Integrationsmethoden

Integrale der Grundfunktion

Potenzfunktionen:

a) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

b) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Exponential- und Logarithmusfunktionen:

c) $\int e^x\,dx = e^x + C$

d) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$

e) $\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - x + C$

f) $\int \log_a(x)\,dx = \frac{x\cdot\ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$

Integrale der elementaren Funktionen

trigonometrische Funktionen:

g) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

h) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

i) $\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C$

weitere Grundfunktionen:

j) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

k) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$

l) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C$

Integrale von verschobenen Funktionen

Das unbestimmte Integral der um den Betrag k in x-Richtung verschobenen Funktion g(x) = f (x–k) ist

$$\boxed{\int f(x-k)\,dx = F(x-k) + C}$$

Integrale von gestreckten Funktionen

Das unbestimmte Integral der um den Faktor k in x-Richtung gestreckten/gestauchten Funktion g(x) = f (k·x) ist

$$\boxed{\int f(k\cdot x)\,dx = \frac{1}{k}F(k\cdot x) + C \qquad k \neq 0}$$

Partielle Integration

$$\boxed{\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx}$$

Für bestimmte Integral:

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

BERECHNUNGSTRICKS:

welches ist $u'(x)$ und $v(x)$? $\int_a^b u'(x)\,v(x)$

1	L	Logarith. Funktionen	$\ln(x)$
2	I	Inverse Winkelfunktionen	$\arctan(x)$
3	A	Algebraische Funktionen	$x \quad 3x^2 \quad 4x^7$
4	T	Trigonom. Funktionen	$\sin(x) \quad \cos(x)$
5	E	Exponentialfunktionen	e^x

Integration durch Partialbruchzerlegung

BSP: $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

1) Faktorisier den Nenner: (Nullstellen)

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

2) Allg. Form der Zerlegung: Man sucht den konst. A & B

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

3) Gleichnahmig machen

$$\frac{A(x+1)\cdot B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \rightarrow$$ Somit müssen Zähler übereinstimmen $\quad 1 = A(x+1) + B(x-1)$

4) Bestimmung A & B

- Setze $x = 1$: $\quad 1 = A(1+1) + B(1-1) \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
- Setze $x = -1$: $\quad 1 = A(-1+1) + B(-1-1) \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

5) Einsetzen von A und B (Partialbruchzerl.)

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + C$$

⚠ Achtung: mit Nullstellen wie $x(x-3)^2$; $\ln|x|$ form etc !!!

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \overset{\text{in Form}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

Gleichnamig machen:

$A(x+2)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x-1) \rightarrow$ wir müssen ABC finden

$A(x+2)^2 = A(x^2+4x+4) = Ax^2 + A4x + A4$

$B(x-1)(x+2) = B(x^2+x+1) = Bx^2 + Bx + B$

$C(x+1) = Cx + C$

Summe: $(A+B)x^2 + (4A+B+C)x + (4A-2B-C)$

Koeffizientvergleich mit dem Zähler $4x^2+9x-4$:

$$\begin{cases} A+B = 4 \\ 4A+B+C = 9 \\ 4A-2B-C = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ B = 3 \\ C = 2 \end{matrix} \overset{\text{Damit}}{\Longrightarrow} \frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

Integrieren

1. $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$
2. $\int \frac{3}{x+2}\,dx = 3\ln|x+2|$
3. $\int \frac{2}{(x+2)^2}\,dx = \int 2(x+2)^{-2}\,dx = 2\left(\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\right) = -2(x+2)^{-1}$

Endergebnis

$$\int \frac{4x^2+9x-4}{x^3+3x^2-4}\,dx = \ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + C$$

Integral durch Substitution

- Aufstellen & Ableiten der Subst. gleichungen:

$u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

- Durchführen der Sub durch Einsetzen:

$\int x\cdot\cos(x^2)\,dx = \int \cancel{x}\cdot\cos(u)\frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int\cos(u)\,du$

- Berechnung des Integrals in der neuen Variable u:

$\frac{1}{2}\int\cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C$

- Rücksubstitution: $\frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$

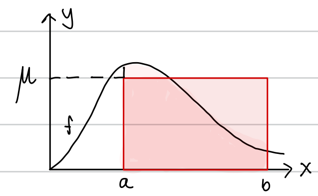
siehe aufgaben!

