

Standartbasis :

Vektoren:

Im $\mathbb{R}^n$ besteht die Standardbasis aus den Einheitsvektoren:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Jeder dieser Vektoren hat genau eine 1 an einer bestimmten Stelle und sonst 0.

Matrizen:

Für den Raum der 2×2 -Matrizen ist die Standardbasis:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jede 2×2 -Matrix kann als Linearkombination dieser Basis geschrieben werden.

Funktionen:

Im Raum der Polynome bis Grad n , also P_n , ist die Standardbasis:

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad \dots, \quad f_n(x) = x^n.$$

Ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ kann mit dieser Basis als

$$p(x) = a_0f_0(x) + a_1f_1(x) + \dots + a_nf_n(x)$$

geschrieben werden.

Basis von Matrizen finden:

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Vektorisieren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lineare Abhängigkeit:

$$\vec{c} = 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$$

$\rightarrow C$ ist linear abhängig, wird gestrichen

Zwischenergebnis:

$\{A, B\}$ ist linear unabhängig

Ergänzen zur Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ (dim = 4):

Wähle zwei weitere linear unabhängige Matrizen, z. B.:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basis:

$\{A, B, E_2, E_4\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, da:

- 4 Matrizen
- linear unabhängig
- erzeugen gesamten Raum

Vektoren auf neue Basis:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

1. Basiswechsellmatrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Inverse berechnen:

$$P^{-1} = \frac{1}{(1)(2) - (-1)(1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Neue Koordinaten:

$$[\vec{v}]_B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Basis = Linear unabhängig
+Vollständigen Raum aufspannen

Orthonormalbasis

- **Orthogonal:**
Zwei Vektoren v, w sind orthogonal, wenn:
$$\langle v, w \rangle = 0$$
- **Orthonormalbasis** $\{e_1, \dots, e_n\}$:
Basis mit folgenden Eigenschaften:
 - $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ (orthogonal)
 - $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ (Norm = 1)

Matrix Norm:

2.1 Frobeniusnorm

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{mn}|^2}$$

- Vorgehen:
- Jeden Eintrag quadrieren
 - Alle quadrierten Werte aufsummieren
 - Quadratwurzel der Summe

2.2 Spaltensummennorm (1-Norm)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

- Vorgehen:
- Für jede Spalte j : Beträge der Einträge aufsummieren
 - Maximalen Spaltenwert bestimmen

Ausgeschrieben für 3×3 :

$$\|A\|_1 = \max \{ |a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}|, |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}|, |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{33}| \}$$

2.3 Zeilensummennorm (∞ -Norm)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

- Vorgehen:
- Für jede Zeile i : Beträge der Einträge aufsummieren
 - Maximalen Zeilenwert bestimmen

Ausgeschrieben für 3×3 :

$$\|A\|_\infty = \max \{ |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|, |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}|, |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}| \}$$

Vektor Norm:

1.1 p-Norm (allgemein)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Beispiel ausgeschrieben:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$$

1.2 Euklidische Norm (p = 2)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

1.3 Summennorm (p = 1)

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

1.4 Maximumsnorm (p $\rightarrow \infty$)

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Fourier-Reihe:

$$y(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

Dabei sind:

- A_k : Amplitude der k -ten Harmonischen
- f_k : Frequenz in Hz
- φ_k : Phasenverschiebung in Radiant

Die reellen Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_2 &= A_2 \cos(\varphi_2) = 0, & b_2 &= -A_2 \sin(\varphi_2) = 2, \\ a_5 &= A_5 \cos(\varphi_5) = -1, & b_5 &= -A_5 \sin(\varphi_5) = 0 \\ a_8 &= A_8 \cos(\varphi_8) = 0, & b_8 &= -A_8 \sin(\varphi_8) = -5 \end{aligned}$$

Alle weiteren reellen Koeffizienten sind gleich Null.

