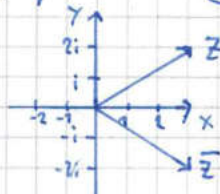


Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1$$



$$\mathbb{C} \rightarrow \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

 $x = \text{Realteil}, y = \text{Imaginärteil}$

$$\operatorname{Re}(z) = x \rightarrow \text{Realteil}$$

$$\operatorname{Im}(z) = y \rightarrow \text{Imaginärteil}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Konjugiert komplexe Zahl

$$\begin{aligned} z &= x + yi && \left. \begin{array}{l} \text{imaginärteil} \\ \text{invertiert} \end{array} \right\} \\ \bar{z} &= x - yi \end{aligned}$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Koordinatensysteme

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{kartesisch}}$$

$$\underbrace{r \operatorname{cis}(\varphi), \text{ bzw. } r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{\text{Polar}}$$

für Winkel $> 360^\circ$ oder $> 0^\circ$
 nur für Aufgaben: Löse die gl.

$$\underbrace{r \cdot e^{i\varphi}}_{\text{Exponentialform}} + k \cdot 2\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} z^n &= r^n e^{i\varphi + k \cdot 2\pi i} \\ z &= \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi}{n} + \frac{k \cdot 2\pi i}{n}} \\ n &= \text{Anz. Ecken} \end{aligned}$$

Polar $\rightarrow$ kartesisch

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

kartesisch $\rightarrow$ polar

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{wenn } y > 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{wenn } y < 0 \\ \text{undef.} & \text{wenn } x = y = 0 \end{cases} \quad \text{in rad}$$

$$\begin{aligned} r_{\text{polar}} &= r_{\text{exp}} \\ \varphi_{\text{polar}} &= \varphi_{\text{exp}} \end{aligned}$$

Rechnen in $\mathbb{C}$ Addition/Subtraktion $\rightarrow$ kartesisch

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

komplexer Logarithmus

$$r e^{i\varphi} \xrightarrow{\ln} \ln(r) + i\varphi$$

Multiplikation/Division $\rightarrow$ exp-form

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\varphi_2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Potenzen $\rightarrow$ exp-form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \rightarrow z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i\varphi \cdot n}$$

Vektoren und Matrizen

Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot x \rightarrow \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bei Matrizen}} \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Länge von Vektoren: $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \dots}$

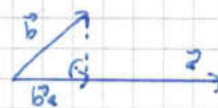
Skalarprodukt: $\underbrace{w \cdot z}_{(w,z)} = w_1 \cdot z_1 + w_2 \cdot z_2 + \dots \rightarrow \text{bei } 90^\circ = 0$

Normierter Vektor: $e_x = \frac{1}{\|x\|} \cdot x$

Winkel zwischen Vektoren: $\alpha = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$

Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{pmatrix}$

Orthogonalprojektion

$$\vec{b}_a = \frac{a \cdot b}{|a|^2} \cdot a$$


Matrix mal Vektor

↳ nur möglich, wenn die Matrix so breit wie der Vektor lang ist!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

Matrixaddition

↳ nur möglich, wenn die Matrizen gleich gross sind!

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

↳ nur möglich, wenn die Matrix 1 so breit wie Matrix 2 lang ist!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

↳ Achtung: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Komplexe Vektoren

↳ dieselben Regeln, jeder komplexe Vektor ist ein eigener Vektor, $i \rightarrow$ "Einheit"

Abstände Punkt-Vektor

$$P = (P_x, P_y, P_z), \vec{p} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \vec{q} + \lambda \cdot \vec{v}$$

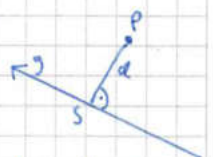
$$d = \frac{\|(\vec{p} - \vec{q}) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \rightarrow \text{berechnen:}$$

1) $S = (\vec{q}_x + \lambda \vec{v}_x, \vec{q}_y + \lambda \vec{v}_y, \dots)$

2) $\vec{p}_S = \vec{S} - \vec{p}$

3) $\vec{p}_S \cdot \vec{v} = 0$ setzen, auflösen

4) λ in S einsetzen



Lineare Gleichungssysteme

Allgemeines LGS: $A \cdot x = b$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & \dots & x_m & \\ a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}$$

Gauss-Algorithmus

→ LGS in Zeilenstufenform bringen

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \xrightarrow{\text{umformen}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}$$

↑ Pivotenelemente

$n = \text{Anz. Variablen } (x_1, x_2, \dots)$

$r = \text{Anz. Pivotenelemente}$

$n - r = \text{Anz. freie Variablen} = \text{rang der Matrix}$

Lösungsnotation:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Zahl 1} \\ \text{Zahl 2} \\ \vdots \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \text{Zahl 1} \\ \text{Zahl 2} \\ \vdots \end{pmatrix} + s \dots$$