Anwendung der Integralrechnung

mehr: $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}}\,dx = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + C$

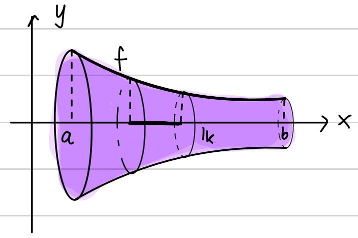
Mittelwert einer Funktion

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$



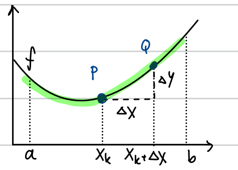
Volumen eines Rotationskörpers

$$\boxed{V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx}$$



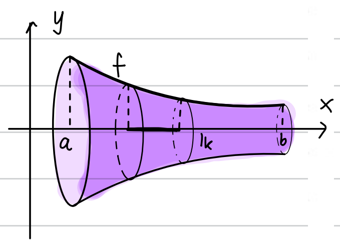
Bogenlänge einer Kurve

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$



Mantelfläche von Rotationskörpern

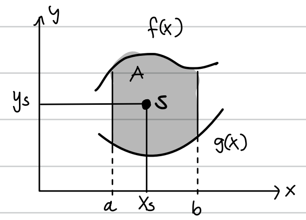
$$\boxed{M = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$



Schwerpunkt ebener Flächen

$$\boxed{\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A}\int_a^b x\cdot(f(x)-g(x))\,dx \\ y_S &= \frac{1}{2A}\int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right)dx \end{aligned}}$$

$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$



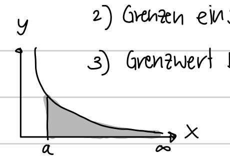
Schwerpunkt von Rotationskörpern

Schwerpunkt $S = (x_S; 0; 0)$ eines Rotationskörper:

$$\boxed{x_S = \frac{\pi}{V}\int_a^b x\cdot f(x)^2\,dx}$$

Uneigentliche Integrale

1) Regulär Integrieren
2) Grenzen einsetzen
3) Grenzwert berechnen



Uneigentliche Integrale erster Art

Eine Grenze ist unendlich gross

Typ I: $I = \int_a^{\infty} f(x)\,dx = I(\lambda)\int_a^{\lambda} f(x)\,dx$

ZB:

- $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_1^{\lambda} x^{-2}\,dx$

$= \lim_{\lambda\to\infty} -\left[x^{-1}\right]_1^{\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} -\left(\lambda^{-1} - 1\right) = \lim_{\lambda\to\infty} -\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) = 1$

Typ II: $I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{b} f(x)\,dx\right)$

Typ III: $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow$ künstliche Zwischengrenze $\Rightarrow \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$

$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,dx\right) + \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_c^{\lambda} f(x)\,dx\right)$

konvergent: wenns eine Zahl gibt

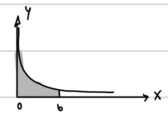
divergent: wenns gegen ∞ oder 0 geht ??

konvergenz in Abhängigkeit vom Parameter

Uneigentliche Integrale zweiter Art

Eine Grenze ist Polstelle des integranden

$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$



Vorgehen:

$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \; ; \quad \epsilon > 0$

$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx\right)$

Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heisst konvergent, falls der Limes $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$ existiert, andernfalls divergent.

Taylorreihen

Potenzreihen

Spezielle Potenzreihe: Eine Potenzreihe ist eine Unendliche Reihe vom Typ: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Allgemeine Potenzreihe: ensteht durch verschiebung um x_0:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

Bestimmung des Konvergenzbereichs: Menge der x in $p(x)$ für die $p(x)$ konvergierte → nicht für alle x !

