Analysis II: Merkblatt

Winkelfunktionen

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

Pythagoras: $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$

Einheitskreis: $\gamma: [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \quad (\alpha \mapsto (\cos\alpha, \sin\alpha)) \qquad \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$

Hyperbolische Funktionen

Pythagoras: $\forall x \in \mathbb{R}: \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Rightarrow \cosh(\operatorname{arsinh}(y)) = \sqrt{1+y^2}$

Einheitshyperbel: $\gamma_\pm: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad (x \mapsto (\pm\cosh(x), \pm\sinh(x)) \qquad \sinh(\operatorname{arcosh}(y)) = \sqrt{y^2-1}$

Additionstheoreme

Sinus	Cosinus	Tangens
$\sin(\varphi \pm \omega) = \sin(\varphi)\cos(\omega) \pm \cos(\varphi)\sin(\omega)$	$\cos(\varphi \pm \omega) = \cos(\varphi)\cos(\omega) \mp \sin(\varphi)\sin(\omega)$	$\tan(\varphi \pm \omega) = \frac{\tan\varphi \pm \tan\omega}{1 \mp \tan\varphi\tan\omega}$
$\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$	$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 2\cos^2(\varphi) - 1 = 1 - 2\sin^2(\varphi)$	$\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2(\varphi)}$
$\sin(\frac{\varphi}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}[1-\cos(\varphi)]}$	$\cos(\frac{\varphi}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}[1+\cos(\varphi)]}$	$\tan(\frac{\varphi}{2}) = \frac{1-\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = \frac{\sin(\varphi)}{1+\cos(\varphi)}$
$\sin(\varphi)\sin(\omega) = \frac{1}{2}[\cos(\varphi-\omega) - \cos(\varphi+\omega)]$	$\cos(\varphi)\cos(\omega) = \frac{1}{2}[\cos(\varphi-\omega) + \cos(\varphi+\omega)]$	$\sin(\varphi)\cos(\omega) = \frac{1}{2}[\sin(\varphi+\omega) + \sin(\varphi-\omega)]$
$\sin(3\varphi) = 3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi)$	$\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$	

Sinus hyperbolicus	Cosinus hyperbolicus
$\sinh(\varphi \pm \omega) = \sinh(\varphi)\cosh(\omega) \pm \cosh(\varphi)\sinh(\omega)$	$\cosh(\varphi \pm \omega) = \cosh(\varphi)\cosh(\omega) \pm \sinh(\varphi)\sinh(\omega)$
$\sinh(2\varphi) = 2\sinh(\varphi)\cosh(\varphi)$	$\cosh(2\varphi) = \cosh^2(\varphi) + \sinh^2(\varphi) = 2\cosh^2(\varphi) - 1 = 1 + 2\sinh^2(\varphi)$
$\sinh(\frac{\varphi}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}[\cosh(\varphi)-1]}$	$\cosh(\frac{\varphi}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}[\cosh(\varphi)+1]}$
$\sinh(\varphi)\sinh(\omega) = \frac{1}{2}[\cos(\varphi+\omega) - \cos(\varphi-\omega)]$	$\cosh(\varphi)\cosh(\omega) = \frac{1}{2}[\cos(\varphi+\omega) + \cos(\varphi-\omega)]$
$\sinh(\varphi)\cosh(\omega) = \frac{1}{2}[\sinh(\varphi+\omega) + \sinh(\varphi-\omega)]$	$\sinh(\varphi)\cosh(\varphi) = \frac{1}{2}\sinh(2\varphi)$
$\sinh(3\varphi) = 3\sinh(\varphi) + 4\sinh^3(\varphi)$	$\cosh(3\varphi) = 4\cosh^3(\varphi) - 3\cosh(\varphi)$

Quadrantenrelationen

Spiegelung an der Abszisse

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \qquad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

Spiegelung an der Winkelhalbierenden

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha)$

Spiegelung an der Ordinate

$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha) \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha) \qquad \cot(\pi-\alpha) = -\cot(\alpha)$

Winkelfunktionen ineinander überführen

$\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos(\alpha)$

$\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin(\alpha)$

Lösungsmenge der Arkusfunktionen

$\arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$x = \begin{cases} \arcsin(\alpha) + 2k\pi \\ \pi - \arcsin(\alpha) + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\arccos: [-1,1] \to [0, \pi]$

$$x = \begin{cases} + \arccos(\alpha) + 2k\pi \\ - \arccos(\alpha) + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\arctan: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad x = \arctan(\alpha) + k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \to]0, \pi[, \quad x = \operatorname{arccot}(\alpha) + k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Überlagerung harmonischer Schwingungen

$C\sin(\omega t + \gamma) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$C\sin(\omega t + \gamma) = C\cdot(\sin\omega t \cdot \cos\gamma + \cos\omega t \cdot \sin\gamma)$

$= C\cdot\cos\gamma \cdot \sin\omega t + C\cdot\sin\gamma\cdot\cos\omega t$

$|\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$, mit $\alpha = \omega t$ und $\beta = \gamma|$

