Überprüfung Vektorräume

1. ist der $\vec{0}$ drin
2. ist $\lambda\vec{a}$ drin, $\lambda \in \mathbb{R}$ testen ob
3. wenn $\vec{a}$ und $\vec{b} \in V$ dann $\vec{a}+\vec{b} \in V$

Überprüfung Unterräume

1. überprüfen ob es ein Vektorraum ist !!!
2. ist es in V (alle U in V)

Lineare Hülle und ein Erzeugendessystem

Die Lineare Hülle ist ein Raum welches wie zum Beispiel eine Gerade, Ebene oder was höher dimensionales dargestellt werden kann.

Erzeugendensystem bezeichnet die Vektoren welche als Richtungsvektoren fungieren.

bsp:

$Lin(\vec{a},\vec{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

n= Anzahl dimensionen der Vektoren

Basis

$B = (\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$

die Basis besteht aus linear unabhängige Vektoren/Matrizen

(kann sich wie eine lineare hülse vorgestellt werden)

Die Standardbasis besteht aus Vektoren mit dem Wert 1.

Dimensionen:

~~Es~~ Die Anzahl Dimensionen ist genau gleich der Anzahl Vektoren/Matrizen.

Kordinatenvektor

Anhand von der Basis und den Kordinatenvektor kann man jegliche Vektoren in diesen Raum darstellen. bsp:

Basis, $B(\vec{v_1},\vec{v_2})$: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$

Kordinatenvektor: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

dargestellter Vektor: $\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{v_1} + 2\cdot\vec{v_2}$

Darstellungsmatrix

Eine Darstellungsmatrix stellt einem funktion (f) dar.

bsp. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vorher

$V \to W$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x\\y+2z\end{pmatrix}$

$\vec{v} \to \vec{n}$

Berrechnung von der Matrix (Trick zur Berrechnung)

$$\begin{array}{c|c|c|c} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0 & 0 \\ \hline y+2z & 0 & 1 & 2 \end{array} = D = \text{Darstellungsmatrix}$$

$D \cdot \vec{v} = \vec{n}$

$Ker(f)$ = wann ist $\vec{n} = \vec{0}$

$Im(f)$ = Welche Werte können für $\vec{n}$ rauskommen

$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V)$

bsp.

Berrechnung $Ker(f)$

~~Din~~ D in Zeilenstufenform bringen

$$\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{matrix} \to \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}a\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} a,\ a \in \mathbb{R}$$

Freie Variabeln werden zu Vektoren

Berrechnung $Im(f)$

linear unabhängige Darstellungsmatrix

Lineare Abbildung

Es ist eine Funktion zwischen zwei Vektor~~en~~räumen die eine lineare Struktur enthält. Die Funktion hat einen Definitions (D)- und Wertebereich (W). bsp.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{x} = \begin{matrix}a\\b\end{matrix} \to y = f(x) = \begin{matrix}a\\b\\a+b\end{matrix}$

Damit eine Funktion eine Lineare Abbildung sein kann muss man auf 2 Sachen prüfen:

Additivität: $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

Homogenität: $f(\lambda\cdot\vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$

Auf 0 überprüfen

Eigenschaften:

Injektiv: jedes Element in W (y) hat höchstens ein dazu gehörigen Element in V (x)

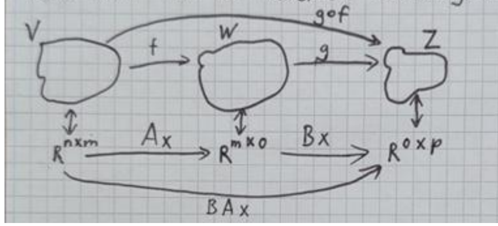
Surjektiv: jedes Element in W(y) hat mindestens ein dazu gehörigen Element in V (x)

Bijektiv: jedes Element in W(y) hat genau ein dazu gehörigen Element in V (x)

Man prüft die Bijektivität, indem man untersucht ob die Darstellungsmatrix eine determinante ungleich 0 hat. (Cramersche Regel)

Komposition von Linearen Abbildungen

Man kann mehrere aufeinanderfolgende lineare Abbildungen so darstellen: ~~f∘g~~ g∘f.
Wenn B die Matrix für g und A die für f ist kann man BA als kombinierte darstellungsmatrix sehen.



