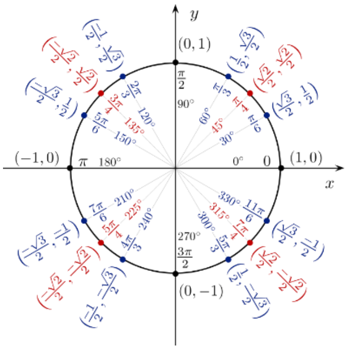
Harmonische Schwingungen

Winkelfunktionen

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$



Additionstheoreme

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Produktformeln

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Summenformeln

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Überlagerungen harmonischer Schwingungen

Überlagerung harmonischer Schwingungen derselben Frequenz

$A\sin(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \beta) = C\sin(\omega t + \gamma)$

$C = \left|\begin{pmatrix} A\cos\alpha + B\cos\beta \\ A\sin\alpha + B\sin\beta \end{pmatrix}\right|$

$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta}\right)$

Überlagerung von Schwingungen unterschiedlicher Frequenz

$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2\cdot\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$

Hyperbolische Funktionen

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

Anwendungen der Differentialrechnung

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Für eine auf [*a*, *b*] differenzierbare Funktion gibt es eine Stelle $\xi \in [a, b]$ welche die gleiche Steigung aufweist, wie die mittlere Steigung in diesem Intervall.

$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Extremwertaufgaben

Hauptbedingung: Was soll minimiert/maximiert werden?

Nebenbedingung: «Zusätzliche Angaben»

Nebenbedingung umformen + in Hauptbedingung einsetzten, vereinfachen

Erhaltene Zielfunktion ableiten. $f' = 0$, $f''\begin{cases} < 0 \; Maximum \\ > 0 \; Minimum \end{cases}$.

Resultat in NB und/oder HB einsetztenf

Taylorreihen

$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$

Konvergenzradius

$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$; $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$

Binomialreihe / Newtonreihe

Die Funktion $f(x) = (1 + x)^\alpha$ besitzt um $x_0 = 0$ die Taylorreihe

$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$

mit den Binomialkoeffizienten

$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha - 1)\cdot(\alpha - 2)\cdot\dots\cdot(\alpha - k + 1)}{k!}$ *und* $\binom{\alpha}{0} = 1$

Bsp. $\binom{0.5}{3} = \frac{0.5\cdot(0.5-1)\cdot(0.5-2)}{3!}$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiele

$y' = a\cdot y$	$y(x) = c\cdot e^{a\cdot x}$
$y'' = -\omega^2 y$	$y = a\cdot\sin(\omega\cdot x) + b\cdot\cos(\omega\cdot x)$ $= A\cdot\sin(\omega\cdot x + \varphi)$
$y'' = \omega^2 y$	$y = c\cdot\sinh(\omega\cdot x) + d\cdot\cosh(\omega\cdot x)$ $= a\cdot e^{\omega x} + b\cdot e^{-\omega x}$
$y' = y^2$	$y = \frac{1}{c - x}$
$y' = y\cdot(1 - y)$	$y = \frac{e^x}{c + e^x} = \frac{1}{c\cdot e^x + 1}$

Lineare gDgl erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'(x) = a\cdot y(x) + b(x)$

$y = y_h + y_p$

Ansatzfunktionen

$b(x)$	$y_p(x)$
konstant	A konstant
Polynom vom Grad n	Polynom vom Grad n
$\sin(\omega x), \cos(\omega x)$	$A\cdot\cos(\omega x) + B\cdot\sin(\omega x)$
e^{bx} $(b \neq -a)$	$A\cdot e^{bx}$
e^{-ax}	$A\cdot x\cdot e^{-ax}$

Lineare gDgl zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Charakteristisches Polynom:

Bsp. $y'' - 3y' + 2y = 0 \Longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

