Vektorraum

VR sei eine Menge V mit Addition und einer Skalarmultiplikation
V darf durch Rechnen nicht verlassen werden.
$u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$
$v \in V, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot v \in V$
Addition
i) Assoziativität: $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$
ii) Existenz der Null: $\exists 0 \in V: v + 0 = v, \forall v \in V$
iii) Existenz des Negativen: $\forall v \in V \, \exists - v \in V : v + (-v) = 0$
iv) Kommutativität: $v + w = w + v, \forall v, w \in V$
Multiplikation
v) Assoziativität: $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$
vi) Neutralelement der Eins: $\exists 1 \in V: v \cdot 1 = v, \forall v \in V$
Distributivgesetze:
vii) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w, \forall \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$
viii) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$

Unterräume

Ein Unterraum U ist eine Teilmenge eines Vektorraums V , die selbst auch wieder ein Vektorraum ist.
Es muss nur überprüft werden, ob man durch Rechnen den Unterraum nicht verlässt (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Skalarmultiplikation)
In einem Unterraum muss der Nullvektor vorhanden sein.
$u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
$v \in U, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$
Zusammengefasst: $u, v \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in U$

Linearkombination

Sei V ein VR. Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ beliebige Vektoren aus V und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ beliebige Skalare. Dann nennt man den Vektor $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$.
Durch Linearkombinationen bildet man linear abhängige Vektoren.

Lineare Unabhängigkeit

Falls die Vektoren linear unabhängig sind, ist $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ die einzige Lösung von $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$

Überprüfung:

- Vektoren in Spalten einer Matrix schreiben
- Gauss-Algorithmus
- Maximaler Rang (Anz. Pivots r = Anzahl Spalten n) = linear unabhängig

Beispiele

Vektorraum	Vektoren	Matrix
$\mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$
P_2	$3, 2x, x^2$	$\begin{array}{r} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{array} \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\3 & 0 & 0\\3 & -2 & 1\end{pmatrix}$
$\mathbb{C}^{2x2}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -i\\0 & -1 & i\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Linearkombination berechnen bei linear abhängigen Vektoren

Freie Variable einführen, beliebiger Wert (oft -1) für freie Variable setzten, Gleichungssystem lösen
$v_1 + 2v_2 - v_3 + 3v_4 = 0 \Rightarrow v_1 = -2v_2 + v_3 - 3v_4$

Lineare Hülle

Ist ein Unterraum von V. Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$. Geschrieben: $span(a, b, c)$

Erzeugendensystem

Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ heissen Erzeugendensystem, falls sie den ganzen Vektorraum aufspannen: $span(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$
Anders ausgedrückt: $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ bilden ei Erzeugendensystem falls sich jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ausdrücken lässt:
$\forall v \in V \, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

Basis

$\mathfrak{B}$ heisst Basis von V , falls
i) $\mathfrak{B}$ linear unabhängig ist.
ii) $\mathfrak{B}$ ein Erzeugendensystem von V ist, d.h. $span(\mathfrak{B}) = V$.

Standardbasis

$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ist die Standardbasis vom $\mathbb{R}^3$
$\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$ ist eine Standardbasis vom P_2

Dimension

Die Dimension eines VR ist die Anzahl Vektoren der Basis
$\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}\ von\ V : dim(V) = n$
Basis bestimmen:

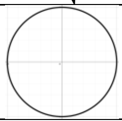
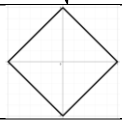
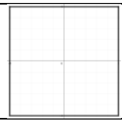
- Vektoren in Spalten einer Matrix schreiben
- Gauss-Algorithmus
- Spalten ohne Pivot streichen

Koordinatenvektor

Ist V ein Vektorraum und $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V, so kann jeder Vektor $v \in V$ eindeutig in der Form $v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ geschrieben werden. Der Koordinatenvektor ist dann folgender: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.
Der Koordinatenvektor ist abhängig von der gewählten Basis.

