Reele Funktionen

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$

$\mathbb{R}$ = Menge der reele Zahlen

$\mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen $= \{p + q \cdot j\}$

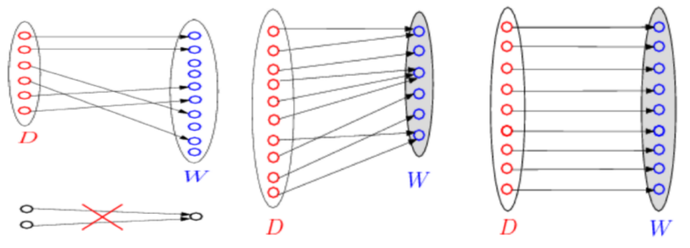
Funktionen

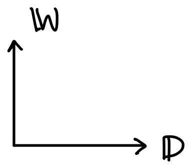
Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element eine Menge D genau ein Element einer Menge W zuordnet.

D: Definitionsbereich

W: Wertebereich

$f: D \to W$, f ist eine Funktion von D nach W





injektiv: $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$

surjektiv: $y \in W$ ein $y \in D$ gibt mit $f(x) = y$

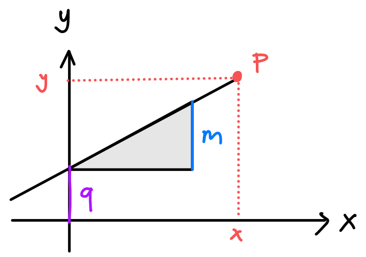
bijektiv: injektiv + surjektiv

nicht surjektiv, nicht injektiv: zB: $n=0$, $n=2$

lineare Funktion

$$\boxed{f(x) = y = mx + q}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Quadratische Funktionen

$$\boxed{f(x) = y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)}$$

- Produktform / Linearfaktorenform: $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_n)$ — Nullstellen
- Scheitelpunktsform: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ — Scheitelpunkt
- Bestimmung von x_0, y_0:

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, \; c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \; f(s_x)\right)$$

- Mitternachtsformel / Nullstellen bestimmen

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_{1,2}}$$

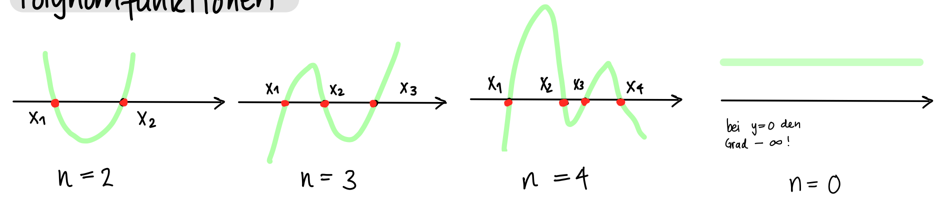
- Diskriminante $= D = b^2 - 4ac$

$D > 0$: 2 Lösungen: $\mathbb{L} = \{x_1, x_2\}$

$D = 0$: 1 Lösungen: $\mathbb{L} = \{S_x\} = \{\frac{-b}{2a}\}$

$D < 0$: keine Lösung: $\mathbb{L} = \{\}$

Polynomfunktionen



$$\boxed{p(x) = a_n x^n + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x \quad (allgemein)}$$

- $p(x)$; Grad $= 5$; ungerade d.h. **punktsymmetrisch zum Ursprung**

  $p(x) = a_5 x^5 + a_3 x^3 + a_1 x$

- $p(x)$; Grad $= 6$; gerade d.h. **Achsensymmetrisch zum Ursprung**

  $p(x) = a_6 x^6 + a_4 x^4 + a_2 x^2$

Vorgehen Graphen von Polynomen skizzieren:

1. Nullstellen einzeichnen
2. asymptotisches Verhalten
3. Berücksichtige Vielfachheit der Nullstellen und berücksichtige asymptotische Verhalten

