Algebraische Funktionen:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$C1\sin(wt) + C2\cos(wt)$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

Multiplikation von Funktionen

$$\sin(\phi)\cdot\sin(\psi) = \frac{1}{2}\cdot\{\cos(\phi-\psi) - \cos(\phi+\psi)\}$$

$$\cos(\phi)\cdot\cos(\psi) = \frac{1}{2}\cdot\{\cos(\phi+\psi) + \cos(\phi-\psi)\}$$

$$\sin(\phi)\cdot\cos(\psi) = \frac{1}{2}\cdot\{\sin(\phi+\psi) + \sin(\phi-\psi)\}$$

x: Abszisse
y: Ordinate

Doppelwinkelformel:

$$\boxed{\sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos(2\cdot\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin\left(x \mp \frac{\pi}{2}\right) = \mp\cos(x)$$

Goniometr. Gleichung:

x =… und π-x =…

Winkeladditionsformel:

$$\cos(\phi+\psi) = \cos(\phi)\cdot\cos(\psi) - \sin(\phi)\cdot\sin(\psi)$$

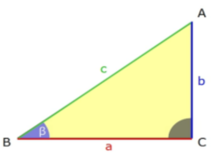
$$\sin(\phi+\psi) = \cos(\phi)\cdot\sin(\psi) + \cos(\psi)\cdot\sin(\phi)$$

$$\tan(\phi+\psi) = \frac{\tan(\phi)+\tan(\psi)}{1-\tan(\phi)\cdot\tan(\psi)} \qquad \cot(\phi+\psi) = \frac{\cot(\phi)\cdot\cot(\psi)-1}{\cot(\phi)+\cot(\psi)}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c}$$

$$\tan(\beta) = \frac{b}{a}$$



Taylor Approximation:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \dots$$

Bis 3 grad = bis x^3

(Zu $a(1+b)^p$ wandeln , b<1,p = Potenz)

Potenzreihe Restglied:

- $f^{(n+1)}(\xi)$: die $(n+1)$-te Ableitung von f, **ausgewertet bei einem unbekannten Punkt** ξ zwischen a und x
- $(n+1)!$: Fakultät, also z. B. $3! = 6$
- $(x-a)^{n+1}$: der Abstand von x zum Entwicklungspunkt a, hoch $n+1$

$$f(x) = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Potenzreihe}} + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\cdot\underbrace{(x-x_0)^{n+1}}_{\text{nächstes Element der Potenzreihe}}}^{\text{Restglied}}.$$

Konvergenzradius:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} |a_k/a_{k+1}|.$$

Um zu bestimmen, für welche x die Reihe **konvergiert**, nutzt man den **Konvergenzradius** ρ. Das **Quotientenkriterium** hilft dabei.

Hyperbolische Funktionen:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Inversen:

Area Cosinus hyperbolicus:

$$\mathrm{arcosh(x)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in [1, +\infty)$$

Area Sinus hyperbolicus:

$$\mathrm{arsinh(x)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Area Tangens hyperbolicus:

$$\mathrm{artanh(x)} = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad x \in (-1, +1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C, \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{artanh(x)} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arsinh(x)} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arcosh(x)} + C.$$

Taylorreihen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Taylorreihen

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} -$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3$$

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5040$

$8! = 40320$
$9! = 362880$
$10! = 3628800$
$11! = 39916800$
$12! = 479001600$
$13! = 6227020800$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Multiplikation von Potenzreihen:

Potenzreihen multiplizieren:

$q(x) \backslash p(x)$	a_0	a_1	a_2	a_3	…
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0	
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1		
b_2	a_0b_2	a_1b_2			
b_3	a_0b_3				
⋮					

$$p(x)\cdot q(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \dots$$

Potenzreihen Dividieren

$$\frac{q(x)}{p(x)} = a(x)$$

$$q(x) = a(x)\cdot p(x)$$

$a(x) \backslash p(x)$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
a_0	$P_0\cdot a_0$	$P_1\cdot a_0$	$P_2\cdot a_0$	$P_3\cdot a_0$	$P_4\cdot a_0$
a_1	$P_0\cdot a_1$	$P_1\cdot a_1$	$P_2\cdot a_1$	$P_3\cdot a_1$	$P_4\cdot a_1$
a_2	$P_0\cdot a_2$	$P_1\cdot a_2$	$P_2\cdot a_2$	$P_3\cdot a_2$	$P_4\cdot a_2$

