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 6x = \cos(x) + 2y \\ 8y = xy^2 + \sin(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos(x) + 2y - 6x = 0 : f_1(x, y) \\ xy^2 + \sin(x) - 8y = 0 : f_2(x, y) \end{cases}$$

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) + 2y - 6x \\ xy^2 + \sin(x) - 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix/Funktionalmatrix

$$J_f(\vec{x}) = Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{Für Bsp. } J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) - 6 & 2 \\ x_2^2 + \cos(x_1) & 2x_1x_2 - 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Linearisieren funktion $f(x)$ an Punkt x_0 durch gerade annähern mit

In mehreren Dimensionen

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &\approx f(\vec{x}^{(0)}) + J_f(\vec{x}^{(0)}) (\vec{x} - \vec{x}^{(0)}) \\ f(\vec{x}) = 0 &\rightarrow f(\vec{x}^{(0)}) + J_f(\vec{x}^{(0)}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^{(0)}) = 0 \\ J_f(\vec{x}^{(0)}) \cdot \vec{\delta}^{(0)} &= -f(\vec{x}^{(0)}) \end{aligned}$$

Abbruchkriterium

$$1. \|f(\vec{x}^{(n)})\|_2 \leq \text{TOL}$$

$$2. \|\vec{x}^{(n+1)} - \vec{x}^{(n)}\| = \|\vec{\delta}^{(n)}\|_2 \leq \text{TOL}_2$$

1. Gleichungssystem

2. Umformen zu Nullstellenproblem

3. Jacobi Matrix berechnen

4. Newton Verfahren

5. Startwert wählen $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

6. $\vec{f}(x^{(0)}, y^{(0)})$ berechnen

7. Jacobi Matrix an $\vec{x}^{(0)}$ auswerten

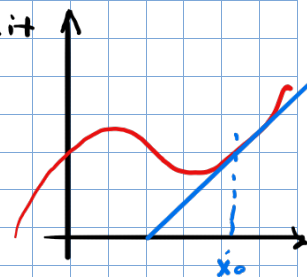
8. LGS Lösen $\rightarrow \Delta x$

$$J_f \cdot \vec{\delta} = -f$$

9. Neues x berechnen

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \vec{\delta}$$

10. Schritt 5-9 Wiederholen



Nichtlineare Ausgleichsrechnung

Messdaten gegeben

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	0	1	2	
b_i	1	2.7	7.4	

Funktionsansatz gegeben $f(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x^2} + \lambda_3 \cdot x$

Suchen λ_0, λ_1

Jacobi-Matrix/Funktionalmatrix

$$J_f(\vec{x}) = Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ableitungen nach den Parametern

$$J_f = \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x_i^2} & \lambda_1 x_i^2 e^{\lambda_2 x_i^2} & x_i \end{pmatrix}$$

Residuum $r_i = b_i - f(x_i, \lambda)$

Anfangsschätzung λ^0

$$\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0.1 \\ \lambda_3 = 1$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.7 \\ 7.4 \end{pmatrix}$$

$$f(0) = 1 \cdot e^{0.1 \cdot 0^2} + 1 \cdot 0 = 1 \\ f(1) = 1 \cdot e^{0.1 \cdot 1^2} + 1 \cdot 1 = 2.105 \\ f(2) = 1 \cdot e^{0.1 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2 = 3.918$$

Berechneter Wert mit
Aktuellem λ

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.595 \\ 3.9082 \end{pmatrix}$$

$$J_F = \begin{pmatrix} e^{0.1 \cdot 0^2} & 1 \cdot 0^2 \cdot e^{0.1 \cdot 0^2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.105 & 1.105 & 1 \\ 1.4918 & 5.9672 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_F^T(\lambda^k) \cdot J_F(\lambda^k) \cdot S^{(k)} = J_F(\lambda^k) \cdot r(\lambda^k)$$

Nach S^k auflösen

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x^2} \\ \lambda_1 x^2 e^{\lambda_2 x^2} \\ + \end{pmatrix}_{J_F^T} \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x^2} & \lambda_1 x^2 e^{\lambda_2 x^2} & + \end{pmatrix}_{J_F} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x^2} \\ \lambda_1 x^2 e^{\lambda_2 x^2} \\ + \end{pmatrix}_{J_F^T} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.595 \\ 3.9085 \end{pmatrix}_r$$

Gem. Aufgabenstellung mit LR, Cholesky oder Gauss

$$\lambda^1 = \lambda^0 + S^0$$

Iterieren bis genug genau

Skalarfeld ist eine Funktion, jedem Punkt im Raum wird eine Zahl zugeordnet.