Taylorkoeffizienten

Allgemeiner Formel

an $x_0 = 0$: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$; an $x_0 \in \mathbb{R}$: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

zusammengefasst entsteht die allgemeine Schreibweise:

$$t_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \ldots$$

$$t_f(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k} \quad !$$

→ in günstigen fällen sind $f(x)$ & $t_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ identisch → nicht immer

Taylorreihe / Taylorentwicklung

$y = f(x)$ an der Stelle x_0 deren ableitung an x_0 für alle $k \in \mathbb{N}$ mit den ableitungen von $f(x)$ an x_0 übereinstimmen !

$$\boxed{t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k}$$

Taylorkoeffizienten

erfüllt die Bedingungen:

$$\boxed{f^{(k)}(x_0) = t_f^{(k)}(x_0), \quad k \in \mathbb{N}}$$

Taylorpolynom

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k}$$

wenn taylorreihe $t_f(x)$ nach dem term n-ten Ordnung abgebrochen wird → taylorpolynom n-ter Ordnung von $f(x)$ bei x_0

Die Gleichheit: $\boxed{f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0), \quad k \in \mathbb{N}}$

→ tangente an $y = f(x)$ an x_0 ist exakt taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ an x_0 !

BSP: $\sin(x)$ / $\cos(x)$

$$t_{\cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$t_{\sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Symmetriebetrachtungen

Gerade Funktionen: Achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse

$$f(-x) = f(x)$$

gerade taylorr: nur gerade exp. → $a_{2k+1} = 0$ ($\cos(x)$)

Ungerade Funktionen: Punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs

$$f(-x) = -f(x)$$

Ungerade taylorr: nur ungerade expon. → $a_{2k} = 0$ ($\sin(x)$)

Symmetrie von Potenzreihen

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

ist nur gerade/ungerade, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.

Symmetrie von Taylorreihen

- gerade Funktion: enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit geraden Exponenten

$$t_{\cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$y = \cos(x)$ → gerade Funktion, Taylorreihe $t_{\cos}(x)$ nur gerade Potenzen

- ungerade Funktion: enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit ungerade Exponenten

$$t_{\sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$y = \sin(x)$ → ungerade Funktion, Taylorreihe $t_{\sin}(x)$ nur ungerade Potenzen

Binomialreihe: Allgemeine Formel

"n tief k" $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \le k \le n)$

- Diese Reihe heisst Binomialreihe: Verallg. der binomischen Formel

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + x^n}$$

auf nicht-natürlichen Exponent

Taylorreihe von $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig

- Binomiale Koeffizienten:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

an $x_0 = 0$: $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$; an $x_0 \in \mathbb{R}$: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

- Binomialreihe:

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Anwendung von Taylorpolynom (Schritt-für-Schritt-Anleitung)

"erst entwickeln, dann einsetzen"

- Taylorpolynom k. Ordnung

$f(x) =$
$f'(x) =$
$f''(x) =$
$f^{(k)}(x) =$

gewöhnliche Ableitung bis zur k. Ordnung entwickeln

Ausgewertet an der Stelle $x_0 = y$

$f(y) =$
$f'(y) =$
$f''(y) =$
$f^{(k)}(y) =$

die Zahl y einsetzen

- Gesuchte Taylorpolynom $p(x)$:

(Schöner umformen)

$$P(x) = \frac{f(y)}{0!} + \frac{f'(y)}{1!}x + \frac{f''(y)}{2!}x^2 + \frac{f^{(k)}(y)}{k!}x^k = \ldots$$

- Bei der Integration von $\int_a^b$ a bis b : (meist steht in der Aufgabenstellung die x zu ersetzen)

$$\int_a^b (\ldots)\,dx = [\ldots]_a^b = \ldots$$

Regel von Bernoulli-de l'Hospital (Grenzwertberechnung)

Bei Brüche:
(siehe Grenzwerte!)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

① Oberen & unteren Wert ableiten
② x mit x_0 ersetzen, bei ∞: x ausklammern
③ Entweder es gibt eine Zahl, null oder unbestimmt