Norm

i) absolut homogen: $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \ \ \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$
ii) subadditiv: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \ \ \forall v, w \in V$
iii) definit: $\|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0$

	Euklidische Norm	p-Norm	Maximums-Norm
	$\|x\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert^p}$	$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \lvert x_i \rvert$
Einheitskreis			
$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\|a\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3.74$	$\|a\|_1 = \lvert 1 \rvert + \lvert -2 \rvert + \lvert 3 \rvert = 6$	$\|a\|_\infty = 3$

Matrixnormen

	Frobenius-Norm	Zeilensummennorm	Spaltensummennorm
	$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert^2}$	$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert$	$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lvert a_{ij} \rvert$
$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\|M\|_F = \sqrt{\lvert 1 \rvert^2 + \lvert -5 \rvert^2 + \lvert -3 \rvert^2 + \lvert 2 \rvert} = \sqrt{39} \approx 6.24$	$\|M\|_\infty = max\{\lvert 1 \rvert + \lvert -5 \rvert,\ \lvert -3 \rvert + \lvert 2 \rvert\} = 6$	$\|M\|_1 = max\{\lvert 1 \rvert + \lvert -3 \rvert,\ \lvert -5 \rvert + \lvert 2 \rvert\} = 7$

Norm für Funktionen

Lebesque-Raum:

$$L^p([-1,1]) := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \ \middle| \ \int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

="Menge der p-integrierbaren Funktionen»
Definitionsmenge (beliebig)
Norm:

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Bsp:

$$\|x^2\|_{L^2} := \left(\int_{-1}^{1} |x^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} x^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^{1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{5} - \left(\frac{-1}{5} \right)} = \sqrt[2]{\frac{2}{5}}$$

$$\int a \cdot x^n = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} = \frac{a \cdot x^{n+1}}{n+1} \cdot$$

Skalarprodukt

Induzierte Norm

Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm:

$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$

Standardskalarprodukt:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i} z_i\,, \qquad w, z \in \mathbb{C}^n$$

Skalarprodukt für m × n-Matrizen

$\langle A, B\rangle = tr(A^T B),\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\langle A, B\rangle = tr(A^* B),\ A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$tr(A^T B) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 + 2 + 0 = 6$$

Skalarprodukt auf L^2

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx$$

Bsp:

$f(x) = x^2 \quad g(x) = x + 1$

$$\langle x^2, (x+1)\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 + x\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{x^4 + 2x^2}{4}\Big|_{-1}^{1}$$

Öffnungswinkel

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\sqrt{\langle v, v\rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w\rangle}}\right)$$

Orthonormalbasen (ONB)

Sei V ein VR mit Skalarprodukt$\langle . , . \rangle$. Eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$
heisst Orthonormalbasis, falls die Basisvektoren paarweise orthogonal zueinander sind und alle Norm 1 haben.

Fourier-Reihe

Fourier-Reihe in reeller Schreibweise

Die Menge aller periodischen Funktion ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$L^2([0,T]) := \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_0^T |f(t)|^2\, dt < \infty \right\}$$

Das Skalarprodukt in diesem Vektorraum definieren wir folgendermassen:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$$

Bezüglich diesem Skalarprodukt sind die Funktionen orthonormiert und bilden ein Orthonormalsystem. Damit meint man eine ONB mit dem Unterschied, dass unendliche Linearkombinationen nötig sind.

$g_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad g_n(t) := \cos(n\omega_0 t) \quad h_n(t) := \sin(n\omega_0 t) \quad n \in \mathbb{N}$

Jede periodische Funktion lässt sich schreiben als:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

$$a_n = \langle g_n(t), f(t) \rangle = \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \langle h_n(t), f(t) \rangle = \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\, dt \quad n \in \mathbb{N}$$

Symmetrie

$\frac{a_0}{2}$ entspricht Verschiebung in y-Richtung

Falls $a_n = 0$ ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung (ungerade)

Falls $b_n = 0$ ist die Funktion symmetrisch bzgl. der y-Achse (gerade)

Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise

Vektorraum: $L^2([0,T]) := \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_0^T |f(t)|^2\, dt < \infty \right\}$

Skalarprodukt: $\langle f, g \rangle = \int_0^T \overline{f(t)} \cdot g(t) dt$

Eulersche Relationen: $\sin(x) = \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega_0 t} - e^{-i \cdot k \cdot \omega_0 t}}{2i}$ $\qquad \cos(x) = \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega_0 t} + e^{-i \cdot k \cdot \omega_0 t}}{2}$

Orthonormalsystem: Basisvektor: $e_k(t) := e^{i \cdot k \cdot \omega_0 t}, k \in \mathbb{Z}$

Fourierreihe komplex

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \cdot k \cdot \omega_0 t}$$

$$c_k = \langle e_k(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega_0 t} dt \ , k \in \mathbb{Z}$$

Amplituden-Phasen-Form der Fourierreihe

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$

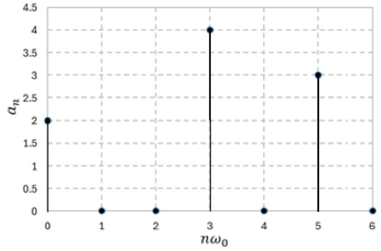
$\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

Umrechnung zwischen Darstellungsarten

ZU↓ VON→	Reel	Komplex	Amplituden-Phase
Reel		$a_n = 2 \cdot Re(c_n)$ $b_n = -2 \cdot Im(c_n)$	$a_n = A_n \cos(\varphi_n)$ $b_n = -A_n \sin(\varphi_n)$
Komplex	$c_0 = \frac{a_0}{2};\ c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}$ $c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$		$c_n = \frac{A_n}{2} \sin(\varphi_n)$
Amplituden-Phase	$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = -\mathrm{sign}(b_n) \cdot \cos^{-1} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$	$A_n = 2 \cdot \lvert c_n \rvert$ $\varphi_n = \arg(c_n)$	

Graphische Darstellung

$f(t) = 1 + 4\cos(3\omega_0 t) + 3\cos(5\omega_0 t)$
lässt sich so darstellen



Lineare Abbildungen und Matrizen

Linearität

Seien V und W zwei VR, dann ist eine Abbildung $f: V \to W, v \mapsto w = f(v)$ linear falls gilt:
i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

i) +ii) $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

Matrix als lineare Abbildung

Matrizen können als Lineare Abbildungen aufgefasst werden:
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$x \mapsto y = A \cdot x$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Matrizen beschreiben Streckungen, Drehungen, Spiegelungen, Projektionen, Scherungen und Kombinationen davon.
Geraden werden auf Geraden abgebildet

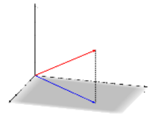
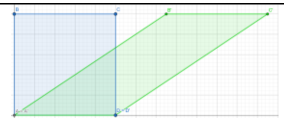
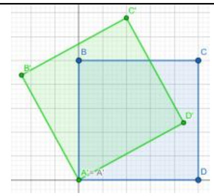
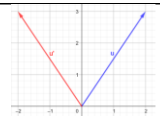
Drehmatrizen

Spalten sind normiert und orthogonal
Matrizen, die aus orthonormierten Spaltenvektoren bestehen, nennt man orthogonale Matrizen.
$Q^T \cdot Q = \mathbb{1} \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$

Allgemeine Drehung im Raum

$$\begin{array}{ccc} n_1^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi & n_1 n_2(1-\cos\varphi)-n_3\sin\varphi & n_1 n_3(1-\cos\varphi)+n_2\sin\varphi \\ n_1 n_2(1-\cos\varphi)+n_3\sin\varphi & n_2^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi & n_2 n_3(1-\cos\varphi)-n_3\sin\varphi \\ n_1 n_3(1-\cos\varphi)-n_2\sin\varphi & n_2 n_3(1-\cos\varphi)+n_3\sin\varphi & n_3^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi \end{array}$$