♦ 1. Komplexe Form (mit c_k)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

- $c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$
- $|c_k| = \frac{A_k}{2}$
- $\arg(c_k) = \varphi_k$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}j & \forall k \in \mathbb{N} \\ c_{-k} &= \overline{c_k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}j \end{aligned}$$

♦ 2. Reelle trigonometrische Form (mit a_k, b_k)

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

- $a_k = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_k)$
- $b_k = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_k)$
- $a_0 = c_0$ (wenn nur Cosinus-Anteile)

$$\begin{aligned} a_k &= A_k \cos(\varphi_k) \\ b_k &= -A_k \sin(\varphi_k) \end{aligned}$$

♦ 3. Amplituden-Phasen-Form (mit A_k, φ_k)

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

- $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|c_k|$
- $\varphi_k = \arctan\left(-\frac{b_k}{a_k}\right) = \arg(c_k)$
(Achte auf den richtigen Quadranten!)

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Def: Der Polarwinkel φ im Intervall $]-\pi, \pi]$ heisst **Argument** der komplexen Zahl $z = x + jy$. Notation: $\varphi = \arg(z)$. Die Formeln

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0 \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0. \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0 \wedge y < 0 \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0. \end{cases}$$

liefert immer das Argument, also immer einen Winkel im Intervall $]-\pi, \pi]$.

$$a_n = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n)$$

$$c_n = \frac{a_n}{2} - j \frac{b_n}{2}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n}{2} + j \frac{b_n}{2}$$

$$a_n = A_n \cos(\varphi_n), \quad b_n = -A_n \sin(\varphi_n)$$

$$A_n = 2|c_n|, \quad \varphi_n = \arg(c_n)$$

$$c_n = \frac{A_n}{2} \operatorname{cis}(\varphi_n)$$

Fourier-Reihe von Funktion

Gesucht ist die Fourier-Reihe von der periodischen Funktion

$$f(t) = 1 + \cos(2\pi t)$$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(1 \cdot 2\pi t)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$\frac{a_0}{2} = 1 \Rightarrow a_0 = 2$$

$$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\omega_0 = 2\pi$$

$$a_1 = 1, \quad a_n = 0 \quad \text{für } n \geq 2$$

$$\sin^2(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right)^2$$

$$\cos^2(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2$$

Fourier-Reihe Beispiel:

3. Fourierreihe (2+2=4 Punkte)

Gegeben ist eine periodische Funktion $x(t)$ durch das in Abb.1 dargestellte Amplituden-Phasen-Spektrum.

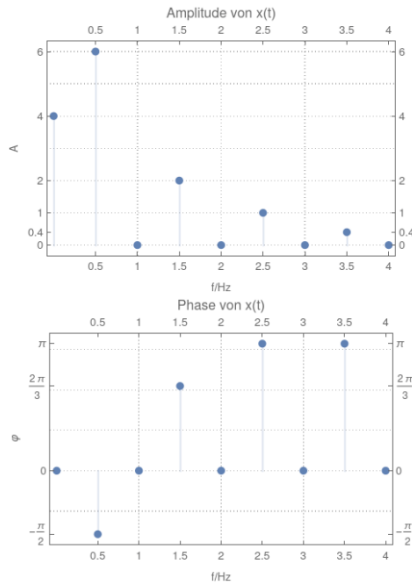


Abbildung 1: Amplituden A_n und Phasen φ_n der periodischen Funktion $x(t)$ als Funktion der Frequenz f (alle weiteren Amplituden und Phasen für höhere Frequenzen sind Null).

- a) Berechnen Sie die Grundkreisfrequenz ω von $x(t)$ und stellen Sie die Amplituden-Phasen-Form

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n),$$

von $x(t)$ auf.

- b) Schreiben Sie $x(t)$ als reelle Fourierreihe

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$

d.h. berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_0 , a_n und b_n , $n \in \mathbb{N}$.

a) Grundkreisfrequenz ω und Amplituden-Phasen-Form

1. Bestimmung der Grundfrequenz f

Aus dem Amplitudendiagramm erkennt man:

- Die erste nicht-null Frequenz ist bei $f = 0.5$ Hz
- Also ist dies die Grundfrequenz:

$$f = 0.5 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0.5 = \pi$$

2. Amplituden-Phasenform aufstellen

Die allgemeine Amplituden-Phasenform lautet:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Die gegebenen Amplituden A_n und Phasen φ_n aus dem Diagramm:

n	A_n	φ_n
0	4	0
1	6	$-\frac{\pi}{2}$
3	2	$\frac{2\pi}{3}$
5	1	π
7	0.4	π

Alle anderen Amplituden sind null.

