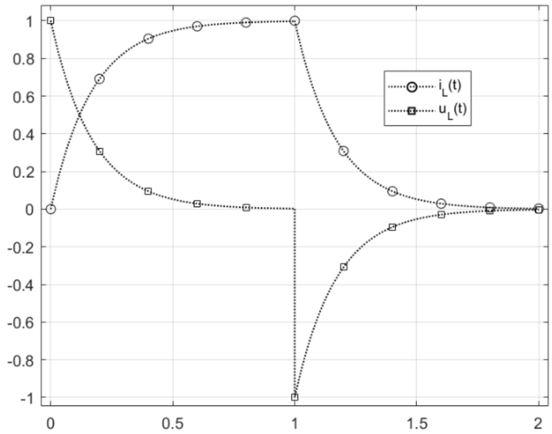
# Elektrizitätslehre 2

## Schaltverhalten einer Spule




*Lade- und Entlade-Kurve Spule*

| | Spule | Kondensator |
|---|---|---|
| Laden | $I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \overset{\tau=\frac{L}{R}}{\Longrightarrow} I_0\left(1 - e^{-t\frac{R}{L}}\right)$<br>$U(t) = U_1 \cdot e^{-t\frac{R}{L}}$ | $U(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$<br>$I(t) = I_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ |
| Entladen | $I(t) = I_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \overset{\tau=\frac{L}{R}}{\Longrightarrow} I_1 \cdot e^{-t\frac{R}{L}}$<br>$u(t^*) = u^* \cdot e^{-t\frac{R}{L}}$<br>falls ab t* : $t^* \ \rightarrow (t - t_1)$ | $U(t) = U_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$<br>$I(t) = -I_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ |

**«Zeit»**

| | |
|---|---|
| Zeit | $t$ |
| Periodendauer | $T$ |
| Zeitkonstante | $\tau \begin{cases} R \cdot C \ (Kondensator) \\ \frac{L}{R} \ (Spule) \end{cases}$ |

## Wechselstromlehre

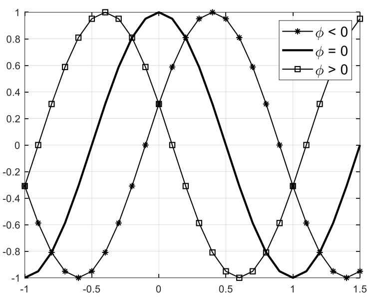
### Wechselstrom Umrechnungen

| Zeitverlauf | $i(t)$ | $u(t)$ |
|---|---|---|
| Komplexe Zeitfunktion | $\underline{I}(t) = \hat{I} \cdot cos(\omega t + \varphi_i)$<br>$+j \cdot \hat{I} \cdot sin(\omega t + \varphi_i)$ | $\underline{U}(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$<br>$+j \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ |
| | $\underline{I}(t) = \ \hat{I} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$ | $\underline{U}(t) = \ \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$ |
| Amplitude | $\hat{I}$ | $\hat{U}$ |
| Spitzen-Spitzen-Wert | $I_{pp} = 2 \cdot \hat{I}$ | $U_{pp} = 2 \cdot \hat{U}$ |
| | $i = \hat{I} \cdot \cos\,(\omega t + \varphi_i)$ | $u = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$<br>$= Re\{\underline{U}(t)\}$ |
| Komplexe Amplitude | $\underline{\hat{I}} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi i}$ | $\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}$ |
| **Effektivwert** | $\boldsymbol{I} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$ | $\boldsymbol{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ |
| **Komplexer Effektivwert (RMS Phasor)** | $\underline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{e^{j\varphi_i}}$ | $\underline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{e^{j\varphi_u}}$ |

$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

## Frequenz und Phasenwinkel

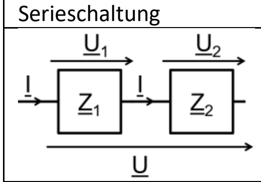
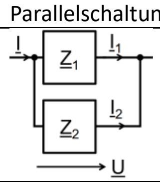
| | | L | C |
|---|---|---|---|
| Frequenz | $f = \frac{\omega}{2\pi}$ | | |
| Kreisfrequenz | $\omega = f * 2\pi$ | | |
| Aktueller Winkel | $\varphi(t) = \omega * t$ | | |
| Phasenverschiebungswinkel | $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ | *90°* | *-90°* |
| Nullphasenwinkel des Stromes | $\varphi_i = -t_{\hat{I}} \cdot 2\pi f = \frac{-t_{\hat{I}}}{T} \cdot 2\pi$ | *Spannung früher* | *Strom früher* |
| Nullphasenwinkel der Spannung | $\varphi_u = -t_{\hat{U}} \cdot 2\pi f = \frac{-t_{\hat{U}}}{T} \cdot 2\pi$ | | |
| | $2\pi = 360°$ | | |




