

Vektorraum R^n

Definition

Die Vektormenge $B \subset R^n$ ist eine Basis von R^n wenn gilt:

- B enthält genau n Vektoren.
- Die Vektoren aus B sind linear unabhängig.

($\implies$ linear unabhängig: $\det(B) \neq 0$)

Basis

Umrechnung $B \rightarrow S$

Matrix Multiplikation: $\vec{a}_S = B * \vec{a}_B$

Vektor $\vec{a}$ bezüglich der Basis S (Standardbasis)
= B -Matrix * Vektor $\vec{a}$ bezüglich der Basis B

Dabei ist B die Matrix aus allen Vektoren nebeneinander:
 $\lambda_1 * b_1 + \lambda_2 * b_2 + \lambda_3 * b_3 \dots$

$$= B * \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Umrechnung $S \rightarrow B$

Vektor $\vec{a}_B$ bezüglich der Basis B =
Inverse der Basis B * Vektor $\vec{a}_S$ bezüglich der Basis S
(Standardbasis)

2 Methoden:
Inverse der Matrix:

$$\vec{a}_B = B^{-1} * \vec{a}_S$$

LGS lösen:

$$(B|\vec{a}_S)$$

Satz

Satz
Wir betrachten die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^n$ sowie die $n \times n$ -Matrix B , die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ nebeneinander schreiben.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
- $\text{rg}(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- B ist invertierbar.
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.

Lineare Abbildungen

Wenn gilt:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$f(\lambda * \vec{x}) = \lambda * f(\vec{x})$$

(um den Gegenbeweis für eine Lineare Abbildung muss nur **eine der beiden Voraussetzungen** nicht erfüllt sein.)

Beweis

Die Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto m \cdot x$ ($m \in \mathbb{R}$) sind lineare Abbildungen:

- $f(x + y) = m(x + y) = mx + my$
- $f(x) + f(y) = mx + my$
- $f(\lambda * x) = m(\lambda x) = \lambda * m * x$
- $\lambda * f(x) = \lambda * m * x$

Anwendung

$$f: R^2 \rightarrow R^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel: $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 * 3 \\ 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$f: R^2 \rightarrow R^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ 3 * 4 \\ -4 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$

Umrechnung R^n zu R^m

$$f: R^n(BasisB) \mapsto R^m(BasisS)$$

Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis

Output A_{Input}
 $SAS = \left(f(\vec{e}_1)f(\vec{e}_2)f(\vec{e}_3) \dots f(\vec{e}_n)\right)$

Formeln für lineare Abbildungen

Spiegelung an der x-Achse:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der y-Achse:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Punktspiegelung am Ursprung:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf x-Achse:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die y-Achse:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Streckung um 2 in x-Richtung:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Streckung um 2 in y-Richtung:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rotation um Winkel φ um den Ursprung:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektionen und Spiegelungen

Orthogonale Projektion auf Gerade g:

$$g: ax + by = 0 \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \text{ (normiert) } P = \begin{pmatrix} (1 - a^2) & (-ab) \\ (-ab) & (1 - b^2) \end{pmatrix}$$

Spiegelung an allg. Geraden durch Ursprung:

$$S = \begin{pmatrix} (1 - 2a^2) & (-2ab) \\ (-2ab) & (1 - 2b^2) \end{pmatrix}$$

Scherung in x/y-Richtung um Faktor m

x-Richtung:

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y-Richtung:

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

Scheerungsfaktor $m = \tan(\varphi)$

Orthogonale Projektion auf Ebene E:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an Ebene E:

$$S = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

Streckung um Faktor λ :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ Streckfaktor: } \lambda = \frac{\text{neuer Betrag}}{\text{alter Betrag}}$$

Rotation um Koordinatenachsen x/y/z um Winkel φ :

Rotation um den Winkel φ um die x -Achse	Rotation um den Winkel φ um die y -Achse	Rotation um den Winkel φ um die z -Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ablauf