Drehachse berechnen: $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{tr(D)-1}{2}\right)$
Drehachse berechnen: Löse $D \cdot x = x \Rightarrow (D - \mathbb{1}) \cdot x = 0$

Streckung	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$		
Projektion	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Scherung	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + m \cdot y \\ y \end{pmatrix}$ Fläche bleibt erhalten $det(A) = 1$
Drehung	$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ um z-Achse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ um x-Achse $\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$ um y-Achse		Drehung um Winkel φ Fläche bleibt erhalten $\det(A) = 1$
Spiegelung	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\det(A) = -1$
Drehspiegelung			$\det(A) = -1$

Matrix einer linearen Abbildung

Kommutatives Diagramm

- Nehme die Basisvektoren aus B_V
- Wende die Abbildung f auf diese Basisvektoren an
- Schreibe das Ergebnis als Koordinatenvektor bzgl. der Basis B_W
- Schreibe diese Vektoren als Spalten in die Matrix A

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f\text{ linear}"] \arrow[d, "B_V"'] & W \arrow[d, "B_W"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A\in\mathbb{R}^{m\times n}"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

Verkettung von linearen Abbildungen und Matrixprodukt

Beim Verketten von mehreren linearen Abbildungen entsteht ebenfalls eine lineare Abbildung.

Seien U, V , W drei VR und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist die Verkettung $g \circ f : U \to W$, $u \to w = g(f(u))$ ebenfalls wieder eine lineare Abbildung.

Die zur verketten Abbildung gehörende Matrix C lässt sich durch Berechnen durch $B \cdot A$

$$
\begin{tikzcd}
 & & v=f(u) & & \\
u \arrow[rrrr, bend left, "g\circ f"] & U \arrow[r, "f\text{ linear}"] \arrow[d, "B_U=\{u_1,\dots,u_n\}"'] & V \arrow[r, "g\text{ linear}"] \arrow[d, "B_V=\{v_1,\dots,v_l\}"] & W \arrow[d, "B_W=\{w_1,\dots,w_m\}"] & w=g(v)=(g\circ f)(u) \\
x \arrow[rrrr, bend right, "C"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A\in\mathbb{R}^{l\times n}"] & \mathbb{R}^l \arrow[r, "B\in\mathbb{R}^{m\times l}"] & \mathbb{R}^m & z=B\cdot y=B\cdot A\cdot x \\
 & & y=A\cdot x & &
\end{tikzcd}
$$

Kern

Der Kern von f ist die Menge der Vektoren $v \in V$, die von f auf den Nullvektor $0 \in W$ abgebildet werden

$ker(f)$ ist ein Unterraum von V

Rezept:

Löse das homogene LGS Ax = 0

Dann gilt $ker(A) = \{x \in Rn| Ax = 0\}$

dim(ker(A)) = n-r (n = # Spalten, r = # Pivots)

Bild

Das Bild von f ist die Menge von Vektoren $w \in W$, für die es einen Vektor $v \in V$ gibt, der von f auf w abgebildet wird

$im(f)$ ist ein Unterraum von W

Die Spalten von A spannen das Bild von A auf.

Gauss machen, Spalten mit Pivot bilden Basis des Bildes von f.

Das Bild ist r -dimensional, wobei r = rang(A) die Anzahl Pivotelemente ist.

dim(im(A)) = r (r = # Pivots)

Isomorphismen

Umkehrabbildungen

injektiv	kein Funktionswert wird mehrmals angenommen	$ker(f) = \{0\}$	keine freien Parameter #Pivots = #Spalten
surjektiv	jeder Wert aus dem Bildbereich wird mind. einmalangenommen	$im(f) = W$	#Pivots = #Zeilen
bijektiv	1:1-Beziehung zwischen x- und y-Werten	$det(A) \neq 0$	rang(A) = #Spalten = #Zeilen

Wenn $f: X \to Y$ bijektiv ist, dann existiert $f^{-1}: Y \to X$, sodass gilt $f^{-1}(f(x)) = x$

Isomorphismus

Eine bijektive lineare Abbildung heisst Isomorphismus.