## Komplexe Wechselstromgrössen

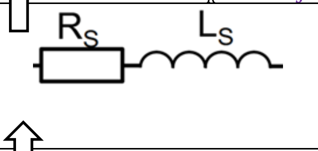
| | Widerstand R | Kapazität C | Induktivität L |
|---|---|---|---|
| Impedanz $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = R + jX$ | $R$ | $\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$ | $j\omega L$ |
| Scheinwiderstand $Z = \lvert\underline{Z}\rvert = U/I$ | $R$ | $\frac{1}{\omega C}$ | $\omega L$ |
| Admittanz $\underline{Y} = \underline{I}/\underline{U} = 1/\underline{Z} = G + jB$ | $1/R = G$ | $j\omega C$ | $\frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$ |
| Scheinleitwert $Y = \lvert\underline{Y}\rvert$ | $1/R = G$ | $\omega C$ | $\frac{1}{\omega L}$ |
| Resistanz $R = Re\{Z\}$ | $R$ | 0 | 0 |
| Reaktanz $X = Im\{Z\}$ | 0 | $\frac{-1}{\omega C}$ | $\omega L$ |
| Konduktanz $G = Re\{Y\}$ | $1/R = G$ | 0 | 0 |
| Suzeptanz $B = Im\{Y\}$ | 0 | $\omega C$ | $\frac{-1}{\omega L}$ |
| | $u = R \cdot i$ | $i = C \cdot \frac{du}{dt}$ | $u = L \cdot \frac{di}{dt}$ |
| | $\underline{U} = R \cdot \underline{I}$ | $\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$ | $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$ |

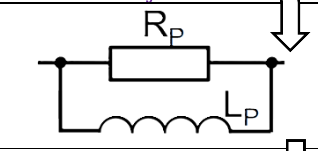
## Serie- und Parallelschaltung

| Serieschaltung | Parallelschaltung |
|---|---|
|   |   |
| $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \Leftrightarrow \underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ | $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \Leftrightarrow \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$<br>$\underline{Z} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\underline{Z}_n}\right)^{-1}$ |
| $Z = \lvert\underline{Z}\rvert = \lvert\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\rvert \neq \lvert\underline{Z}_1\rvert + \lvert\underline{Z}_2\rvert$ | $\underline{Z} = \underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ |
| Spannungsteiler: $\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\lvert\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\rvert} \cdot \underline{U}$ | Stromteiler: $\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{I}$ |

## Schaltungskonversionen

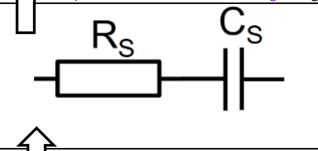
$R_p = \frac{1}{Y_R} = \frac{R_S^2+\omega^2 L_S^2}{R_S}; L_p = \frac{R_S^2+\omega^2 L_S^2}{\omega^2 L_S}$

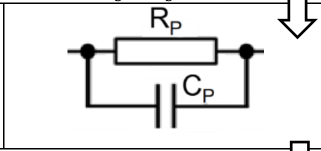



$R_S = \frac{\omega^2 R_P L_P^2}{R_P^2+\omega^2 L_P^2}; L_S = \frac{R_P^2 L_P}{R_P^2+\omega^2 L_P^2}$

$R_P = R_S + \frac{1}{R_S \omega^2 C_S^2}; C_P = \frac{C_S}{1+R_S^2\omega^2 C_S^2}$



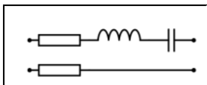
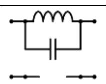
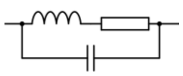

$R_S = \frac{R_P}{1+R_P^2\omega^2 C_P^2}; C_S = \frac{1+R_P^2\omega^2 C_P^2}{R_P^2\omega^2 C_P}$

## Leistung

| | | R | C | L |
|---|---|---|---|---|
| Momentanleistung $p(t)$ | $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ | | | |
| | $p(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi u) \cdot \hat{I}\cos(\omega t + \varphi i)$ | | | |
| | $p(t) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi u + \varphi i)]$ | | | |
| Wirkleistung P[W] | $P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$ | *U·I* | *0* | *0* |
| Blindleistung Q [var] | $Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$ | *0* | *-U·I* | *U·I* |
| Scheinleistung S [VA] | $S = U \cdot I = \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{Q}{\sin(\varphi)}$ | | | |
| kompl. Scheinleistung $\underline{S}$ [VA] | $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$ | | | |
| Leistungsfaktor λ | $\lambda = \frac{P}{S} = \cos(\varphi)$ | | | |
| Blindfaktor | $\frac{Q}{S} = \sin(\varphi)$ | | | |