Nullstellen von Polynomen

- Polynomdivision: Bsp: $f(x) = x^3 + 8x^2 + 13x + 6$ mit Nullstelle $x_0 = -$

$$(x^3 + 8x^2 + 13x + 6) : (x + 1) = \underbrace{x^2 + 7x + 6}_{q(x)} = (x-1)(x-6)$$

$$\begin{array}{l}
-(x^3 + x^2 + 0x + 0) \\
\hline
\quad 7x^2 + 13x + 6 \\
\quad -(7x^2 + 7x + 0) \\
\hline
\qquad 6x + 6 \\
\qquad -(6x + 6) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

weitere Nullstellen form mit Mitternachtsformel oder Faktorisieren

$x_0 = -1$

$x_1 = 1$

$x_2 = 6$

- Horner-Schema

Bsp: $p(x) = x^3 + 8x^2 + 13x + 6$ an der Stelle $x = -1$

	1	8	13	6
−1		−1	−7	−6
	1	7	6	0

① ② ③ ④ (−1)

$\Rightarrow q(x) = x^2 + 7x + 6$

Teilmengen, Intervalle

Unter einem Intervall verstehen wir eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

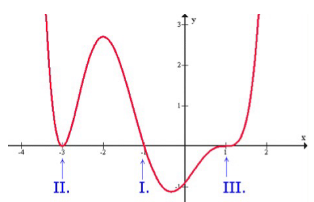
Abgeschlossene Intervalle: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Offene Intervalle: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Halboffene Intervalle: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Unendliche Intervalle: $[a, \infty[$ Unendlich immer offen!

geometrisch:



$x_1 = -3$ (2-fach)

$x_2 = -1$ (1-fach)

$x_3 = 1$ (3-fach)

Kompositionen von Funktionen

Bei der Komposition $(g \circ f)(x)$ wird zuerst diejenige Funktion ausgeführt, die rechts steht. ⚠ nicht kommutativ! $g \circ f \neq f \circ g$

Beispiel:

$f(x) = 3x + 7$, $g(x) = \sqrt{x}$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3\sqrt{x} + 7$

Bsp: $g(4) = \sqrt{4} = 2$; $f(2) = 3 \cdot 2 + 7$

Grenzwert von Funktionen

Berechnen, falls sie existieren:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^5 + 1}{x + 1} = \text{ mit Polynomfunktion}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{5 + 1}{5 - 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

x "ausklammern"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{9x - 5}{7x + 3} = \frac{x(9 - \overbrace{\tfrac{5}{x}}^{0})}{x(7 - \underbrace{\tfrac{3}{x}}_{0})} = \frac{9}{7}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{7x^2 + 1} = \frac{x^2(1 - \overbrace{\tfrac{5x}{x^2}}^{0} + \overbrace{\tfrac{3}{x^2}}^{0})}{x^2(7 + \underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{0})} = \frac{1}{7}$$

Stetigkeit von Funktionen

untersuchen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 20}{x - 4} & (x \neq 4) \\ 8 & (x = 4) \end{cases}$$

$f(4) = 8$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x - 4} = \frac{(x-4)(x+5)}{(x-4)} = x + 5 = 4 + 5 = 9$$

ungleich $\Leftrightarrow$ unstetig

Differentialrechnung

Eine Funktion f heisst differenzierbar, falls f in jeder Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Die Funktion $f'(x)$ heisst Ableitung von f.

Steigung der Sekanten in den Intervallen: $m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

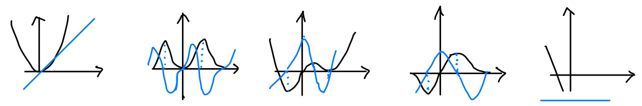
stetige Funktionen: Kurve keine "Sprünge"

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

differenzierbare Funktionen: Kurve keine Knicke

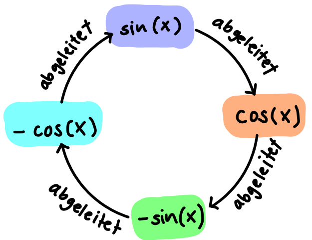
Gleichung der Tangente an den Graphen $f(x)$ an der Stelle x_0: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