Konvergenz von Potenzreihen

Kovergenzbereich bestimmen:

a) $p_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

c) $p_3(x) = 1 + \frac{x}{4\cdot 2} + \frac{x^2}{4^2\cdot 3} + \frac{x^3}{4^3\cdot 4} + \frac{x^4}{4^4\cdot 5} + \ldots$

- Ich entwickle eine allgemeine Formel einer Reihe

ⓐ
$x^0 \to 1 = a_0$
$x^1 \to 2x = a_1 x^1 \Rightarrow a_1 = 2$
$x^2 \to 3x^2 = a_2 x^2 \Rightarrow a_2 = 3$
$x^3 \to 4x^3 = a_3 x^3 \Rightarrow a_3 = 4$
$x^4 \to k{+}1\, x^k = a_k x^k \Rightarrow \underline{a_k = k+1}$ $\Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{a_k}^{k+1} x^k$

ⓒ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k(k+1)} x^k \longrightarrow \underline{a_k = \frac{1}{4^k(k+1)}}$

- Konvergenzradius:

ⓐ

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k+2}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{k}(1+\frac{1}{k})}{\cancel{k}(1+\frac{2}{k})}\right| = 1$$

ⓒ

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{4^k(k+1)}}{\frac{1}{4^{k+1}(k+2)}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{4^{k+1}(k+2)}{4^k(k+1)}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{4^{k+1}\cancel{k}(1+\frac{2}{k})}{4^k\cancel{k}(1+\frac{1}{k})}\right| = \lim_{k\to\infty} 4^{(k+1)-k} = 4$$

- Verhalten am Rand: (Richtige Darstellungsart)

ⓐ
$x = \rho = 1$: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots$: divergent
$x = -\rho = -1$: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \pm \ldots$ divergent

ⓒ
$x = \rho = 4$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$: divergent
$x = -\rho = -4$: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$: konvergent

- Potenzreihe konvergiert also für:

ⓐ $-1 < x < 1$

ⓒ $-4 \le x < 4$

Differentialgleichungen

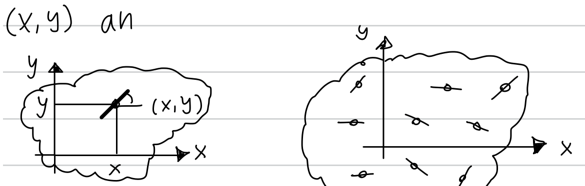
Grundbegriffe

- Gesucht ist die Funktion mit der Eigenschaft:
  $y' = y$ (Diese Bedingung ist eine DGL!)
- Gesuchte Funktionen:
  $y = C \cdot e^x$, $C \in \mathbb{R}$ ($e^x + C$ ist falsch!)
- Anfangsbedingung $y(0) = 3$ einsetzen (zB)
  $3 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 3$

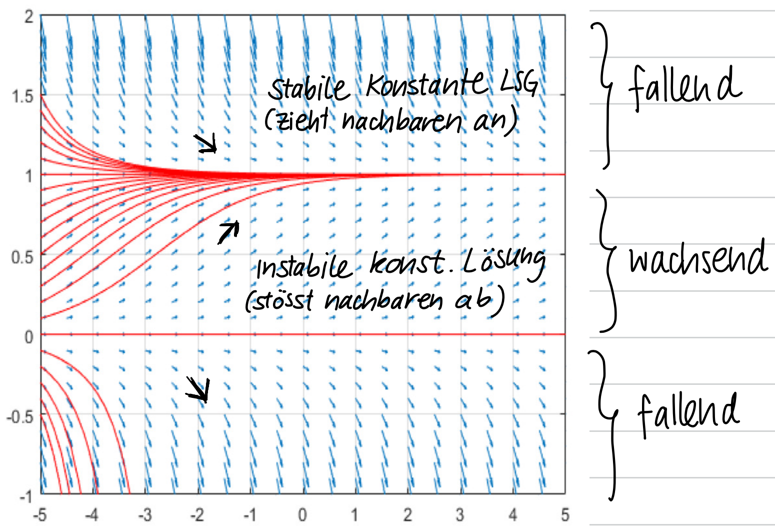
d.h. die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems AWP ist: $y = 3 \cdot e^x$