Somit ist die Amplituden-Phasenform:

$$x(t) = 2 + 6 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(3\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos(5\pi t + \pi) + \frac{2}{5} \cos(7\pi t + \pi)$$

b) Reelle Fourierreihe

Die reelle Fourierreihe hat die Form:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$a_n = A_n \cos(\varphi_n), \quad b_n = -A_n \sin(\varphi_n)$$

Für die relevanten n :

- $a_0 = A_0 = 4 \Rightarrow \frac{a_0}{2} = 2$
- $a_1 = 6 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $b_1 = -6 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -6$
- $a_3 = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$
- $b_3 = -2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
- $a_5 = \cos(\pi) = -1, b_5 = 0$
- $a_7 = \frac{2}{5} \cos(\pi) = -\frac{2}{5}, b_7 = 0$

Ergebnis: Reelle Fourierreihe

$$x(t) = 2 + 6 \sin(\pi t) - \cos(3\pi t) - \sqrt{3} \sin(3\pi t) - \cos(5\pi t) - \frac{2}{5} \cos(7\pi t)$$

Transformationsmatrizen

Drehung (Rotation um den Ursprung)

Gegen-Uhrzeigersinn

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Skalierung mit gleichem Faktor in alle Richtungen (isotrope Skalierung)

$$S = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Skalierung mit unterschiedlichem Faktor pro Achse (anisotrope Skalierung)

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

Scherung entlang der x-Achse

$$H_x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scherung entlang der y-Achse

$$H_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die x-Achse

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die y-Achse

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der x-Achse

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der y-Achse

$$M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$

$$M_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Erzeugenden System

Vektoren:

Gegeben: Die Vektoren

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1)$$

sollen den Raum $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

Schritt 1: Matrix aufstellen

Die Vektoren als Spaltenmatrix schreiben:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Schritt 2: Rang berechnen

Diese Matrix hat die **volle Rangzahl 3** (da sie eine Einheitsmatrix ist), also ist sie ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$.

Matrizen:

Gegeben: Der Raum aller 2×2 Matrizen. Die folgenden Matrizen sollen den Raum erzeugen:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Schritt 1: Matrizen in Vektoren umwandeln

Jede 2×2 Matrix kann als **Vektor mit 4 Einträgen** geschrieben werden:

$$E_1 = (1, 0, 0, 0), \quad E_2 = (0, 1, 0, 0), \quad E_3 = (0, 0, 1, 0), \quad E_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Schritt 2: Matrix aufstellen und Rang prüfen

Die Spaltenmatrix ist:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Rang ist 4 (volle Dimension für 2×2 -Matrizen), also bilden diese Matrizen ein Erzeugendensystem.

Funktionen:

Gegeben: Die Funktionen

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$$

sollen den Raum der quadratischen Polynome P_2 erzeugen.

Schritt 1: Linearkombination aufstellen

Jedes quadratische Polynom $p(x) = a + bx + cx^2$ kann als Linearkombination geschrieben werden:

$$p(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

Schritt 2: Unabhängigkeit testen

Setzen wir

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0$$

für alle x , so folgt $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, also sind die Funktionen **linear unabhängig**.

Schritt 3: Erzeugendensystem bestätigen

Da jede quadratische Funktion als Linearkombination dieser drei geschrieben werden kann, bilden sie ein Erzeugendensystem für P_2 .

Skalarprodukt Für $m \times n$ Matrizen

Auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ (VR der $m \times n$ -Matrizen) definiert man das Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T B), \quad A, B \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^* B), \quad A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

$$\text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1+0+2 = \underline{\underline{3}}$$

Kern und Bild

Kern

- Löse LSG $A \cdot x = 0$
- Dann gilt
 - $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$ Der Kern entspricht allen x aus LSG
- $\dim(\ker(A)) = n - r$ ($n = \#$ alle Terme, $r = \#$ aller Pivots)
- Bei vollem Rang, $\ker(A) = \{0\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}$$

$$x_2 = q$$

$$0 = x_1 - q \Rightarrow x_1 = q \Rightarrow \ker(A) = \{q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim(\ker(A)) = n - r = 2 - 1 = 1$$