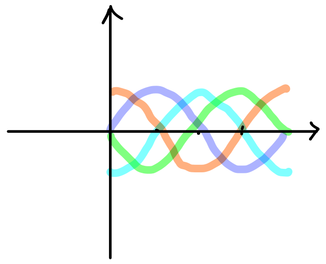
$\boxed{f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}}$



Ableitung der Grundfunktionen

- Exponentialfunktion: $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$
- Exponentialfunktion: $f(x) = a^x \Rightarrow f(x) = e^{x \cdot \ln(a)}$ | $y = 2^x \Rightarrow y' = 2^x \cdot \ln(2)$
- Logarithmusfunktionen: $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- Trigonometrische Funkt.:





Untersuchung Differenzierbarkeit

Höhere Ableitungen

Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D heisst n-mal differenzierbar an der Stelle x_0, wenn alle Ableitungen $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ existieren. Bsp: 7. Ableitung $\rightarrow f^{(7)}(x)$

Ableitregel

Summenregel: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Faktorregel: $(cf(x))' = cf'(x)$

Inversenregel:
$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow \boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$

Bei 3 Faktoren: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$

Quotientenregel:

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$

Kettenregel:

$\boxed{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$

Bsp:	Äussere Funktion:	Innere Funktion:
$f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x}$,	$u(x) = \sqrt{u}$	$v(x) = 3x^2 + 4x$
$f(x) = (x^2 + e^x)^{100}$,	$u(x) = u^{100}$	$v(x) = x^2 + e^x$
$f(x) = \sin(2x)$,	$u(x) = \sin(u)$	$v(x) = 2x$

Logarithmische Ableitung:

$$y = u(x)^{v(x)} = (e^{\ln(u(x))})^{v(x)} = e^{\ln(u(x)) \cdot v(x)}$$

- Ableiten mit Kettenregel:

$$y' = e^{\ln(u(x)) \cdot v(x)} \cdot (\ln(u(x)) \cdot v(x))'$$
$$= e^{\ln(u(x)) \cdot v(x)} \cdot \left(\frac{u'(x)}{u(x)} \cdot v(x) + \ln(u(x)) \cdot v'(x) \right).$$

- Rück-Umformen:

$$y' = e^{\ln(u(x)) \cdot v(x)} \cdot \left(\frac{u'(x)}{u(x)} \cdot v(x) + \ln(u(x)) \cdot v'(x) \right)$$
$$= u(x)^{v(x)} \cdot \left(\frac{u'(x)v(x)}{u(x)} + \ln(u(x)) \cdot v'(x) \right).$$

ABLEITUNGEN ELEMENTARER FUNKTIONEN

$f(x)$	$f'(x)$
x^a mit $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
$cot(x)$	$-1 - cot^2(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$
e^x	e^x
a^x	$ln(a) \cdot a^x$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$log_a(x)$	$\frac{1}{ln(a)x}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot(t)$	$-sin^2(x)$

Monotonie & Krümmung

1. Ableitung

Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich D und Ableitung $y' = f'(x)$, und sei $x_0 \in D$. Dann gilt:

- $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ wächst streng monoton
- $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ fällt streng monoton
- $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ horizontale Tangente

2. Ableitung

- $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ Kurve nach links gekrümmt, konvex
- $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ Kurve nach recht gekrümmt, konkav
- $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ nicht gekrümmt

charakteristische Kurvenpunkte

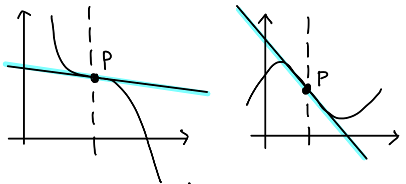
Relatives Extrema

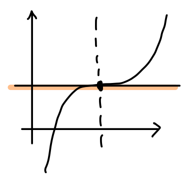
Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$