Geometrische Verfahren

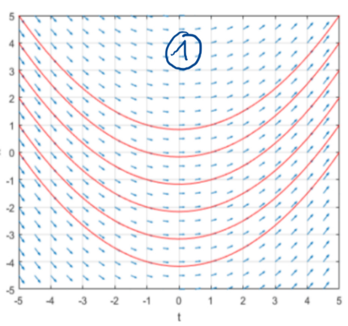
- Ziel: geom. Verständnis von expliziten DGL 1. Ordnung: $y' = f(x, y)$
- Idee: $f(x,y)$ gibt die Steigung der Lösungskurve im Punkt (x, y) an



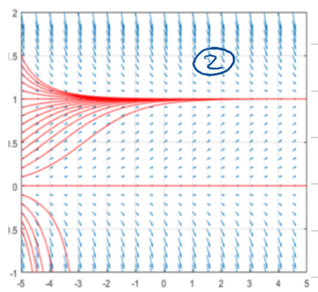
Alle Steigungen ergeben ein Vektorfeld in der Ebene an, das Richtungsfeld der DGL $y' = f(x,y)$
Wir erhalten so die Tangenten an die Lösungskurven



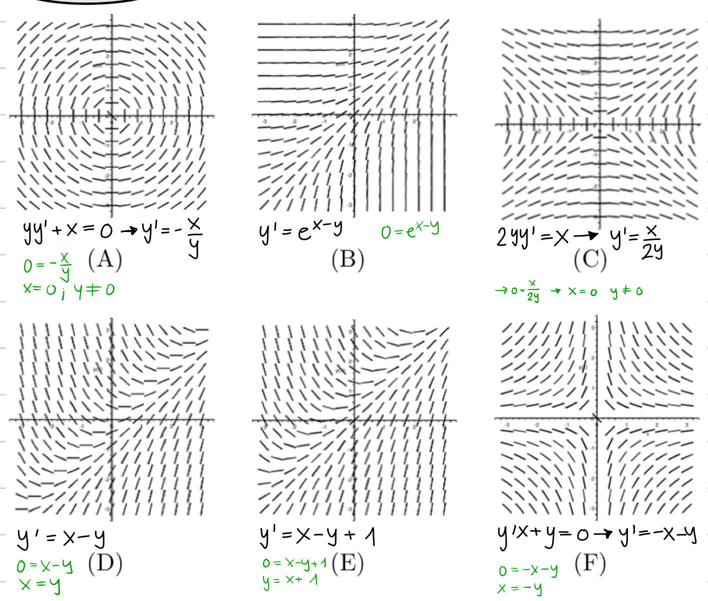
unbestimmtes Integral:
- unabhängig von y



autonomes Integral:
- unabhängig von x
- nur abhängig von y



Beispiele

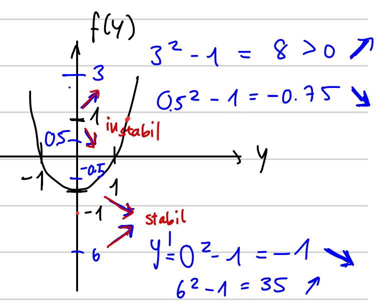


4. Finden und klassifizieren Sie die konstanten Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:
a) $y' = y^2 - 1$
b) $y' = y^2$
c) $y' = y^3$
d) $y' = -y^3$

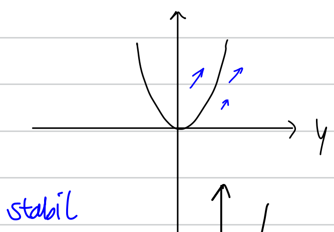
Erstellen Sie dazu jeweils einen Plot des Richtungsfelds bzw. der Lösungskurven der DGL, um die analytisch gewonnen Stabilitätsaussagen zu bestätigen.