## Resonanz

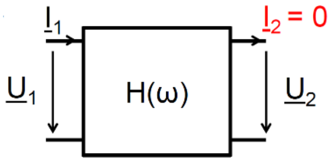
Blindleistung muss gleich sein.

| | |
|---|---|
|   | $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$ |
|  | $\omega_r = \sqrt{\frac{L - R^2 C}{L^2 C}}$ |

## Leistung und Impedanz

| Leistung und Impedanz | Leistung und Admittanz |
|---|---|
| $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = R + jX$ | $\underline{Y} = \underline{I}/\underline{U} = 1/\underline{Z} = G + jB$ |
| $R = \frac{P}{I^2}; X = \frac{Q}{I^2}$ | $G = \frac{P}{U^2}; B = \frac{-Q}{U^2}$ |
| | $P \neq \frac{U^2}{R}$ |

# Frequenzverhalten linearer Netzwerke




Frequenzgang = grafische Darstellung von H(ω)

Übertragungsfaktor = H(ω) bei bestimmtem ω
Amplitudengang = Plot von |H(ω)|
Phasengang = Plot von arg(H(ω))
Frequenzgang = Plot von H(ω) und arg(H(ω))

Komplexer Spannungsteiler
Frequenzgangfunktion $H(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_n}{\underline{Z}_1 + \cdots + \underline{Z}_n}$
Rezept:
$H(\omega) = \frac{\underline{Z}_n}{\underline{Z}_1 + \cdots + \underline{Z}_n}$ aufstellen
Doppelbrüche durch erweitern eliminieren
So umformen, dass $\tau$ $(L/R \ oder \ R \cdot C)$sich «rauslesen» lässt
Amplitudengang: Betrag von *H(ω)* berechnen und plotten.

## Bodediagramm

X-Achse: Frequenz normiert Ω: $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$; $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \cdot \tau$ ; $\omega = \frac{\Omega}{\tau}$
Y-Achse: $|H(\omega)|$ in dB
Dezibel
Für Leistungen: $y = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$
Für Spannungen: $y = 20 \cdot \log_{10} \frac{U_2}{U_1}$ weil $P \propto U^2$

| dB | $U_2/U_1$ | $P_2/P_1$ |
|---|---|---|
| 3 | $\sqrt{2}$ | 2 |
| 0 | 1 | 1 |
| -3 | $1/\sqrt{2}$ | $1/2$ |
| -6 | $1/2$ | $1/4$ |
| -10 | $1/\sqrt{10}$ | 0.1 |
| -20 | 0.1 | 0.01 |
| -40 | 0.01 | 0.0001 |

Definitionen:
«Grenzfrequenz» = -3 dB Frequenz = $f_0$
Trennt «Durchlassbereich» von «Sperrbereich»
- Es gilt: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot \tau}$
«System 1. Ordnung»: -20 dB/Dk im Sperrbereich
«System 2. Ordnung»: -40 dB/Dk im Sperrbereich

## Bestimmen Parameter für Normierung

Bei Systemen 2. Ordnung:

| | Beispiel | | |
|---|---|---|---|
| | | $\frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$ | |
| Term bei $\omega^2$als $\omega_0$ wählen<br>$\omega = \frac{\Omega}{\tau}$ berechnen<br>$\omega$ in Term ersetzen | $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$<br>$\Omega = \omega \cdot \sqrt{LC}$<br>$\omega = \Omega/\sqrt{LC}$ | $\frac{1}{1 + j\Omega R\sqrt{\frac{C}{L}} + (j\Omega)^2}$ | |
| Gütefaktor Q = $\lvert H(\Omega = 1) \rvert$<br>$\Omega = 1$ setzen, Term berechnen<br>Betrag ziehen<br>Nach $\frac{1}{Q}$ umformen<br>Komponentenwerte bei $j\Omega$-Term ersetzten | $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$<br>$R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}$ | $\frac{1}{1 + j\frac{\Omega}{Q} + (j\Omega)^2}$ | Überhöhung:<br>bei $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ kann $U_2$ grösser als $U_1$ werden (Resonanz) |

Frequenz der Überhöhungs-Spitze: $\Omega_{max} = \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}}$

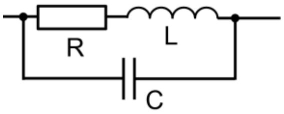
Höhe der Spitze $|H(\Omega)_{max}| = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q^2}}}$

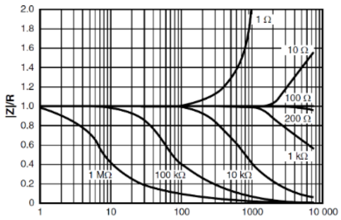
# Eigenschaften realer Bauelemente

Bei höheren Frequenzen werden parasitäre Eigenschaften relevant. Z.B. bekommen Widerstände Kapazitive und Induktive Eigenschaften.