Falls $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0 \rightarrow$ stelle x_0 relatives Extremum

$f''(x_0) < 0 \rightarrow$ rel. Maximum $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ rel. Minimum

Wendepunkte





Wendepunkte

$f''(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

Steigung: einsetzen der Wendestellen in 1. Ableitung

Sattelpunkt

Zusätzlich:

$f'(x_0) = 0$

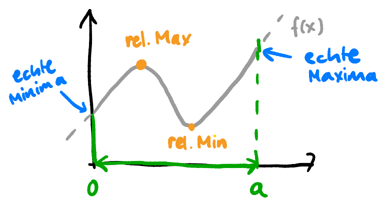
Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion für eine Funktion $y = f(x)$ kann folgende Elemente umfassen:

- Definitionsbereich
- Symmetrie, Periodizität
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (insbes. Nullstellen)
- Polstellen, Definitionslücken
- Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$, Asymptoten
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung
- Wendepunkte, insbesondere Sattelpunkte

Extremwertprobleme

Ziel: Min & Max von $f(x)$



Vorgehen:

① Bestimme die Zielfunktion f und Definitionsbereich D_f

② Nebenbedingungen?

③ Extrema? – bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$
– löse $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ Lösungen x_i
– $f''(x_i) \neq 0$ $= 0 \rightarrow$ keine Extrema
$f''(x_i) < 0 \Rightarrow x_i$ relatives Max.
$f''(x_i) > 0 \Rightarrow x_i$ relative Min.

④ Vergleiche $f(x_i)$ mit Funktionswert bzw. Limes am Rand von D_f.

Bsp. 1) gesucht $\underbrace{x > 0}_{\text{Definitionsbereich}}$ sodass $\underbrace{x^2 + \frac{1}{x}}_{\text{Zielfunktion}}$ minimal.

① $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $D_f =]0, +\infty[$

② Nebenbedingung? keine

③ $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ x^{-2}

$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x^2} = 0$ x^2 (ok weil $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow 2x^3 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}$

* $f''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 2 + \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3} = 2 + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 6 > 0$ also relatives Min. in $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

④ Werte bzw. Lima am Rand vom $D_f =]0, +\infty[$

- $\lim_{x \to 0}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$
- $\lim_{x \to \infty}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$
- $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} < +\infty$ also absolutes Min. in $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

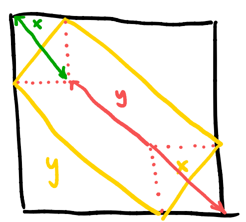
Flächeninhalt:

$f'(x)$ Abgeleitet

$f'(x) = 0$, unbekannte x ausrechnen

unbekannte x in $f(x)$ einsetzen = max. Fläche

BSP 2.) Finde x, y für maximalen Flächeninhalt



① Zielfunktion:

Flächeninhalt: $f(x,y) = x \cdot y$

* Def. Bereich: $D_f =]0, a\sqrt{2}[\times]0, a\sqrt{2}[$ x ↑   y ↑

② Nebenbedingungen?

$x + y = a\sqrt{2} \mid \Leftrightarrow y = a\sqrt{2} - x$

in der Zielfunktion einsetzen:

$f(x,y) = x \cdot y$

$= x(a\sqrt{2} - x^2)$

$f(x) = x \cdot a\sqrt{2} - x^2$

$D_f =]0, a\sqrt{2}[$

neue Zielfunktion

③ $f'(x) = a\sqrt{2} - 2x$

$f''(x) = -2$

Löse $f'(x) = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{2} - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

* $f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = -2 < 0$

d.h. relative Max in $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$f\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} - \left(\frac{2\sqrt{a}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ maximale Flächeninhalt

④ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a\sqrt{2}} f(x) = 0$

$x_{max} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = y_{max}$

Tangentenverfahren von Newton

Ziel: Gleichung lösen

$f(x) = y$; $f'(x) = y'$

1. Iteration

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \ldots$

2. Iteration

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \ldots$

3. Iteration

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \ldots$

⋮

x_0	1.5
x_1	1.642
x_2	.
x_3	.
.	.
.	.

es konvergiert

Integralrechnung

Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$, falls
$F'(x) = f(x)$.