Isomorphe VR

Falls zwischen zwei VR ein Isomorphismus existiert, heissen die beiden VR isomorph, geschrieben: $V \cong W$

Zwei VR V und W sind isomorph, wenn $\dim(V) = \dim(W)$. Jeder reelle, endlich-dimensionale VR V mit dim(V) = n ist

isomorph zum $\mathbb{R}^n$.

Basiswechsel

Matrix des Basiswechsels

$$\begin{tikzcd} v\ V \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "B_V"'] & V\ v \arrow[l, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\tilde{B}_V"] \\ x\ \mathbb{R}^n \arrow[r, shift left, "T\in\mathbb{R}^{n\times n}"] & \mathbb{R}^n\ \tilde{x}=T\cdot x \arrow[l, shift left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Matrix T aufstellen Rezept:

T: Schreibe die Basisvektoren der alten Basis B bzgl. der Basisvektoren der neuen Basis BV ⇒ Spalten

Oft einfacher (vor allem wenn alte Basis = Standardbasis) T^{-1} aufstellen: Schreibe die neuen Basisvektoren als Linearkombination der alten Basis.

Bsp:

$B = \{1, x, x^2\} \quad \tilde{B} = \{1, x-1, x^2-2x+1\}$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ x-1 &= -1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \\ x^2-2x+1 &= 1\cdot 1 + (-2)\cdot x + 1\cdot x^2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A\in\mathbb{K}^{m\times n}"] & \mathbb{K}^m \\ V \arrow[u, "B_V"] \arrow[r, "f\text{ linear}"] \arrow[d, "\tilde{B}_V"'] & W \arrow[u, "B_W"'] \arrow[d, "\tilde{B}_W"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\tilde{A}\in\mathbb{K}^{m\times n}"] & \mathbb{K}^m \arrow[from=1-1, to=3-1, bend right=60, "T"'] \arrow[from=1-2, to=3-2, bend left=60, "S"] \end{tikzcd}$$

$$\tilde{A} = S\cdot A\cdot T^{-1}$$

Spezialfall:

Sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung und A die Matrix von f bzgl. der "alten" Basis B_V .
Dann ist die Matrix von f bzgl. "neuer" Basis $\tilde{B}_V$ gegeben durch $\tilde{A} = TAT^{-1}$ wobei T die Matrix des Basiswechsels von B_V nach $\tilde{B}_V$ ist.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenvektoren einer linearen Abbildung f sind Vektoren v , die auf Vielfaches von sich selbst abgebildet werden: $f(v) = \lambda v$

Den "Streckfaktor" λ nennt man dann Eigenwert zum Eigenvektor v .

Eigenwerte

Charakteristisches Polynom

Das Polynom $p_A(\lambda) \coloneqq \det(\lambda \cdot \mathbb{1} - A)$ heisst das charakteristische Polynom zur Matrix A

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die EW von A

Berechne det $\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{pmatrix} = 0$

Spezialfall bei 2x2-Matrizen: $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}(A)}{2}\right)^2 - \det(A)}$

Eigenvektoren

Bei gegebenen Eigenwerten λ und Matrix A

$x = \ker(\lambda \cdot \mathbb{1} - A)$

Bsp: löse $\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kontrolle: $\dim(\ker(\lambda \cdot \mathbb{1} - A)) \geq 1$

Eigenraum

Sei V ein VR und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bzgl. einer beliebigen Basis. Dann heisst

$E_\lambda \coloneqq ker\,(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$ Eigenraum zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$.

Algebraische und geometrische Vielfachheit

Algebraische Vielfachheit = Vielfachheit der Nullstelle im charakteristischen Polynom

$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 3)^2$

$\lambda_1 = 2$ (alg. VF 1)

$\lambda_2 = 3$ (alg. VF 2)

Geometrische Vielfachheit = Dimension des entsprechenden Eigenraums E_λ.