- Normierung
- a,b,c und $\vec{n}$ definieren
- in Abbildungsmatrix einsetzen
- Matrix $* \vec{x}$

Beispiel

Beispiel 9

Berechnen Sie die Abbildungsmatrix S der Spiegelung an der Ebene $F: \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z = 0$

und bestimmen Sie damit das Bild des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Normieren:

$(\frac{2}{7})^2 + (\frac{6}{7})^2 + (\frac{3}{7})^2 = 1? \rightarrow \text{ja.}$

2. $\vec{n}$ definieren:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ -6/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$

3. In S einsetzen:

$\begin{pmatrix} 1 - 2 * (2/7)^2 & -2(2/7) * (-6/7) & -2(2/7) * (3/7) \\ -2(2/7) * (-6/7) & 1 - 2(-6/7)^2 & -2(-6/7) * (3/7) \\ -2(2/7) * (3/7) & -2(-6/7) * (3/7) & 1 - 2(3/7)^2 \end{pmatrix}$

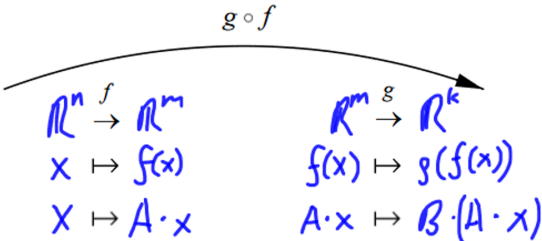
4. $S * \vec{x} = \text{Bild des neuen Vektors}$
(das ganze kann auch vereinfacht werden indem $\frac{1}{7^2}$ ausgeklammert wird)

Rotation um Gerade im Raum durch den Ursprung:

$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) + a_1^2(1 - \cos(\varphi)) & a_1a_2(1 - \cos(\varphi)) - a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1 - \cos(\varphi)) + a_2\sin(\varphi) \\ a_1a_2(1 - \cos(\varphi)) + a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_2^2(1 - \cos(\varphi)) & a_2a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_1\sin(\varphi) \\ a_1a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1 - \cos(\varphi)) + a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_3^2(1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$

Veknpfupfung linearer Abbildungen

Eine Veknpfupfung bsp.: $g \circ f$, ist nur mglgich wenn der Vektorraum $\mathbf{R}^n$ des Outputs der inneren Funktion f gleich ist wie der Vektorraum $\mathbf{R}^n$ des Inputs der zweiten Funktion g .



Bei Veknpfupfung von Abbildungsmatizen h und g wird im falle $h \circ g$ erst g dann h ausgefuhrt. Dies kann zu einer Abbildungsmatrix $A = A_h * A_g$ zusammengefasst werden.

$A_1 = g \circ h = g(h(\vec{x})) = A_g * A_h$

$A_2 = h \circ g = h(g(\vec{x})) = A_h * A_g$

Basiswechsel 2

Die Abbildungsmatrix ${}_S T_B$ fur Basiswechsel S nach B :
 ${}_S T_B = {}_S T_B * {}_S T_S$

Die Abbildungsmatrix ${}_B T_S$ fur Basiswechsel B nach S (Inverse):
 ${}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$

homogene Koordinaten

- Ortsvektoren sind am Ursprung angeheftet; die zusatzliche Komponente wird 1 gesetzt.
- Freie Vektoren sind frei parallel verschiebbar; die zusatzliche Komponente wird 0 gesetzt

Beispiel:

$\vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Translation von Ortsvektor Punkt P um einen Vektor a:

$\vec{r}(P) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\implies T * \vec{r}(P) = P'$ mit Translation

Rotation von Punkt Q um Winkel phi um die z-Achse und Translation um Vektor b:

$\vec{r}(Q) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

(Rotationsmatrix R um z-Achse als Beispiel:)

$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & b_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\implies R * \vec{r}(Q) = Q'$ mit Translation