$ae^{bx} \rightarrow \frac{a}{b}e^{bx} + c$ $\qquad$ $a^x \rightarrow \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

$x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\qquad$ $\frac{1}{x} \rightarrow \ln|x| + c$

$\cos(ax+b) \rightarrow \frac{1}{a}\sin(ax-b) + c$

Unbestimmte Integral

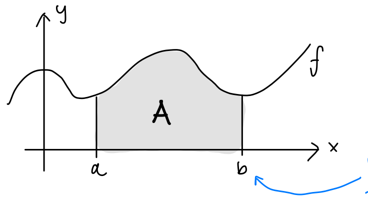
Die Menge aller Stammfunktionen heisst unbestimmtes Integral von $f(x)$, man schreibt $\int f(x)\,dx$. Die Funktion $f(x)$ heisst Integrand.

Unbestimmte Integral von Potenzfunktionen: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

Bsp:

$f(x) = 3x + 2 \Rightarrow F(x) = \int(3x+2)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 2x + C \qquad (c \in \mathbb{R})$

bestimmte Integral



Näherungswert für die ganze Fläche im Bereich $[a,b]$:

bei Quadratische Funktionen, die Nullstellen mit der Mitternachtsformel bestimmen!

$\int_a^b f(x)\,dx = A$

$A = [F(x)]_a^b = (F(b)) - (F(a))$

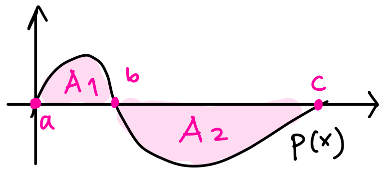
Beispiel:

$$\int_1^3 x^2 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_1^3 =$$
$$\left(\frac{1}{3}1^3 - 2\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 2\cdot 1^2\right) = -\frac{22}{3}$$

EIGENSCHAFTEN / RECHENREGEL

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

mehrere Fläche

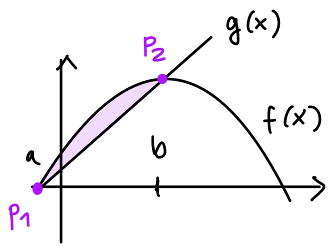


Grundidee: Nullstellen bestimmen, Flächeninhalt zwischen je zwei Nullstellen separat rechnen.

$A = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| + \left|\int_b^c f(t)\,dt\right|$

Absolute Fläche $A_1 - A_2$ (Fläche über dem Strich − unter dem Strich)
Relative Fläche $A_1 + A_2$

mehrere Funktionen



Vorgehen Schnittpunkte finden:

1. $f(x) = g(x)$ auflösen → x-Koordinate
2. x-Punkt in $f(x)$ einsetzen → y-Koordinate

$$A = \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right| + \left|\int_b^c (f(x)-g(x))\,dx\right| + \ldots$$

Berechne $\int_0^2 f(x)\,dx$ für die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 1) \\ -x+2 & (x > 1) \end{cases}$

$\int_0^2 f(x)\,dx =$

$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x+2)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$; $\int_0^2 (x+2)\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + 2x\Big]_0^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$

Folgen und Reihen

FOLGEN

$(a_k) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$

REIHEN

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ $\qquad \sum_{k=1}^{n} a_k$

n ← obere Grenze

$k=1$ ← untere Grenze

Summe der unendliche Reihen $S = \frac{A}{1-q}$

Arithmetische Folgen & Reihen

n-te Partialsumme S_n / Bildungsgesetz der Reihe

$$\boxed{S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \left(A + \frac{n-1}{2} \cdot d\right)}$$