$$f(x, y, z) = x^2 + y + 2z \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Vektorfeld ist eine Funktion, jedem Punkt im Raum einen Vektor zuordnet.

$$\vec{F} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Gradient eines Skalarfeldes ist ein Vektorfeld mit Stärkster Steigung

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \\ \frac{df}{dz} \end{pmatrix} \quad f(x, y) = x^2 + y = \nabla f \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Interpolation

Gleichungssystem Polynomfkt. gegeben, gesucht a_n

$n+1$ Punkte $\rightarrow$ n Polynom

$$P(x) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Lagrange

Bsp.

i	0	1	2
x_i	1	3	4
f_i	1	2	4

$$l_i = \prod_{k=0}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

3 Punkte $\rightarrow$ Grad 2

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$P(x) = \sum_0^2 f_i \cdot l_i(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + f_2 l_2(x)$$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 3)(x - 4)}{(1 - 3)(1 - 4)} = \underline{\underline{\frac{1}{6}(x^2 - 7x + 12)}}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 4)}{(3 - 1)(3 - 4)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)}}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(4 - 1)(4 - 3)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)}}$$

$$\text{Interpolationspolynom: } P(x) = 1 \cdot \underline{\underline{\frac{1}{6}(x^2 - 7x + 12)}} + 2 \cdot \underline{\underline{-\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)}} + 4 \cdot \underline{\underline{\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2}}$$

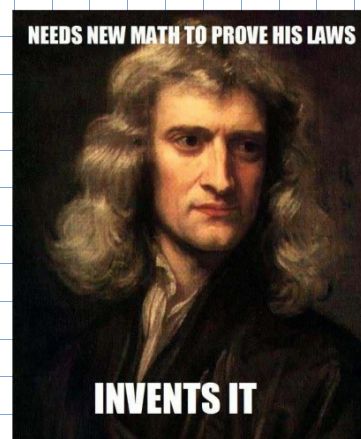
Newton

Außer Werte nehmen

x_i	1	2	3
y_i	3	2	6

$$\begin{array}{c|c} x_i & y_i \\ \hline 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \backslash \quad \frac{2-3}{2-1} = -1 \\ \backslash \quad \frac{4-(-1)}{3-1} = 2.5 \\ \backslash \quad \frac{6-2}{3-2} = 4 \end{array}$$

$$P(x) = 3 + (-1)(x-1) + 2.5(x-1)(x-2) = 2.5x^2 - 8.5x + 9$$



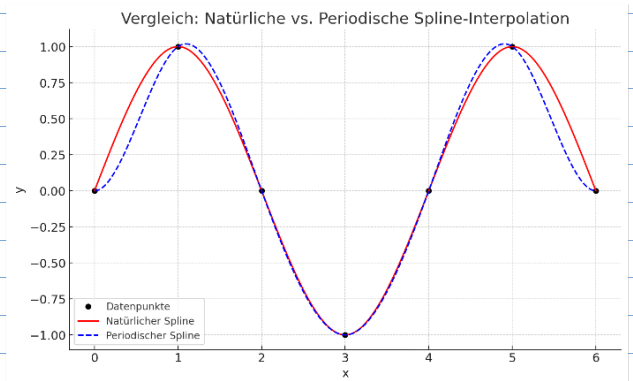
Spline-Interpolation

Gegeben Wertetabelle

Periodisch Interpolierende Spline-Fkt.

$$S_k(x_0) = S_k(x_n), S_k'(x_0) = S_k'(x_n), S_k''(x_0) = S_k''(x_n)$$

M_0 M_5



Natürlich Interpolierende Spline-Fkt.

$$S_k(x_0) = S_k(x_n), S_k'(x_0) = S_k'(x_n), S_k''(x_0) = S_k''(x_n) = 0$$

M_0 M_5

Natürlicher Spline $M_0 = M_5 = 0$

Ansatz Funktion:

$$p_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x-x_i) + \gamma_i(x-x_i)^2 + \delta_i(x-x_i)^3$$

Schritt: $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - h_0 M_0 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 - h_4 M_5 \end{pmatrix}$$

$M_0 = S''(x_0)$
 $M_5 = S''(x_n)$ Randwertinformation

$$C_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}), \alpha_i = y_i, \beta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6}h_i, \gamma_i = \frac{1}{2}M_i, \delta_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$$

Bsp.