Bild

- Löse LSG $A \cdot x = 0$
- $\text{Im}(A) = \text{span}(\text{alle Spalten mit Pivot})$
- Alle spalten mit Pivot = linear unabhängige Spalten
- $\dim(\text{Im}(A)) = r$ ($r = \#$ aller Pivots)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Im}(A) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim(\text{Im}(A)) = 2$$

Beispiel 4

Man berechne je eine Basis des Kerns und des Bildes von

$$C: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = v \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = r - 2s + t \\ x_5 = -2v - 2s - t \end{array} \quad \ker(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Basis von } \ker(C) \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Im}(C) = \text{span}(C)$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \quad m: t \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3

Man berechne je eine Basis des Kerns und des Bildes von

$$B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\ker(B) \quad \begin{array}{c|c} 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = -t \\ x_1 = -\frac{t}{2} \end{array}$$

$$\ker(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \right\}$$

$$\text{Basis von } \ker(B) \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Im}(B) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{c|c} 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{Basis des Im}(B) \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Matrix der Verkettung

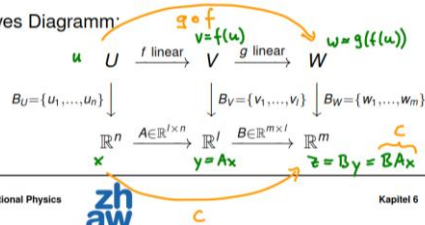
Satz 6.3.2: Seien U, V, W drei VR und seien $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ zwei lineare Abbildungen. Die Abbildung f besitze bezüglich gewählter Basen B_U von U und B_V von V die Matrix $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$. Die Abbildung g habe bezüglich der Basen B_V und B_W die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$. Dann besitzt die lineare Abbildung

$$g \circ f: U \rightarrow W$$

bezüglich B_U und B_W die $m \times n$ -Matrix

$$C = B \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

kommutatives Diagramm:



Untervektorraum:

Gegebener Raum:

$$V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Teilmenge:

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Gegebener Raum:

$$V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Teilmenge:

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \text{ ist symmetrisch}\}$$

Das heisst: $A = A^T$

Schritt-für-Schritt-Prüfung

1. Nullmatrix enthalten?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$$

→ Ja, Bedingung erfüllt.

2. Abgeschlossenheit unter Addition?

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in U$$

→ Ja, Bedingung erfüllt.

3. Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation?

$$\lambda A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix} \in U$$

→ Ja, Bedingung erfüllt.

Schritt-für-Schritt-Prüfung

1. Nullmatrix enthalten?

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ und } 0^T = 0$$

→ Ja, Bedingung erfüllt.

2. Abgeschlossenheit unter Addition?

Seien $A, B \in U$, d.h. $A = A^T, B = B^T$:

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

→ Ja, Bedingung erfüllt.

3. Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation?

Für $A \in U, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$$

→ Ja, Bedingung erfüllt.

Lineare Abhängigkeit:

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren:

1. Gaußen (Rang bestimmen)
2. Wenn $r < \text{Max Rang}$ dann Linear abhängig

Lineare Unabhängigkeit von Matrizen:

1. Jede Matrize in eine Spalte schreiben
2. Gaußen (Rang bestimmen)
3. Wenn $r < \text{Max Rang}$ dann Linear abhängig

Lineare Unabhängigkeit von Funktionen:

1. Gleichung mit $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \dots + \lambda_n \cdot f_n$
2. n test x einsetzen Gleichung erstellen
3. Gleichungssystem lösen
4. Wenn nur $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ eine Lösung Linear unabhängig

$$M = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$$\text{vec}(M) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

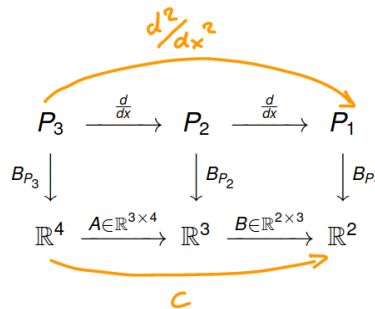
Lineare Hülle

Die lineare Hülle von $v_1, v_2, \dots, v_n$ ist:

$$\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{v \in V \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n\}.$$

Satz: Die lineare Hülle ist immer ein Unterraum.