S_n $\quad$ n Glieder

$A \quad (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$

$a_2 - a_1 = d \qquad a_3 - a_1 = d$

n-te Glied der Folge / explizites Bildungsgesetz:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

rekursives Bildungsgesetz:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$$

Reihe:

$a_k = a_1 + a_1 +$

$\cdot q \qquad \cdot q$

Folge:

Geometrische Folgen & Reihen

$$q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

S_n $\quad$ n Glieder

$A \quad (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$

$\cdot x = q \qquad \cdot x = q$

n-te Partialsumme S_n / Bildungsgesetz der Reihe

$$\boxed{S_n = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

n-te Glied der Folge:

$$\boxed{n = \frac{\log(1 - S_n(1-q))}{\log(q)}}$$

unendliche Summenformel:

$$\boxed{S = \frac{A}{1-q}}$$

explizites Bildungsgesetz:

$$\boxed{a_n = A \cdot q^{n-1}}$$

rekursives Bildungsgesetz:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q}$$

Grenzwert von Folgen

Wachstum ins unendliche (keine Grenze),

Konvergent = Grenzwert existiert ; divergent = Grenzwert existiert nicht

- Grenzwert von arithmetische Folgen:

$d > 0: \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$d < 0: \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$d = 0: \lim_{n\to\infty} a_n = A$

- Grenzwert von geometrischen Folgen:

$|q| < 1: \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \rightarrow$ konvergent

$|q| > 1: \lim_{n\to\infty} |q|^n = \infty \quad \rightarrow$ divergent

$q = 1: \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \quad \rightarrow$ konvergent

$q = -1 \quad \lim_{n\to\infty} q^n =$ existiert nicht $\rightarrow$ divergent

Standard Grenzwerte

- harmonische Folge: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- n-te Wurzel: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
- Eulerische Zahl: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Rechnen mit Grenzwerten: Typ $\frac{\infty}{\infty}$

- Bsp: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{7n^5+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{n^5}}}{7 + \underset{\to 0}{\frac{8}{n^5}}} = \frac{0}{7} = 0 \rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{7n^5+8}\right) = 0}_{\text{korrekte Schreibweise}}$

- Bsp: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^2-1} = \frac{n + \overset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}}{1 - \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} = \infty \rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^2-1}\right) = \infty}$

die Folge geht divergent

- $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+2} + 5^n}{5^{n+1} + 3^n} = \frac{5^n \cdot 5^2 + 5^n}{5^n \cdot 5 + 3^n} = \frac{25 \cdot 5^n + 5^n}{5 \cdot 5^n + 3^n} = \frac{\cancel{5^n}(25+1)}{\cancel{5^n}(5 + \underset{\to 0}{(\frac{3}{5})^n})} = \frac{26}{5 + \underset{\to 0}{(\frac{3}{5})^n}} = \frac{26}{5}$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+2} + 5^n}{5^{n+1} + 3^n}\right) = 5.2$, konvergent

Grenzwert von Reihen

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente unendliche Reihe, dann gilt:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Quotientenkriterium auf Kovergenz

Verfahren zur Untersuchung der Konvergenz von unendlichen Reihen

① Berechnung des Grenzwerts

② Entscheidungsregel:

- Falls es ein $q < 1$ gibt mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$

so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

- Falls $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

Potenzreihe

Eine Potenzreihe hat folgende Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad x_0 : \text{Entwicklungspunkt}$$

3.4.1 Wichtige Potenzreihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

POTENZGESETZE

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$(a^n)^m = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

$b = a^c$

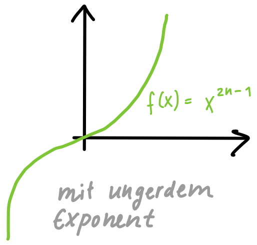
$a = \sqrt[c]{b}$

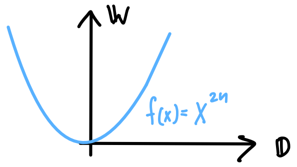
WURZELGESETZE

$$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x+y)\sqrt[n]{a}$$
$$x\sqrt[n]{a} - y\sqrt[n]{a} = (x-y)\sqrt[n]{a}$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{m \cdot n}}$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{m \cdot n}}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