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	-11	-2	3	22

$$h = x_{i+1} - x_i \rightarrow 2 - 1 = 1$$

$$C_1 = \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) = \frac{6}{1}(3 - (-2)) - \frac{6}{1}(-2 - (-11)) = -24$$

$$C_2 = \frac{6}{h_2}(y_3 - y_2) - \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) = \frac{6}{1}(22 - 3) - \frac{6}{1}(3 - (-2)) = 84$$

LGS aufstellen

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - h_0 M_0 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$i=0, \alpha_0 = y_0 = -11, \beta_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{2M_0 + M_1}{6}h_0 = \frac{-2 - (-11)}{1} - \frac{2 \cdot 0 - 12}{6} \cdot 1 = 11, \gamma_0 = \frac{1}{2}M_0 = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0, \delta_0 = \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = \frac{-12 - 0}{6 \cdot 1} = -2$$

$$p_0(x) = -11 + 11(x - (-1)) - 2(x - (-1))^3 = -2x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$

$$p_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x-x_i) + \gamma_i(x-x_i)^2 + \delta_i(x-x_i)^3$$

Numerische Verfahren für AWP Approximative Lösung von AWP gewöhnlicher DGL

Integrationsmethode Geg. $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ Einschrittverfahren

Explizites Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y(x_k))$$

Bsp. $y' = -y = f(x, y)$, $x_0 = 0, y_0 = 1.8$

$$h = 0.5 \quad x_1 = x_0 + h \\ x_1 = 0 + 0.5 = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.8 + 0.5 \cdot (-1.8) = 0.9$$

$$x_2 = 1, y_2 = 0.9 + 0.5 \cdot (-0.9) = 0.45$$

Damit explizites Euler-Verfahren stabil
→ muss h hinreichend klein sein!

Bsp. $y'(x) = \lambda \cdot y(x) \rightarrow y(x) = e^{\lambda x}$

$$\vdots \quad \text{Stabilitätsbedingung} \\ |1 + h\lambda| < 1 \leftrightarrow h < \frac{2}{|\lambda|}$$

Implizites Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Bsp. $y' = -y = f(x, y)$, $x_0 = 0, y_0 = 1.8$

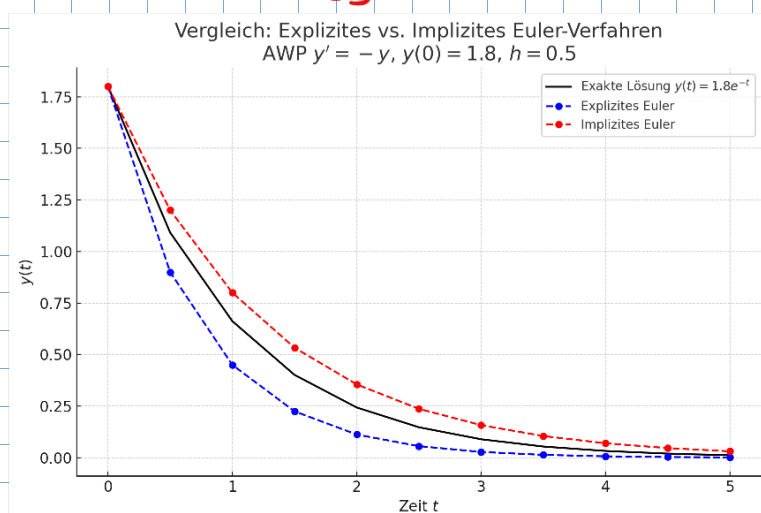
$$h = 0.5 \quad x_1 = x_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot \underbrace{f(x_1, y_1)}_{y(x) = -y} = h(-y_1)$$

$$y_1 + h \cdot y_1 = y_0 \leftrightarrow y_1(1 + h) = y_0 \rightarrow y_1 = \frac{y_0}{1 + h} = \frac{1.8}{1 + 0.5} = 1.2$$

Mit irgend einem Verfahren lösen (Newton)

Immer stabil → unabhängig von h



Explizites zweistufiges Runge-Kutta verfahren

$$i=0 \begin{cases} k_1 = f(t_0, y_0) = 1 - \frac{2 \cdot 0}{1} = 1 \\ k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1) = f(0 + \frac{0.2}{2}, 1 + \frac{0.2}{2} \cdot 1) = 1.1 - \frac{2 \cdot 0.1}{1.1} = 0.9181 = A \\ y_1 = y_0 + h \cdot k_2 = 1 + 0.2 \cdot 0.9181 = 1.1836 \end{cases} \quad t_0 = 0, y_0 = 1$$

$$t_1 = 0.2, y_1 = 1.1836 = A$$

$$i=1 \begin{cases} k_1 = f(t_1, y_1) = 1.1836 - \frac{2 \cdot 0.2}{1.1836} = 0.8457 = B \\ k_2 = f(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot k_1) = f(0.2 + \frac{0.2}{2}, 1.1836 + \frac{0.2}{2} \cdot 0.8457) = 1.2682 - \frac{2 \cdot 0.3}{1.2682} = 0.7951 = D \\ y_2 = y_1 + h \cdot k_2 = 1.1836 + 0.2 \cdot 0.7951 = 1.3427 \end{cases} \quad 1.2682 = C$$