Transformationen mit Matrizen T

Betrachten wir eine lineare Abbildung $f: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

So ergibt sich die Abbildungsmatrix ${}_S A_S = \begin{pmatrix} f(e_1) f(e_2) \dots \end{pmatrix}$
Betrachtet wird Standardbasis S sowie Basis B

$B = \{(\vec{a})_S; (\vec{b})_S\} = {}_S T_B$

$B = {}_S \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}_B = {}_S T_B$

${}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$

mithilfe des Basiswechsels kann somit die Matrix ${}_S A_S$ bestimmen werden: ${}_S A_S = {}_S T_B * {}_B A_B * {}_B T_S$

(die inneren Basen mussen gleich sein sodass die ausseren Basen dem gesuchten Ergebnis entsprechen)

Roboter

Ein Roboter wird um die z-Achse gedreht und danach um die mitrotierte y'-Achse gedreht.

- (1) Die Drehung um die z-Achse; $R_z(\varphi)$
- (2) Drehung um mitgedrehte y-Achse; $R'_y(\gamma)$

$R = R'_y(\gamma) * R_z(\varphi)$

$R'_y(\gamma) = R_z(-\varphi) * R_y(\gamma) * R_z(\varphi)$

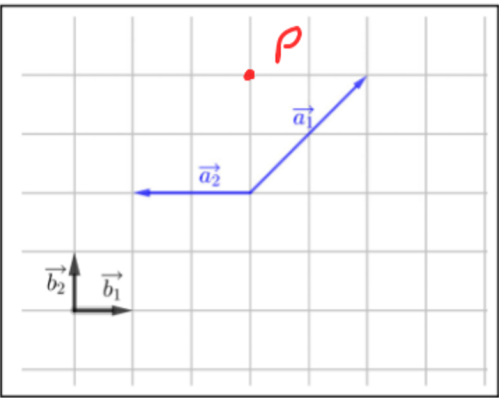
Eingesetzt:

$R = R_z(\varphi) * R_y(\gamma) * R_z(-\varphi) * R_z(\varphi)$

$R = R_z(\varphi) * R_y(\gamma) * R_y(\gamma) * R_z(\varphi)$

$R = R_z(\varphi) * R_y(\gamma)$

Basiswechsel 3



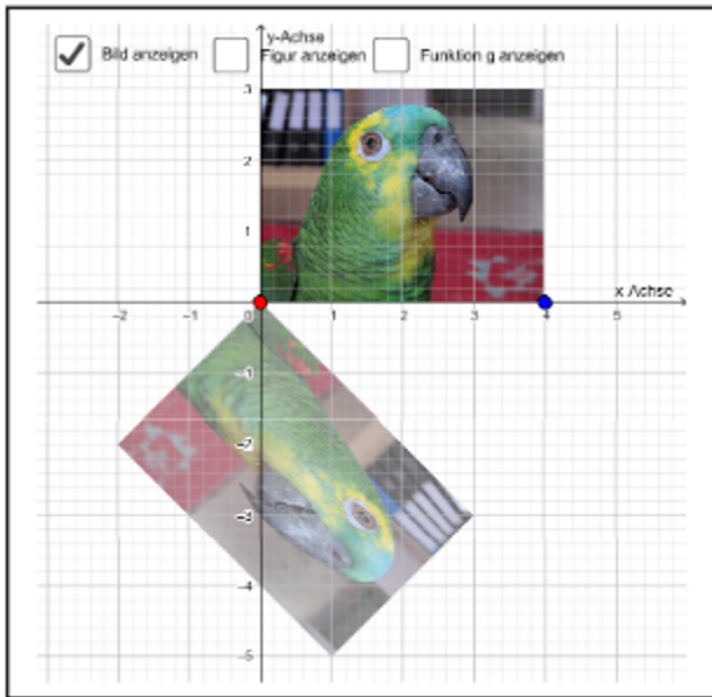
Basis $B = \{(\vec{b}_1; \vec{b}_2)\} = \{(\vec{e}_1; \vec{e}_2)\}$

Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ bezuglich der Basis $B = \{(\vec{a}_1)_B; (\vec{a}_2)_B\}$

Translationsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & x_1 \\ a_{12} & a_{22} & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bilder Projizieren



1. Zwei Punkte des Bildes und der Abbildung aussuchen. Einer nur mit x-Komponente und einer mit nur y-Komponente. $P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) & f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}$

3. $f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f\left(4 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 4 * f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, f\left(3 * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3 * f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$4. f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Wir betrachten eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Abbildungsmatrix A . Ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ heisst **Eigenvektor** von f bzw. A zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \quad \text{bzw.} \quad A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen:

$$(A - \lambda E) * \vec{x} = \vec{0}$$

1. Charakteristisches Polynom aufstellen
 $\rightarrow \text{chp}(\lambda) = \det(A - \lambda E)$
2. alle reellen Nullstellen bestimmen. Diese sind alle **Eigenwerte** der Matrix A .
3. wenn nötig **Polynomdivision** anwenden.
4. für jeden Eigenwert der Matrix A lösen wir das LGS $(A - \lambda E | \vec{0})$
5. Alle Lösungen $\neq \vec{0}$ sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ

Determinante einer 3x3 Matrix:

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 7 & 6 & -1 \\ -7 & 1 & -7 & -7 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Eine Quadratische Matrix $n \times n$ A heisst diagonalisierbar, falls es eine invertierbare Matrix T sowie eine Diagonalmatrix D gibt, so dass gilt:

$$A = T * D * T^{-1}$$

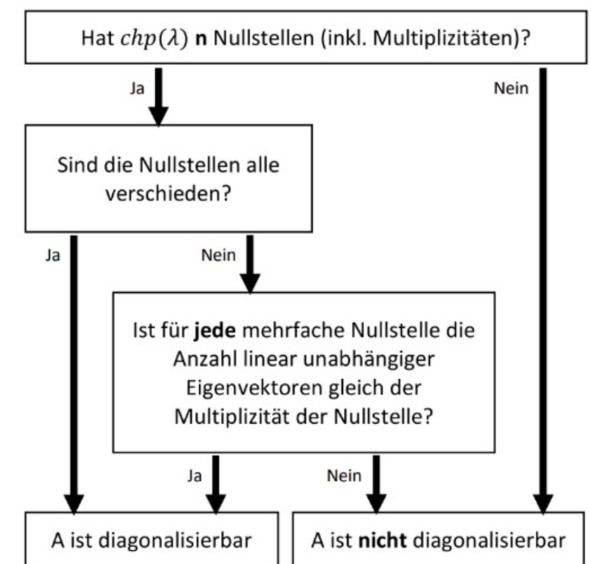
ausserdem gilt dann:

$$A^k = T * D^k * T^{-1}$$

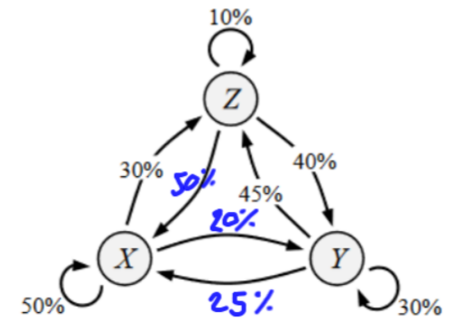
$$D = \begin{pmatrix} EW_1 & 0 & 0 \\ 0 & EW_2 & 0 \\ 0 & 0 & EW_3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \vec{EV}_1 & \vec{EV}_2 & \vec{EV}_3 \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge der EV muss dieselbe der EW sein!!!