Matrix der Verkettung Beispiel:



Von Vorher $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Für A:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{d/dx} 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \xrightarrow{d/dx} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^2 \xrightarrow{d/dx} 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^3 \xrightarrow{d/dx} 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrix einer Lin. Abbildung

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad P'(x) = a_1 + 2a_2 x$$

$$P_2 \xrightarrow{d/dx} P_1$$

$$B_{P_2} \downarrow \quad \downarrow A \quad \downarrow B_{P_1}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$$

$$A \vec{x} = \vec{y}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{d/dx} 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \xrightarrow{d/dx} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^2 \xrightarrow{d/dx} 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die orthogonale Projektion

$$P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Matrix A bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{P} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow B = \{e_1, e_2, e_3\} & & \downarrow B = \{e_1, e_2\} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rangsatz:

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = \dim(V)$$

Injektive/surjektive Linearen Abbildungen

$f: V \rightarrow W$

f ist injektiv $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

- f Injektiv wenn voller Rang (alle spalten haben ein Pivot)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2}} \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

injektiv ✓
 $\ker(A) = \{0\}$
 $\dim(\text{im}(A)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
 nicht surjektiv ✗

f ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{im}(f) = W$

- das Bild spannt gesamtes W auf
- $\dim(\text{im}(A)) = \dim(W)$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

$\ker(B) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$
 nicht injektiv ✗
 $\dim(\text{im}(B)) = 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$
 surjektiv ✓

Matrix für Basiswechsel

Rezept

Gegeben: VR V mit "alter" Basis B und "neuer" Basis $\tilde{B}$

Umformungsmatrix = T

- T :
 - Schreibe Basisvektoren von "alter" Basis B bezüglich der Basisvektoren von "neuer" Basis $\tilde{B}$
 - Spalten reihenweise zu Matrix zusammenführen
- T^{-1} :
 - Schreibe Basisvektoren von "neuer" Basis $\tilde{B}$ bezüglich der Basisvektoren von "alter" Basis B
 - Spalten reihenweise zu Matrix zusammenführen
- Wenn "alte" Basis = Standardbasis
 - Rechne T^{-1} zuerst aus
 - Invertiere Matrix zu T
 - Ist einfacher

$$B = \{1, x\}$$

$$\tilde{B} = \{1, 1-2x\}$$

$$T: \begin{matrix} 1 & \xrightarrow{id} & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1-2x) \\ x & \xrightarrow{id} & x & = & \frac{1}{2} \cdot 1 + -\frac{1}{2} \cdot (1-2x) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

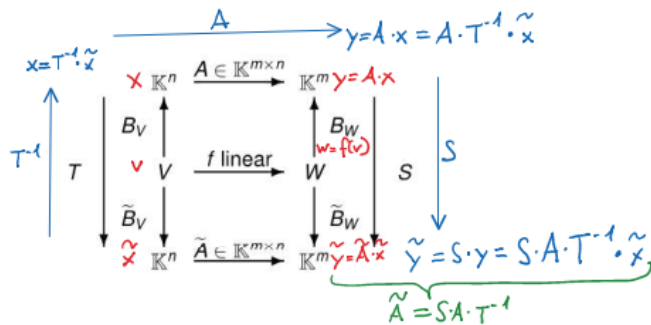
$$B = \{1, x, x^2\}, \quad \tilde{B} = \{1, x-1, (x-1)^2\}$$

$$T^{-1}: \begin{matrix} 1 & \xrightarrow{id} & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ x-1 & \xrightarrow{id} & x-1 & = & -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ x^2-2x+1 & \xrightarrow{id} & x^2-2x+1 & = & 1 \cdot 1 + -2 \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel

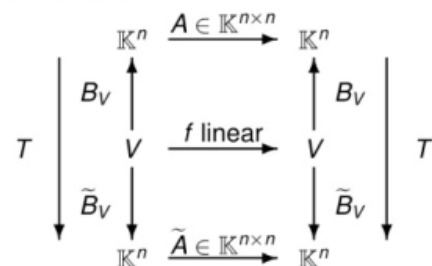
$$\tilde{A} = S \cdot A \cdot T^{-1}$$



Spezialfall

$$B_V = B_W \text{ \& } \tilde{B}_V = \tilde{B}_W$$

$$\tilde{A} = T \cdot A \cdot T^{-1}$$



Basiswechsel Beispiel

2. Einseitiger Basiswechsel

Wir betrachten die lineare Abbildung f , die wie folgt definiert ist:

$$f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix A der Abbildung f bezüglich der Basis $B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, wobei