merke: Zahl > 0: Pfeilrichtung ↗
Zahl < 0: Pfeilrichtung ↘

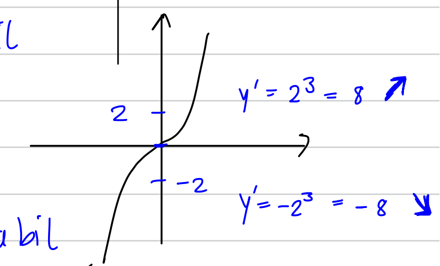
a) $0 = y^2 - 1$
$1 = y^2 \rightarrow y = \pm 1$
$y_1 = 1$: instabil
$y_2 = -1$: stabil



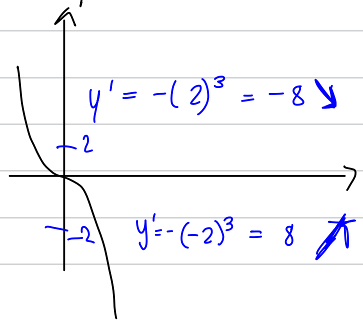
b) $0 = y^2$
$y = 0$
$y_1 =$ semi-stabil



c) $0 = y^3$
$y = 0$: instabil



d) $0 = -y^3$
$y = 0$



Lineare DGL

homogene DGL: trennbar!

$\boxed{y' + f(x)y = 0}$ Lösung: $y = K \cdot e^{-F(x)}$

inhomogene DGL:

$y' + f(x)y = g(x)$ ⟵ Störfunktion

Annahme: es gibt eine Lösung der Form $y = k(x) \cdot e^{-F(x)}$
$k(x) = \int g(x) e^{F(x)} dx$

allgemeine Lösung:

Muster: $\boxed{y' + f(x)y = g(x)}$

ist gegeben durch:

Lösungsformel: $\boxed{y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) e^{F(x)} dx}$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist

Schritt-für-Schritt-Vorgehen:
1. y auf eine Seite bringen, x auf die andere
2. Muster: $\boxed{y' + f(x) = g(x)}$; $f(x)$ & $g(x)$ bestim.
3. Lösungsformel anwenden $y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) e^{F(x)} dx$
4. Anfangswert einsetzen & nach C auflösen

Separierbare DGL:

$y' = F(x,y)$ kann man als $y' = f(y) \cdot g(x)$ schreiben.

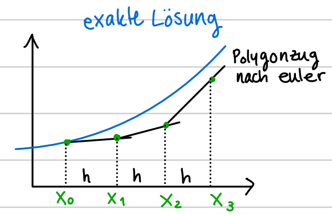
Muster: $\boxed{y' = f(y) \cdot g(x)}$

→ autonome DGL der Form $y' = f(y)$ sind separierbar!

Schritt-für-Schritt-Vorgehen:
1. $y' = \frac{dy}{dx}$ umschreiben
2. Trennung der Veränderlichen: eine Seite x, andere y
3. Integrieren & die Seite mit x mit C ergänzen
   nach y umschreiben (optional)
4. Für spezielle Lösung: Anfangswert einsetzen

Nummerische Verfahren

Approximation der unbekannten Lösungen durch einen "Streckenzug" aus Geradenstücken mit den durch DGL gegebenen Steigungswerten
Gleichung der Gerade mit Steigung m im Punkt (x_k, y_k):



Expliztes Euler-Verfahren

Algorithmus:

$$\boxed{\begin{aligned} x_k &= x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{aligned}}$$

⚠ $f(x,y)$ nicht die Lösungsfunktion!

Schritt-für-Schritt Vorgehen: (Lösungsverfahren)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1. DGL nach y auflösen, falls es nicht geht: Euler-Verfahren
2. Das $f(x,y)$ in Euler-Algorithmus einsetzen
3. h & k in Aufgabe gegeben; Algorithmus durchführen:
   - alle x_k berechnen
   - alle y_k anhand der x_k berechnen