Übergangsgraph und Übergangsmatrix



$$U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.45 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} XX & YX & ZX \\ XY & YY & ZY \\ XZ & YZ & ZZ \end{pmatrix}$$

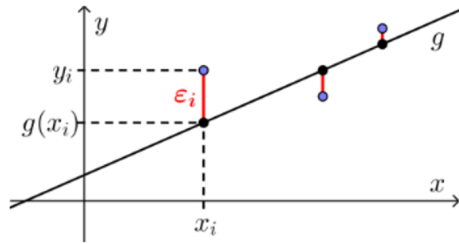
Die Summe der Spalten muss immer 1 ergeben.

Der Stationäre Zustand ist der Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Kleinste Quadrate Methode

Das Residuum oder der Fehler ϵ_i eines Datenpunktes ist die in y-Richtung gemessene Entfernung zwischen y_i und der Geraden $g(x_i)$ (mit Vorzeichen).

$$\epsilon_i = y_i - g(x_i)$$



Die Regresionsgerade $g(x)$:

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 * x$$

$$\varepsilon_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 * x_i)$$

$$s(x) = v * t + a * t^2$$

Residuenvektor:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} y_1 - g(x_1) \\ y_2 - g(x_2) \\ y_3 - g(x_3) \end{pmatrix}$$

Regressionsgerade bestimmen

1. A-Matrix bestimmen. 1. Spalte mit Einsen:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 & (x_1)^2 \\ x_2 & (x_2)^2 \\ x_3 & (x_3)^2 \\ x_4 & (x_4)^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

bei quadratischen Funktionen erste spalte mit $a * x$ -Werten und zweite Spalte mit x^2

Bei gegebenem LGS wird die A-Matrix mit den x, y, z werten gefüllt:

$$\begin{aligned} x + y - z + w &= 1 \\ -y + z &= 0 \\ x + z - w &= 2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. $\vec{y}$ -Vector bestimmen

3. $A^T * A$ und $A^T * \vec{y}$ rechnen

4. LGS aufstellen: $(A^T * A | A^T * \vec{y})$

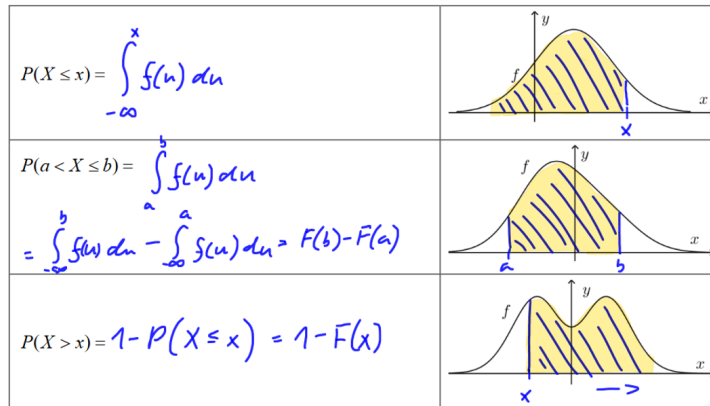
5. Gauss Jordan verfahren und reduzierte Zeilenstufenform bringen

6. 1. Zeile $\rightarrow \beta_0$
2. Zeile $\rightarrow \beta_1$
3. Zeile $\rightarrow \beta_2$

Intervallwahrscheinlichkeiten

Bei einer stetigen Zufallsvariablen X lässt sich die kumulative Verteilungsfunktion als uneigentliches Integral einer Funktion f darstellen:

$$CDF = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



Gegeben ist eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion (PDF) $f(x)$. Dann ist der Erwartungswert von X definiert durch:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x) dx$$

Die Varianz von X ist definiert durch:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) * (x - E(X))^2 dx$$

Die Standardabweichung ist definiert durch:

$$\sigma = S(X) = \sqrt{V(X)}$$

Verteilungen

Bernoulli-Verteilung

Die Zufallsvariable X kann nur zwei verschiedene Werte annehmen:
 $X = 1$ oder $X = 0$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 * P(X = 1) + 0 * P(X = 0) = P(X = 1) \\ E(X^2) &= 1^2 * P(X = 1) + 0^2 * P(X = 0) = P(X = 1) \\ V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = p(1 - p) \end{aligned}$$