Nullstellen $p(\lambda)$	
zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$y_h = c_1\cdot e^{\lambda_1 x} + c_2\cdot e^{\lambda_2 x}$
eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$	$y_h = (c_1 + c_2 x)\cdot e^{\lambda x}$
komplex konj. Nullstellenpaar $\lambda = r \pm i\omega \in \mathbb{C}$	$e^{rx}\cdot(c_1\cdot\cos(\omega x) + c_2\cdot\sin(\omega x))$

Ansatzmethode für die inhomogene Gleichung

$b(x)$	Bedingung an R $R = \{\lambda \mid p(\lambda) = 0\}$	$y_p(x)$
Polynom vom Grad $n \geq 0$	$0 \notin R$	$A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$
	$0 \in R$, m-fach	$A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + \dots + A_n x^{m+n}$
$e^{-\lambda x}$	$\lambda \notin R$	$A\cdot e^{\lambda x}$
	$\lambda \in R$, m-fach	$A\cdot x^m\cdot e^{\lambda x}$
$\sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$	$\pm j\omega \notin R$	$A\cdot\cos(\omega x) + B\cdot\sin(\omega x)$
	$\pm j\omega \in R$	$x\cdot(A\cdot\cos(\omega x) + B\cdot\sin(\omega x))$

Separierbare gDgl

Eine gDgl erster Ordnung heisst **separierbar**, wenn sie von derForm $y' = f(x)\,g(y)$ ist. Speziell ist jede gDgl der Form $y' = g(y)$ separierbar (man setzt *f*(*x*) = 1).

Vorgehen:

Gleichung umformen $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$

Trennung der Variablen $\frac{1}{g(y)}dy = f(x)\,dx$

Integrieren $\int\frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)\,dx$

Nach y auflösen

Integrationsregeln

$F(x)$	$y = f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x * \ln(a)$
$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	x^n	$n * x^{n-1}$
$\frac{a}{2} * x^2$	ax	a
$x * \ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{x * (\ln(x) - 1)}{\ln(a)}$	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln(a) * x}$
$\ln(\lvert x \rvert)$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln(\lvert x + a \rvert)$	$\frac{1}{x+a}$	
$\frac{2}{3} x^{3/2}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$\frac{a}{2} * x^2$	ax	a
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Partielle Integration
«Umkehrung Produktregel»
Gut geeignet, wenn der Integrand ein Produkt ist.
$\int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$
Wenn einer der Faktoren ein Polynom ist, empfiehlt es sich dieses als v(x) zu wählen:
$\int Polynom \cdot f(x) \Rightarrow f(x) = u'(x);\ Polynom = v(x)$
Ausnahme ln(x) immer v(x)

Erste Substitutionsregel
«Umkehrung Kettenregel»
Gut geeignet, wenn u' auch vorkommt

$$\int_{x=a}^{b} f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int f(u)\ du = F(g(x))$$

Spezialfälle

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int f(x) f'(x)\, dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + c$$

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

Zweite Substitutionsregel

Für eine invertierbare Substitutionsfunktion h gilt	Für eine *invertierbare* Funktion *g* gilt
$\int f(x)\, dx = \int f(h(y)) \cdot h'(y)\ dy$	$\int f(g(x))\ dx = \int f(y) \cdot h'(y)\, dy$
Vorgehen	
Wähle $h(y)$	Wähle invertierbares $g(x)$, bestimme $x = h(y)$
Substituiere $x = h(y),\ dx = h'(y)\, dy$	Substituiere $g(x) = y,\ dx = h'(y)\, dy$
integriere den entstandenen Ausdruck nach *y* Substituiere im Ergebnis der Integration $y = g(x)$ $y = g(x) = h^{-1}(x)$	

Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^2+d^2} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_2}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{Cx+D}{(x-c)^2+d^2}$$

Bestimmte Integrale und Anwendungen

Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

Anwendungen des bestimmten Integrals

Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Volumenberechnungen für Rotationskörper

Um x-Achse: $V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$

Um y-Achse: $V = \pi \int_a^b x^2 f'(x)\, dx$

Mantelfläche

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$