1. Orthogonale Projektion

Projektion auf xy-Ebene ($\mathbb{R}^3$): $A_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Projektion auf Vektor $\vec{a}$ ($\mathbb{R}^3$): $A_P = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\vec{a}^T = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix}$

2. Spiegelung

An x-Achse ($\mathbb{R}^2$): $A_{Sx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

An xy-Ebene ($\mathbb{R}^3$): $A_{S_{xy}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Am Ursprung ($\mathbb{R}^2$): $A_{SN} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

An Gerade $ax + by = 0$ ($\mathbb{R}^2$, Normalenvektor $\vec{n} = (a, b)$):

$$A_g = \frac{1}{\|\vec{n}\|^2}\begin{pmatrix} \|\vec{n}\|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & \|\vec{n}\|^2 - 2b^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \text{(wenn } \varphi \text{ Winkel zw. x-Achse \& Gerade)}$$

An Gerade $ax + by + cz = 0$ ($\mathbb{R}^3$, Normalenvektor $\vec{n} = (a, b, c)$):

$$A_g = \frac{1}{\|\vec{n}\|^2}\begin{pmatrix} \|\vec{n}\|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & \|\vec{n}\|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & \|\vec{n}\|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

3. Streckung ($\mathbb{R}^2$)

Längs y-Achse (Faktor k): $A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

4. Scherung ($\mathbb{R}^2$)

Längs y-Achse (Faktor k): $A_{yS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

5. Drehung

Ebene ($\mathbb{R}^2$, Winkel φ): $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Raum ($\mathbb{R}^3$, um x-Achse, Winkel φ): $A_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Raum ($\mathbb{R}^3$, um y-Achse, Winkel φ): $A_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Raum ($\mathbb{R}^3$, um z-Achse, Winkel φ): $A_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Basistransformationsmatrix

Alte Basis $\mathcal{B} = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$ neue Basis $\mathcal{C} = (\vec{c}_1 \dots \vec{c}_n)$
Bestimme $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ durch Umformen der erweiterten Matrix:

$$(C \mid B) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (I_n \mid P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}})$$

Spezialfall Standardbasis $\mathcal{E}$:

- $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = B$
- $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = B^{-1}$

wenn A erste Transformation, B zweite Transformation:

B x A = kombination der transformationen

Komplexe Zahlen

Man kann sich komplexe Zahlen wie ein Vektor vorstellen, wobei das addieren und subtrahieren mit allen Zahlen und multiplitieren mit einer Relen Zahl gleich bleibt.

Multiplitieren:

$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = ac + bi + di - cd$ $\quad | \quad i^2 = -1$

Dividieren: man braucht das Inverse:

$z_1 / z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$

$z_2^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(a-bi)$

andere Infos:

$\mathbb{C}$ = Menge aller komplexen Zahlen.

$a = Re(z)$, $b = Im(z)$

Potenzieren (Satz von de Moivre)

Eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{i\varphi}$, wobei der Winkel φ in Grad gegeben ist, wird potenziert, indem man den Betrag potenziert und das Argument mit dem Exponenten multipliziert.

Eulersche Form:

$$z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$$

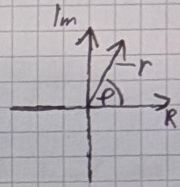
Wurzelziehen

Eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{i\varphi}$ hat genau n verschiedene n-te Wurzeln. Die Formel für die Wurzeln w_k lautet:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + k\cdot 360^\circ}{n}\right)}$$

Dabei ist k eine ganze Zahl von 0 bis $n-1$. Die Wurzeln liegen geometrisch auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen n-Ecks.

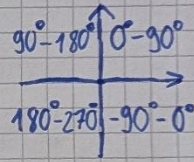
Polar- und Eulerform



Polarform: $r\cdot(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Eulerform: $r \cdot e^{i\cdot\varphi}$

Das sind beides andere Darstellungsarten von Komplexen Zahlen.



Umrechnung: von Karthesischer form

φ = Winkel = $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, für $a \neq 0$ sonst $90°$

kann um 180° verschoben sein, siehe Skizze

r = Radius = $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Rechnen:

multiplitieren: $r = r_1 \cdot r_2$, $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$

dividieren: $r = \frac{r_1}{r_2}$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$

potenzieren: $r = r_1^n$, $\varphi_1 \cdot n = \varphi$

konjugieren $= \overline{z}$: $r = r_1$, $-\varphi_1 = \varphi$ (spiegeln des imaginär teil

---

andere Infos:

- Beim faktorisieren eines Polynoms vom Grad n zerfällt es in n linear Faktoren. (nutze Mitternachtsformel)
- Zur Berrechnung der Karthesischen Form, nutze die Polarform und rechne den Reelenteil und Imaginärteil aus.
- $r(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) = r(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi))$

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Der Eigenwert ist ein Skalar λ ($\neq 0$) welche die Anforderung: $f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ erfüllt.
- Ein Eigenvektor ~~ist~~ sind alle Vektoren, welche den Eigenraum darstellen
- Ein Eigenraum stellt alle Vektoren dar, welche korrekt transformiert werden.

Berrechnung

$f(\vec{x}) = \begin{matrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{matrix}$ $\quad$ $0 = A - \lambda I$ nennt man Charakteristes Gleichung $\quad$ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda)+4 = 0 = (\lambda-1)(\lambda+2)$$

λ = Platzhalter des Eigenwerts = $(1, -2)$ (man sucht $\det(0)$ mit $-\lambda I_n$)

nun einsetzen von Eigenwert und mit Gaussjordan berrechnen

$\lambda = -2$ $\quad$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{array}\right)$ $\quad$ $\lambda = 1$ $\quad$ $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\quad$ * Summe() = Eigenraum

aufpassen nicht $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ = Eigenvektoren

Eigenvektoren sind nicht eindutig.