Binomialverteilung

$$X \sim B(n; x)$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} * p^x * (1 - p)^{n-x}$$

$$P(X \leq b) = \sum_{k=0}^b \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$$

n = Anzahl Prüfungen

x = Anzahl Erfolge

p = Wahrscheinlichkeit dass ein Erfolg eintrifft

$E(X), V(X), S(X)$ der Binomialverteilung:

$$\mu = E(X) = np, \sigma^2 = V(X) = np(1 - p)$$

$$\sigma = S(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

$$\Phi_{\mu, \sigma}(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \phi_{\mu, \sigma}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu}{\sigma} \right)^2} dt$$

(Tabellenwerte herausuchen für Grenzwerte des Integrals)

Häufig braucht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine normalverteilte Zufallsvariable Werte in dem symmetrisch zu μ gelegenen Intervall $[\mu - \varepsilon; \mu + \varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$ annimmt. Es gilt:

$$P\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \varepsilon\right) = 2 * \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$$

Normalverteilung

Die stetige Zufallsvariable X folgt der Normalverteilung mit den Parametern μ ($E(X)$), σ ($S(X)$) $\in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$, wenn sie folgende Dichtefunktion (PDF) hat:

$$\phi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

Liegt eine beliebige Normalverteilung $X \sim N(\mu; \sigma)$ vor, muss **standardisiert** werden:

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Umwandlung der Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(U \leq a) &= \Phi(u) \rightarrow \text{direkt ablesen.} \\ P(U \leq -a) &= 1 - P(U \leq a) \\ P(a \leq U \leq b) &= P(U \leq b) - P(U < a) \\ P(-a \leq U \leq b) &= P(U \leq b) - (1 - P(U \leq a)) \\ P(|U| \leq a) &= P(U \leq a) - (1 - P(U \leq a)) = 2 * P(U \leq a) - 1 \end{aligned}$$

$$P(|X| \leq a) = P\left(\frac{-a - \mu}{\sigma} \leq U \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{hier wurde Formel für } U \text{ verwendet})$$

$$P(|X - \mu| > a) = P\left(\frac{|X - \mu|}{\sigma} > \frac{a}{\sigma}\right)$$

Beispiel mit $\mu = 3$ und $\sigma = 2$:

$$P(X \leq 4.48) = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{4.48 - 3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1.48}{2}\right) = \Phi(0.92)$$

Schliessende Statistik

Vorgehen bei Vertrauensintervallen:

1. Zeile in Tabelle 11.3.3 herausfinden unter Berücksichtigung:
 - Verteilung gemäss aufgabenstellung
 - zu schätzender Parameter
 - Was ist bekannt oder unbekannt?
2. γ herausfinden (beachtung ob Irrtumswahrscheinlichkeit oder Vertrauensniveau gegeben ist)
3. p ausrechnen, f ausrechnen
4. c aus relevanter Tabelle herauslesen
5. Obergrenze und Untergrenze ausrechnen (Formel)
6. Intervall angeben

Hypothesentests

Vorgehen bei Hypothesentests:

1. Nullhypothese H_0 aufstellen.
2. Alternativhypothese H_A aufstellen.
3. Tabelle 11.4.3, relevante Zeile herausfinden.
4. Kritische Grenzen bestimmen unter Berücksichtigung:
 - Verteilung der Testvariablen (Spalte 6)
 - Signifikanzniveau α
 - H_A einseitig oder zweiseitig und auf welcher Seite ist der kritische Bereich?
5. evtl mit Schätzfunktion Schätzparameter herausfinden. (Spalte 4)
6. Testvariable bestimmen. (Spalte 5)
7. Wird H_0 angenommen oder abgelehnt?