$q_0 = p_0\cdot a_0 \longrightarrow a_0 =$

$q_1 = p_0\cdot a_1 + p_1\cdot a_0 \longrightarrow a_1 =$

$q_2 = p_2\cdot a_0 + p_1\cdot a_1 + p_0\cdot a_2 \longrightarrow a_2 =$

Newtonsches Tangentenverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ableitungsregeln:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = a\cdot x^n \Rightarrow f'(x) = a\cdot n\cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = u+v \Rightarrow f'(x) = u'+v'$$

$$f(x) = u\cdot v \Rightarrow f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

Kettenregel:

$f(x) = (\,x^n\,)^n$ — Innerer und Äusserer Teil einzeln Ableiten

a = $(b)^n$ — b = x^n

a' = $n(b)^{n-1}$ — b' = nx^{n-1}

$f'(x) = a'(b) * b'$ — In diese Formel einsetzen

Bernoulli-L'Hospital Regel

Die **L'Hospital-Regel** wird verwendet, wenn ein Grenzwert die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ hat:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Voraussetzungen:

- ✅ $f(x)$ und $g(x)$ sind differenzierbar
- ✅ $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder $\pm\infty/\pm\infty$
- ✅ Die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ existieren und bilden einen bestimmten Grenzwert

Aufleitungsregeln/Integrieren

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int a\cdot x^n\,dx = a\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$$

Zweite Substitutionsregel:

$$\int f(x)\,dx \quad \text{mit } x = \varphi(y) \Rightarrow dx = \varphi'(y)\,dy$$

$$\Rightarrow \int f(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)\,dy\,\Big|_{x=\varphi(y)}$$

Integrand enthält	Setze
$f(g(x))\cdot g'(x)$	$u = g(x)$
$(ax+b)^n$, $\ln(ax+b)$, e^{ax+b}	$u = ax+b$
$f'(x)\cdot f(x)^n$	$u = f(x)$
$x\cdot\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin(\theta)$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan(\theta)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec(\theta)$
$\frac{1}{x\ln(x)}$, $\ln(\ln(x))$	$u = \ln(x)$ oder $u = \ln(\ln(x))$
$e^{f(x)}\cdot f'(x)$	$u = f(x)$
Trigonometrisches Produkt (z.B. $\sin x\cos x$)	$u = \sin(x)$ oder $u = \cos(x)$

Partielle Integration:

Einfach Integrierbar

$$\int u\cdot v'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

Einfach Ableitbar

Erste Substitutionsregel:

$u = \square$

$$\frac{du}{dx} = u'$$

Grenzen anpassen: Einsetzen in $\square$

Partialbruchzerlegung:

Faktor in Nenner	Teilbruch-Form
Linearfaktor $(x-a)$	$\frac{A}{x-a}$
Mehrfache Linearfaktoren $(x-a)^n$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
Quadratische Faktoren (x^2+bx+c)	$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$
Mehrfache quadratische Faktoren $(x^2+bx+c)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}$

Formel von **Newton** Taylorpolynom

von $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{a}}$ in $x_0 = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot x^k,$$

$$|x| < 1$$

$$bis\ |T(x)| > Anford.$$

$$\sqrt[z]{x} = \sqrt[z]{y\,\frac{x}{y}} = \sqrt[z]{y} * \sqrt[z]{\frac{x}{y}}$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = \alpha\cdot x$$

$$T_2(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2$$

$$T_3(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\cdot x^3$$

$$T_4(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\cdot x^4$$

$$T_5(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{5!}\cdot x^5$$

Trigonometrische Identitäten:

① $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

② $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

③ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

④ $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Hyperbolische Identitäten:

① $1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$

② $\sinh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x)-1)$

$\cosh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x)+1)$

③ $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

④ $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$

$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$

Sinussatz (WWS, WSW, SWS):

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Cosinussatz (SWS, SSS):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\gamma)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos(\beta)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\alpha)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Sinus- und Cosinuswerte

Grad	Radiant	sin(x)	cos(x)
0°	0	0	1
30°	π/6	1/2	√3/2
45°	π/4	√2/2	√2/2
60°	π/3	√3/2	1/2
90°	π/2	1	0
120°	2π/3	√3/2	−1/2
135°	3π/4	√2/2	−√2/2
150°	5π/6	1/2	−√3/2
180°	π	0	−1
210°	7π/6	−1/2	−√3/2
225°	5π/4	−√2/2	−√2/2
240°	4π/3	−√3/2	−1/2
270°	3π/2	−1	0
300°	5π/3	−√3/2	1/2
315°	7π/4	−√2/2	√2/2
330°	11π/6	−1/2	√3/2
360°	2π	0	1

Natürlichen Wachstum DGL

$$y'(x) = a\cdot y(x)$$

$$y(x) = C\cdot e^{ax}$$

Homogene Lineare DGL:

DGL: $y'' + a\,y' + b\,y = 0$ **Charakter. Gl.:** $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Reelle einfache Wurzeln: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$

Reelle doppelte Wurzel: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$

Komplexe Wurzeln: $\lambda = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$

Startansatz: $y = e^{\lambda x}$ **Diskriminante:** $\Delta = a^2 - 4b$

Mit Konstanten Koeffizienten DGL
Harmonische DGL

$$y'' + a^2y = 0$$

$$y(x) = C_0\cdot\cos(a\cdot x) + C_1\cdot\sin(a\cdot x).$$

Antiharmonische DGL

$$y'' + a^2y = 0$$

$$y(x) = C_0\cdot\cosh(a\cdot x) + C_1\cdot\sinh(a\cdot x).$$

Potenzreihen methode $(=\cos(x), e^x, \ln(x))$

$$y''(x) + y'(x) = \dots$$

$$y(x) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 + 6a_6t^5$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 + 30a_6t^4$$

$$= \overset{y'''(x)+y(x)}{(\quad)} + \overset{y''(x)+y'(x)}{(\quad)} + \overset{y''(x)+y'''(x)}{(\quad)} + \dots$$

$$= \quad C_0 \qquad C_1 \qquad C_2 \quad \dots$$

$= C_0$ $= C_1$ $= C_2$

Lineare Inhomogene DGL (DGL Elementare Ansatzmethode)

$$y'(x) + b\,y(x) = cx^2 + dx + e$$

Homogener Teil: $y'(x) = -b\,y(x)$

$$y(x) = C_1e^{-bx}$$

Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= Ax^2 + Bx + C \\ P'(x) &= 2Ax + B \end{aligned}\right\} \overset{y'(x)+by(x)}{=} (2Ax+B) + b(Ax^2+Bx+C)$$

$$= (bA)x^2 + (bB+2A)x + (B+C)$$

$$= c\cdot x^2 + d\cdot x + e$$

$bA = c$ — $bB+2A = d$ — $B+C = e$

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C + C_1\cdot e^{-bx}$$

- Richtiger Ansatz für $y_p(x)$ je nach rechter Seite:
  - $f(x) = x^n \to y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots$
  - $f(x) = e^{ax} \to y_p = Ae^{ax}$
  - $f(x) = \sin(kx)$ oder $\cos(kx) \to y_p = A\cos(kx) + B\sin(kx)$
  - $f(x) = x^ne^{ax} \to y_p = (Ax^n + \dots)e^{ax}$
  - $f(x) = x^n\sin(kx) \to y_p = (Ax^n + \dots)(\cos(kx) + \sin(kx))$