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

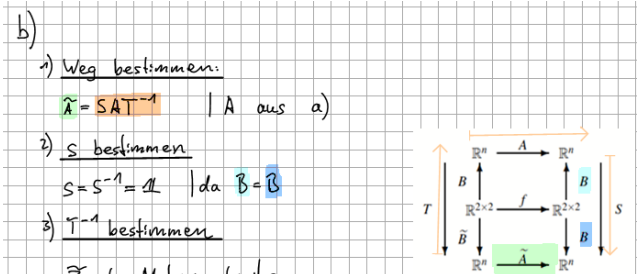
b) Eine weitere Basis des $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist

$$\tilde{B} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\},$$

wobei

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Führen Sie den Basiswechsel gemäß folgendem kommutativen Diagramm durch und bestimmen Sie die Matrix A .



$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = S \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Umkehrung von Linearen Abbildungen

- A = bijektiv, linear (Isomorphismus) $\rightarrow A$ invertierbar
- A invertieren
 - $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
 - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, n > 2, \quad A \mid \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n \mid A^{-1}$
- Wenn bei $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus besteht,
 - $f: V \rightarrow W, f^{-1}: W \rightarrow V$
 - Isomorphismus bezieht sich auf f
- sind V & W Isomorph
 - Isomorphie bezieht sich auf die Vektorräume

Eigenwert (EW) und Eigenvektoren (EV)

Definition

- $v = EV$ von der Funktion f zum $EW \lambda$, wenn $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda \cdot v$.
- $\Rightarrow x = EV$ von der Matrix A mit $EW \lambda$, wenn $x \neq 0$ und $A \cdot x = \lambda \cdot x$
- E_{λ_i} = Eigenraum (Menge aller EV zu einem $EW \lambda_i$)

Rezept

EW

- Berechne charakteristisches Polynom $p_A(\lambda)$
 - $p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$
 - Setze $p_A(\lambda) = 0$ und rechne Nullstellen aus
 - Bei quadratischem Polynom

$$\text{Mitternachtsformel } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 - Ausklammern Binom suchen
- Nullstellen = $EW \lambda$ von A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad p_A(\lambda) = \det \left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - \lambda(2-2) = \lambda^2 - 2\lambda$$

$EW \lambda_1 = 0$
 $EW \lambda_2 = 2$

EV / EV

- Berechne für jedes EW den E_{λ_i}
 - $E_{\lambda_i} = \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$
 - Löse Homogenes LGS $\Rightarrow E_{\lambda_i} = \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \}$
 - $(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) \cdot x = 0$ $EV(\text{von } \lambda_1=0, q=1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - Ein Vektor von E_{λ_i} = EV.

$$\begin{array}{l} \text{EW } \lambda_1 = 0 \\ \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{II+I} \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & \\ \hline -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} x_2 = q \\ -x_1 - q = 0 \\ \Rightarrow x_1 = -q \end{array} \\ \\ \text{EW } \lambda_2 = 2 \\ \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{II+I} \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = s \end{array} \end{array}$$

$E_{\lambda_1} = \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$
 $E_{\lambda_2} = \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$

Vielfachheit (VF)

Algebraische Vielfachheit

Die alg. VF eines EW ist die Vielfachheit der Nullstelle im $p_A(\lambda)$.

$$\lambda^2(\lambda - 3)$$

$\Rightarrow EW \lambda_1 = 0$, doppelte Nullstelle $\Rightarrow$ alg. VF = 2

$\Rightarrow EW \lambda_2 = 3$, einfache Nullstelle $\Rightarrow$ alg. VF = 1

Geometrische Vielfachheit

Die geom. VF ist die Dimension von dem E_{λ_i} .