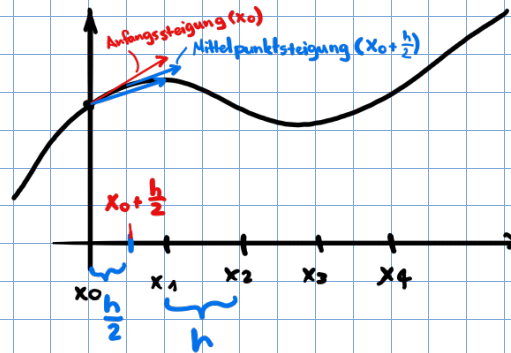
Mittelpunktsregel

Nimmt Steigung in der Mitte des Intervalls

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot k_2$$



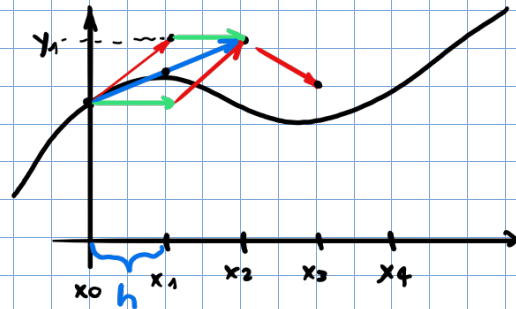
Verfahren von Heun

Mittelwert aus Steigung am Anfang und am Ende

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + h, y_i + h \cdot k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (k_1 + k_2)$$



Klassisches vierstufige Runge-Kutta-Verfahren

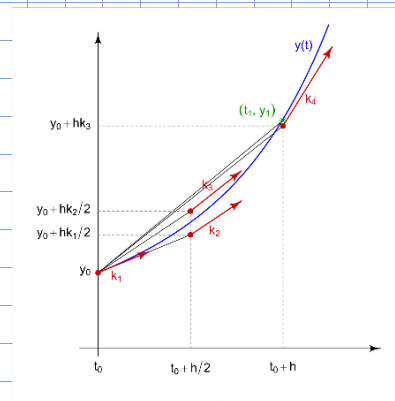
$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + h \cdot k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$



Bsp. $y'(t) = y - \frac{2t}{y}$, $y(0) = 1$, $[a, b] = [0, 1]$, $h = 0.2$

Euler $i=0$ $y_1 = y_0 + 0.2(y_0 - \frac{2 \cdot 0}{y_0}) = 1 + 0.2(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}) = 1.2$

$i=1$ $y_2 = y_1 + 0.2(y_1 - \frac{2 \cdot 0.2}{y_1}) = 1.2 + 0.2(1.2 - \frac{2 \cdot 0.2}{1.2}) = 1.3733$

Heun $t_0 = 0$, $y_0 = 1$

$$i=0 \begin{cases} k_1 = f(t_0, y_0) = 1 - \frac{2 \cdot 0}{1} = 1 \\ k_2 = f(t_0 + h, y_0 + h \cdot k_1) = f(0.2, 1 + 0.2 \cdot 1) = 1.2 - \frac{2 \cdot 0.2}{1.2} = 0.8666 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) = 1 + \frac{0.2}{2} (1 + 0.8666) = 1.1867 \end{cases}$$

$t_1 = 0.2$, $y_1 = 1.1867 = A$

$$i=1 \begin{cases} k_1 = f(t_1, y_1) = 1.1867 - \frac{2 \cdot 0.2}{1.1867} = 0.8496 = B \\ k_2 = f(t_1 + h, y_1 + h \cdot k_1) = f(0.4, 1.1867 + 0.2 \cdot 0.8496) = 1.3566 - \frac{2 \cdot 0.4}{1.3566} = 0.7669 = D \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) = 1.1867 + \frac{0.2}{2} (0.8496 + 0.7669) = 1.3483 \end{cases}$$

i	t _i	Euler y _i	Heun y _i	Runge y _i
0	0	1.0000	1.0	1.0
1	0.2	1.2000	1.1867	1.1836
2	0.4	1.3733	1.3483	1.3426