Kern von Matrizen

$$\ker(A) = \text{Lösung von } A \cdot x = 0$$

→ ebenfalls gaussen, nur b durch 0 ersetzen

LU-Zerlegung

$$A = L \cdot U$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 25 & -18 & -13 \\ -15 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} ② - 5① \\ ③ + 3① \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 5 & -3 & -3 \\ -12 & -8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} ② - ① \\ ③ - (-4)① \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 5 & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

→ Gaussen, Operationen jedoch beibehalten

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$$

→ $Ly = b \rightarrow$ Vorwärtseinsetzen

$Ux = y \rightarrow$ Rückwärtseinsetzen

LU-Zerlegung mit Zeilenvertauschungen

$$P \cdot A = L \cdot U$$

$Ly = P \cdot b \rightarrow$ Vorwärtseinsetzen

$Ux = y \rightarrow$ Rückwärtseinsetzen

→ wenn Zeilen beim Gaussen vertauscht werden, müssen dieselben Zeilen in P vertauscht werden.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

Matrizen und Lineare Gleichungssysteme

Transponierte Matrix

↳ Spalten/Zeilen tauschen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Rechenregeln:

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad (A^T)^T = A$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Adjungierte Matrix

↳ 1. Transponieren

2. Elemente komplex konjugieren
(Im-teil $\rightarrow -i$ (ins- bzw + setzen))

Rechenregeln Adjungierter Matrizen

$$(A+B)^* = A^* + B^* \quad (A^*)^* = A$$

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} \cdot A^* \quad \nabla \lambda \text{ (komp. konj!)} \quad (AB)^* = B^* \cdot A^*$$

Spur = Summe der Matrixelemente der Diagonalen ↘

Symmetrische Matrizen $\rightarrow A^T = A$

Antisymmetrische Matrizen $\rightarrow A^T = -A \leftarrow$ diagonale muss aus 0 bestehen!

Hermitesche Matrix $\rightarrow A^* = A \leftarrow$ diagonale reell, ob. Hälfte kompl. konj.

Anti-hermitesche Matrix $\rightarrow A^* = -A \leftarrow$ diagonale imaginär, reilte invertiert

Normalengleichung (Lineare Ausgleichsrechnung)

↳ Voraussetzung: $A \cdot x = b$ überbestimmt ($A^{m \times n}, m > n$)

$$\underbrace{A^T \cdot A}_{\text{sym.}} \bar{x} = A^T b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \rightarrow A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \quad A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h & i \\ q & r & u \\ s & t & v \end{bmatrix}$$

Determinante von Matrizen

von 2x2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(a_1, a_2) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

von 3x3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Laplacescher Entwicklungssatz

bsp. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ Entwickeln nach Spalte 3 / Zeile 4

$$\det(A) = (-1)^{\text{Zeile} + \text{Entw. Spalte}} \cdot a_{\text{Zeile, Spalte}} \cdot A^{k,l}$$

$$\rightarrow \det(A) = (-1)^{4+3} \cdot 2 \cdot A'$$

↑

$A^{k,l} = A$ mit entw. Zeile / Spalte gestrichen

$$A^{k,l} = A \text{ mit entw. Zeile / Spalte gestrichen}$$

falls Entw. Zeile / Spalte mehr als eine Zahl > 0 hat

Rechenregeln (Determinanten)

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$\det(U)$ Produkt der Diagonalelemente (nach LU-Zerlegung)

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$\det(L)$ Produkt der Diagonalelemente (nach LU-Zerlegung)

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$$

Determinante mit LU-Zerlegung

$$P \cdot A = L \cdot U$$

$$\hookrightarrow \det(P) \cdot \det(A) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \cdot \det(U)$$

$\hookrightarrow$ Produkt der diagonalen ($U_{11} \cdot U_{22} \cdot U_{33} \cdot U_{44} \dots$)

$$\det(A) = (-1)^P \cdot \det(U), \quad P = \text{Anz. Verschiebungen}$$

Inverse Matrizen

Bedingung für Invertierbarkeit:

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow \text{vorherige Seite}$$

$$\text{rang}(A) = n \rightarrow \text{Matrix ist quadratisch}$$

Invertieren von 2x2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rechenregeln (Matrixinversion)

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad A \cdot A^{-1} = I$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Rechenreihenfolge beachten

$$\text{z.B. } AX + BB^T = C \quad | -BB^T$$

$$AX = C - BB^T \quad | \cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot (C - BB^T) \quad !$$

Gauss-Jordan-Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Gauss-} \\ \text{Algorithmus} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Gauss-
Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

"Von unten nach oben"

↳ oberhalb der Pivot-Elemente
Nullen erzeugen