- Anzahl linear unabhängige EV zum $EW \lambda$
 - (Anzahl Buchstaben in $\ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$)

$$E_{\lambda_1} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \Rightarrow \text{geom. Vielfachheit} = 1$$

$$E_{\lambda_2} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \Rightarrow \text{geom. " } = 2$$

Diagonalisieren

Rezept

1. Berechne die EW
2. Berechne für jeden EW die EV
 - a. Fange mit EW 's mit alg. VF > 1 an.
3. Wenn # EV = $\dim(A^{n \times n})$
 - a. (Basis B_{EV} bestehend aus EV aufstellen) $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $T = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
4. T, D, T^{-1} aufstellen
 - a. T^{-1} = Matrix aus EV
 - b. T umstellen von T^{-1}
 - c. D = Diagonalmatrix aus Ews
 - i. (Oder $T \cdot A \cdot T^{-1}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} EW \lambda_1 = 0, EV v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ EW \lambda_2 = 2, EV v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B_{EV} = \{ v_1, v_2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = T \cdot A \cdot T^{-1}$$

Diagonalisierbarkeit von $A^{n \times n}$

- Basis B_{EV} aus n EV
 - Wenn $\forall EW = \text{alg. VF } 1$
 - Diagonalisierbar, Da jeder $EW = 1$ EV
 - Wenn $EW \lambda = \text{alg. VF } m, \{m \in \mathbb{N} | m > 1\}$
 - Diagonalisierbar, wenn # EV von $EW = m$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{II} + \text{I}} \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$EW \lambda_1 = 4$, alg. VF = 2
 $EW \lambda_2 = -2$, alg. VF = 1

$\Rightarrow \dim(E_4) = 2 = \text{alg. VF } EW 4$

$\Rightarrow E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Potenzieren von Matrizen

Diagonalmatrizen

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^n \end{pmatrix}, \text{ potenzieren der Diagonalelemente}$$

Diagonalisierbare Matrizen

$A^n = T^{-1} \cdot D^n \cdot T$ rechne diagonalisiere die Matrix und verechnen mit T und T^{-1}

$$A^{100} = T^{-1} \cdot D^{100} \cdot T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizenexponential

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1}_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots$$

$$\Rightarrow e^A = T^{-1} \cdot e^D \cdot T$$

Wobei:

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- Mit Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A.
- Die Matrix T beschreibt den Basiswechsel.
- T^{-1} enthält also die Eigenvektoren als Spalten

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+3 & -4 \\ -4 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-5)$$

$$\text{EW-S } \begin{array}{c|c} \boxed{-5} & -4 \\ \hline -4 & -8 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_2 = 1q \\ x_1 = -2q \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow q \end{array}$$

$$\text{EWS } \begin{array}{c|c} \boxed{5} & -4 \\ \hline -4 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_2 = 2q \\ x_1 = 1q \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow q \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$e^A = T^{-1} \cdot e^D \cdot T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-5} & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Systeme von homogenen linearen gewöhnliche Differentialgleichungen (gDgln)

Betrachte gekoppeltes System von homogenen linearen gDgln 1. Ordnung

$$u'(t) = 5 \cdot u(t) - 1 \cdot v(t), \quad u(0) = 0$$

$$v'(t) = 2 \cdot u(t) + 2 \cdot v(t), \quad v(0) = 1$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -2 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-4)$$

Schreibe das System in Matrixschreibweise

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y' = A \cdot Y, \Rightarrow Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y_0$$

$$\text{EW 3 } \begin{array}{c|c} \boxed{-2} & 1 \\ \hline -2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_2 = 1q \\ x_1 = \frac{1}{2}q \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow q \end{array} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{EW 4 } \begin{array}{c|c} \boxed{1} & 1 \\ \hline -2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_2 = q \\ x_1 = q \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow q \end{array} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{D \cdot t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix $\phi(t)$ berechnen

$$\phi(t) = e^{A \cdot t} = T^{-1} \cdot e^{D \cdot t} \cdot T$$

$$\phi(t) = e^{A \cdot t} = T^{-1} \cdot e^{D \cdot t} \cdot T = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - e^{3t} & e^{3t} - e^{4t} \\ 2e^{4t} - 2e^{3t} & 2e^{3t} - e^{4t} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y_0 = \phi(t) \cdot Y_0$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \cdot u_0 + \varphi_{12} \cdot v_0 \\ \varphi_{21} \cdot u_0 + \varphi_{22} \cdot v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - e^{4t} \\ 2e^{3t} - e^{4t} \end{pmatrix}$$