POTENZ- & WURZELFUNKTION

Potenzfunktion $f(x) = y = a x^n$

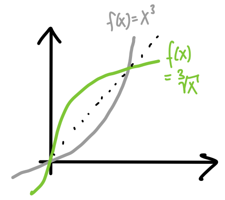


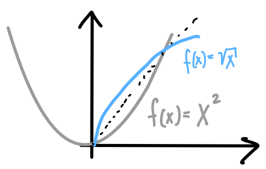


mit ungerdem Exponent

mit geradem Exponent

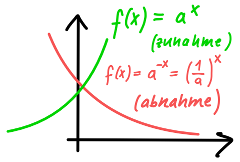
Wurzelfunktion $f(x) = y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
(Umkehrfunktion von Potenzfunktion)





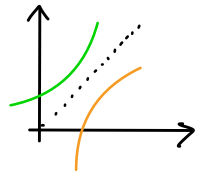
EXPONENTIAL- & LOGA.FUNKTION

Exponentialfunktion $f(x) = y = a^x$



Wachstumsprozess:
$f(x) = f_0 \cdot a^x$

Logarithmusfunktion $f(x) = y = \log_a x$
(Umkehrfunktion von Expo.funk.)



⚠ Wichtig! Umgang mit loga-Gesetze

Basis $e \approx 2.71828$ (für natürliche Loga-/Expo.funktion)

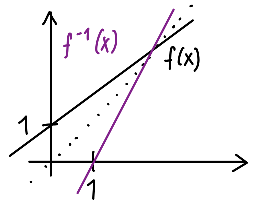
UMKEHRFUNKTION

Kann Berechnungen Rückgängig machen:

SCHRITT 1: löse $f(x) = y$ nach x auf

SCHRITT 2: Vertausche die Variable x & y

• lineare Funktion



• auch möglich mit: quadratfunktion, ...

nach x auflösen:

$$f(x) = 0.5x + 1$$
$$y = 0.5x + 1 \quad | -1$$
$$y - 1 = 0.5x \quad | \cdot 2$$
$$2y - 2 = x$$

tauschen

Umkehrfunktion:
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 2$$

LOGARITHMUSGESETZE

$$a^b = c \longrightarrow b = \log_a(c) = \log_{10}(a^b)$$

I. $\log_a(u\,v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

II. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

III. $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$

Basiswechsel

$$\log_a(x) = \frac{\lg(x)}{\lg(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\log_c(x)}{\log_c(a)} = \frac{1}{\log_a c}$$
$$\log_a(a^x) = x$$
$$\log_{10}(x) = \log(x) = \lg(x)$$
$$\log_e(x) = \ln(x)$$
$$\log_a(1) = 0$$
$$a^{\log_a x} = x$$

$$A = \cos(\alpha) \cdot H = \frac{G}{\tan(\alpha)}$$
$$G = \tan(\alpha) \cdot A = \sin(\alpha) \cdot H$$
$$H = \frac{G}{\sin(\alpha)} = \frac{A}{\cos(\alpha)}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

Kugel:
Oberfläche $4\pi r^2$, *Volumen* $\frac{4}{3}\pi r^3$
Kreis:
Umfang $2\pi r$, *Fläche* πr^2
Zylinger:
$O_{mantel}\ 2\pi r h$, $O_{Deckel}\ 2 \cdot \pi r^2$, Volumen $\pi r^2 h$
Kegel:
$O_{mantel}\ 2\pi + r\pi s$, Volumen $V = \frac{r^2 \pi h}{3}$, Seite $\sqrt{r^2 + h^2}$
Pyramide
Volumen $V = \frac{G \cdot h}{3}$