Trick:

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{matrix} \;\begin{matrix} \frac{2}{2} \\ \begin{matrix} -4 \\ -4 \end{matrix} \end{matrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Eigenvektor}} \cdot \underbrace{-2}_{\text{Eigenwert}}$$

Vielfachheiten, Spektrum, Eigenschaften

- Die Algebraische Vielfacheit μ eines Eigenwerts ist die Haufigkeit mit der diese vorkommt.
- Die Geometrische Vielfachheit γ eines Eigenwertes ist die anzahl dimensionen seines Eigenraums

$$1 \le \gamma \le \mu \le n$$

$\lambda = \{-5, 1, 1, 3\}$

- Spektrum ist die Menge aller eindeutigen Eigenwerte $\sigma(A)$ $\{-5, 1, 3\}$
- Der Spektralradius $\rho(A)$ ist der Betrag des grössten Eigenwerts = 5

Allgemeine Eigenschaften:

$\lambda_1 \ldots \lambda_n$ = Eigenwerte

$\mu_1 \ldots \mu_n$ = algebraische Vielfachheit

- Spur = Summe der diagonalen $= \Sigma\, \mu_i \cdot \lambda_i$
- det $= \Pi\, \lambda_j^{\mu_j}$ = multiplikation aller Eigenwerte
- ist λ ein Eigenwert von A dann ist λ^{-1} ein Eigenwe von A^{-1}
- bei einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix sind die Eigenwerte auf der Diagonale.
- wenn $A = A^T$ (symetrische Matrix) dann is $\gamma = \mu$

Ähnlichkeit

Definition: wenn $P \in R^{n \times n}$ wo $P^{-1}AP = B$ dann ist A und B ähnlich

Berrechne:

$AP = PB$, suche ein P wo erfullt $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

Ausschlusskriterien

1. $\det(A) = \det(B)$

wenn eines dieser nicht erfüllt ist kann es nich ähnlich sein.

2. A und B haben ~~nicht~~ das gleiche Charakterische Polynom
3. A und B haben die selben Eigenwerte.

Wenn alle stimmen muss man testen

Diagonalisierbarkeit

D= nur Werte auf Diagonale

Definition: wenn $P \in R^{n \times n}$ wo $P^{-1}AP = D$ dann ist A diaggonalisierbar

P = Eigenvektorbasis

Kriterien

1. hat n linear unabhängige Eigenvektoren
2. Für jeden Eigenwert λ von A gilt $\gamma = \mu$

wenn nicht erfüllt nicht Diagonalisierbar ansonsten scho

3. A hat n verschiedene Eigenwerte
4. A ist reel und symetrisch

wenn erfüllt diagonalisierbar sonst prüfen

Matrix-Rekonstruktion aus Eigenwerten & -vektoren

Ziel: Finde die Matrix A aus ihren Eigenwerten (λ_i) und Eigenvektoren ($\vec{x}_i$).

$$\textbf{Grundformel:} \quad \boldsymbol{A = PDP^{-1}}$$

1. Matrizen P und D aufstellen:

Theorie: P enthält die Eigenvektoren als Spalten, D die Eigenwerte auf der Diagonalen.

Beispiel: Für $\lambda_1 = 1, \vec{x}_1 = \binom{1}{2}$ und $\lambda_2 = -1, \vec{x}_2 = \binom{1}{1}$ ist:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Inverse P^{-1} berechnen:

Theorie: Die Inverse der Matrix P bestimmen.

Beispiel: Für obiges P ist die Inverse:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Matrix A berechnen:

Theorie: Die Matrizen in der Reihenfolge $P \cdot D \cdot P^{-1}$ multiplizieren.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Inverse berechnen

Mit Matrix A_n will man A_n^{-1} berechnen.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(A_n \mid I_n\right)$$

$\downarrow$ via Gauss Jordan Verfahren berrechnen $\downarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(I_n \mid A_n\right)$$

wenn man das nicht machen kann, dann gibt es keine Inverse

Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$\det(A) \neq 0$.

$\Leftrightarrow$ *Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.*

$\Leftrightarrow$ *Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.*

$\Leftrightarrow$ *Der Rang von A ist gleich n:* $\mathrm{rang}(A) = n$.

$\Leftrightarrow$ *Die Matrix A ist invertierbar.*

$\Leftrightarrow$ *Das System* $A\vec{x} = \vec{b}$ *hat eine eindeutige Lösung:* $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$\det(A) = 0$.

$\Leftrightarrow$ *Die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig.*

$\Leftrightarrow$ *Die Zeilenvektoren von A sind linear abhängig.*

$\Leftrightarrow$ *Der Rang von A ist kleiner als n:* $\mathrm{rang}(A) < n$.

$\Leftrightarrow$ *Die Matrix A ist singulär.*

$\Leftrightarrow$ *Das LGS* $A\vec{x} = \vec{b}$ *hat keine eindeutige Lösung.*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$