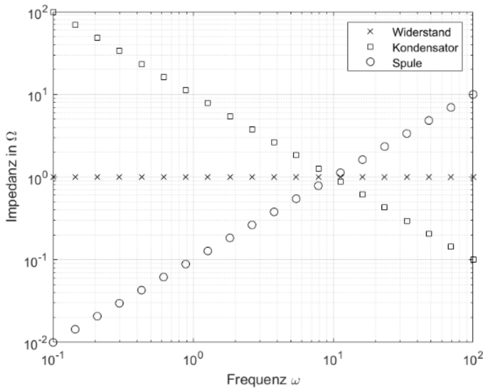
## Widerstand

Zuleitungsinduktivität L
Kapazität zwischen den Anschlüssen C




*Impedanz Chipwiderstand*




*Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz (ideale Bauteile)*

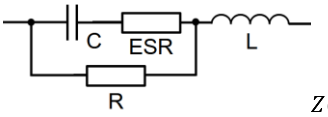
$\frac{\underline{Z}(\omega)}{R} = \frac{1+j\Omega\cdot Q}{1+j\frac{\Omega}{Q}+(j\Omega)^2}$ $\quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\quad \omega = \Omega/\sqrt{LC}$

$\underline{Z}(\omega) = \frac{R+j\omega L}{1+j\omega RC+(j\omega)^2 LC}$

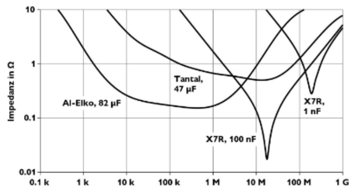
## Kondensator

Parasitäre Eigenschaften:

- Dynamischer Umladewiderstand ESR = Equivalent Series Resistance
- Zuleitungsinduktivität L
- Selbstentladungswiderstand R




$Z(\omega) = \frac{R+j\omega C\cdot ESR\cdot R}{1+j\omega C\cdot(ESR+R)} + j\omega L$




*Impedanz Kondensatoren*

Selbstentladungswiderstand R oft vernachlässigbar, dann: $Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C} + ESR + j\omega L$

Eigenresonanzfrequenz bei $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Über Eigenresonanzfrequenz verhält sich ein Kondensator induktiv.

Güte, Verlustfaktor, Verlustwinkel beim Kondensator
Unter Vernachlässigung von R und L gilt:

Güte $Q_C(\omega) = \frac{-Q}{P}\left(\frac{-\text{Blindleistung}}{\text{Wirkleistung}}\right) = \frac{-I^2\cdot\frac{-1}{\omega C}}{I^2\cdot ESR} = \frac{1}{\omega C\cdot ESR}$

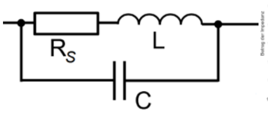
Verlustfaktor $d(\omega) = \frac{1}{Q_C} = \frac{P}{-Q} = \frac{\cos(\varphi)}{-\sin(\varphi)} = \frac{-1}{\tan(\varphi)}$

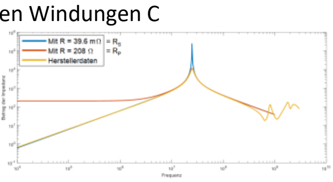
Verlustwinkel $\delta(\omega) = \arctan(d) \Leftrightarrow \tan(\delta) = d$

## Spule

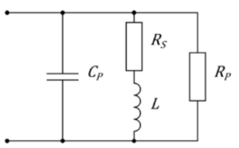
Parasitäre Eigenschaften:

- Widerstand R
- Kapazität zwischen Windungen C



Kernverluste werden nur mit aufwändigem Modell einberechnet:




Widerstand $R_S$ kann auch Widerstandsänderung durch Proximity-Effekt und Skineffekt enthalten

Güte, Verlustfaktor, Verlustwinkel bei der Spule
Unter Vernachlässigung von R und C, einfaches Modell, gilt:

Güte $Q_L(\omega) = \frac{Q}{P}\left(\frac{\text{Blindleistung}}{\text{Wirkleistung}}\right) = \frac{I^2\cdot\omega L}{I^2\cdot R} = \frac{\omega L}{R}$

Verlustfaktor $d(\omega) = \frac{1}{Q_L}$

Verlustwinkel $\delta(\omega) = \arctan(d) \Leftrightarrow \tan(\delta) = d$