Entspricht Anz. Linear unabhängiger EV im Eigenraum E_λ.

$1 \leq Geom.VF \leq \text{alg. VF}$

Diagonalisieren

Ziel: Eine Basis für einen VR finden, sodass eine Abbildung f durch eine Diagonalmatrix beschrieben werden kann.

Falls die Matrix diagonalisierbar ist, besteht die Basis aus Eigenvektoren.

Diagonalmatrix

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ Bei einer Diagonalmatrix stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen.

Diagonalisieren nach Rezept

1. Eigenwerte berechnen
   - Falls eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ besitzt, dann ist A diagonalisierbar.
2. Eigenvektoren berechnen
   - Ist geom. VF gleich alg. VF? Gibt es n linear unabhängige EV?
   - Falls nein, ist die Matrix nicht diagonalisierbar.
3. Basis von EV aufstellen
4. Basiswechsel auf die Basis von EV
   - Schreibe die n EV in die Spalten von T^{-1}
   - T erhält man durch Invertieren
5. Diagonalmatrix aufstellen:
   - EW auf der Diagonalen (mit Vielfachheit)
   - Oder durch $D = TAT^{-1}$ berechnen

Spezialfälle

symmetrische Matrizen $A = A^T$ sind immer diagonalisierbar

Wenn A symmetrisch ist, lässt sich T als orthonormierte Matrix schreiben.

Für diese gilt $Q^T = Q^{-1}$

Beispiel:

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Spalten auf Länge 1 skalieren: $T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (T^{-1})^T$

Potenzieren von Matrizen

Bei Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$ Diagonalelemente hoch n

Bei diagonalisierbaren Matrizen: $A^n = T^{-1} \cdot D^n \cdot T$

Anwendung: Rekursiv definierte Folgen

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot D^n \cdot T \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Matrixexponential

$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_k} \end{pmatrix}$

$e^A = T^{-1} \cdot e^D \cdot T$

Anwendung: Lineare DGL

lineare, homogene ODE 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'(t) = a \cdot y(t),\ y(0) = y_0$

Lösung: $y(t) = y_0 \cdot e^{a \cdot t}$

System von DGL

$Y'(t) = A \cdot Y(t),\ Y(0) = Y_0$

Lösung: $Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y_0$

Y', Y sind Vektoren, A ist eine Matrix

Der Ausdruck $e^{A \cdot t}$ wird auch Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ genannt

Rezept:

DGL in Matrix-Vektor-Form aufschreiben

$\begin{cases} u'(t) = 4 \cdot u + 3 \cdot v \\ v'(t) = -2 \cdot u + v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ \ Y' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

Matrix A diagonalisieren

$D \cdot t = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot t & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdot t \end{pmatrix}$

$e^{A \cdot t} = T^{-1} \cdot e^{D \cdot t} \cdot T$ berechnen

Lösung: $Y(t) = \Phi(t) \cdot Y_0 = e^{A \cdot t} \cdot Y_0$

Lineare ODE n-ter Ordnung

Die lineare, homogene ODE n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y^n(x) + a_{n-1} y^{n-1}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$

kann geschrieben werden als System 1. Ordnung in der Form $Y'(x) = A \cdot Y(x)$

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

Beispiel:

lineares Anfangswertproblem 2. Ordnung:

$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$

$y(0) = -1,\ y'(0) = 2$

$y''(x) = 3y'(x) - 2y(x)$

$Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},\ \ Y' = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0y(x) + y'(x) \\ -2y(x) + 3y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$

Matrix A diagonalisieren

$e^{A \cdot x} = T^{-1} \cdot e^{D \cdot x} \cdot T$ berechnen

Lösung: $Y(x) = \Phi(x) \cdot Y_0 = e^{A \cdot x} \cdot Y_0$

Falls nur $y(x)$ gefragt ist, muss von $e^{A \cdot x} \cdot Y_0$ nur die erste Zeile berechnet werden.