Satz 4. Die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen *derselben Frequenz* ist wiederum eine harmonische Schwingung dieser Frequenz

$$A\sin(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \beta) = C\sin(\omega t + \gamma)$$

wobei man zur Berechnung von C und γ den Vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} A\cos\alpha + B\cos\beta \\ A\sin\alpha + B\sin\beta \end{pmatrix}$$

betrachetet. Es gilt dann

$$C = |\boldsymbol{v}|, \qquad \gamma = \arctan_2(v_2, v_1)$$

$\arctan(\frac{y}{x})$	für $x > 0$
$\arctan(\frac{y}{x}) + \pi$	für $x < 0,\ y > 0$
$\pm\pi$	für $x < 0,\ y = 0$
$\arctan(\frac{y}{x}) - \pi$	für $x < 0,\ y < 0$
$+\frac{\pi}{2}$	für $x = 0,\ y > 0$
$-\frac{\pi}{2}$	für $x = 0,\ y < 0$

$\pm \arccos(\frac{x}{r}) \quad (\pm y)$

Extremwertaufgaben

Hier geht es darum, von einer Funktion das globale Maximum oder Minimum zu bestimmen. Die gesuchte Grösse lässt sich durch eine Funktion mit mehreren zusammenhängende Variablen bestimmen.

Die Aufgabe lautet dann maximiere / minimiere die Zielfunktion. Alle bis auf eine der Variablen können über Nebenbedingungen eliminiert werden. $f(x,y) = xy$, $x+y = 100$, $f_2(x) = x(100-x)$, $f_2'(x) \overset{!}{=} 0$ & Randpunkte von D_f.

Bemerkung: Für eine monoton wachsende Funktion g ist die Optimierung von $F(x_1, x_2, \ldots)$ gleichwertig zur Optimierung von $g(F(x_1, x_2, \ldots))$.

$\min\sqrt{F(x)} \Leftrightarrow \min F(x) \quad (F(x) \geq 0)$

$\max e^{F(x)} \Leftrightarrow \max F(x)$

Würfel	Quader	Kreiszylinder	Kreiskegel	Tetraeder / Pyramide	Pyramiden- / Kegelstumpf	Kreiskegelstumpf
$d = \sqrt{3}a$	$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$	$M = 2\pi rh$	$M = \pi r m$			$M = \pi(r_1+r_2)m$
$S = 6a^2$	$S = 2(ab+ac+bc)$	$S = 2\pi r(r+h)$	$S = \pi r(r+m)$	$V = \frac{1}{3}G\cdot h$	$V = \frac{1}{3}h(G+\sqrt{GD}+D)$	$S = \pi[r_1^2+r_2^2+m(r_1+r_2)]$
$V = a^3$	$V = abc$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$			$V = \frac{1}{3}\pi(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)h$

Taylor-Reihen

$$f(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}x + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 + \ldots$$

Entwicklungsrechnung um $x_0 = 0$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$	a_k
0	sinh	0	$\frac{0}{0!}$
1	cosh	1	$\frac{1}{1!}$
2	sinh	0	$\frac{0}{2!}$
3	cosh	1	$\frac{1}{3!}$
4	sinh	0	$\frac{0}{4!}$

$T(x)$ von elementaren Funktionen um $x_0 = 0$

$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot(x-x_0)^k$

sin: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$

cos: $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$

exp: $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

sinh: $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$

cosh: $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Konvergenzradius $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot x^k$

$I = (x_0-\rho, x_0+\rho)$ konvergent, divergent

$x_0-\rho \qquad x_0 \qquad x_0+\rho$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

Bsp. $\sum \frac{2k-1}{k^2}\cdot x^k$:

$\rho = \frac{2k-1}{k^2}\cdot\frac{(k+1)^2}{2(k+1)-1} = \frac{2k-1}{2k+1}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \longrightarrow 1 \quad (k\to\infty)$

Formel von Newton

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot x^k, \quad \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k-1}\cdot\frac{\alpha+1-k}{k}, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Konvergenzradius der Binomialreihe: $|x| \leq 1$

k	$\binom{\alpha}{k}$	a_k
0	$\binom{\alpha}{0} := 1$	1
1	$1\left(\frac{4}{3}-1\right)\frac{1}{1}$	$= \frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}-2\right)\frac{1}{2}$	$= -\frac{1}{9}$
3	$-\frac{1}{9}\left(\frac{4}{3}-3\right)\frac{1}{3}$	$= \frac{5}{81}$
4	$\frac{5}{81}\left(\frac{4}{3}-4\right)\frac{1}{4}$	$= -\frac{10}{243}$

$f(x) \longrightarrow 1 + a_1(x)^1 + a_2(x)^2 + a_3(x)^3 + \ldots + a_k(x)^k$

Bsp: $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5/4} = 2\cdot\sqrt[3]{1+0.25}$

$\Rightarrow \alpha = 1/3$, $x = 0.25$, $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k-1}\cdot\left(\frac{4}{3}-k\right)\frac{1}{k}$

$\frac{f(x)}{2} \longrightarrow 1 + \frac{0.25}{3} - \frac{0.25^2}{9} + \frac{5\cdot 0.25^3}{81} - \frac{10\cdot 0.25^4}{243}$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- erster Ordnung $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$: $y_h'(x) = a\,y_h(x)$, $y_p'(x) = a\,y_p(x) + b(x)$

DGL natürlichen Wachstums: $y' = \lambda y$, $y = c_1 e^{\lambda x}$

Harmonische DGL: $y'' = -\omega^2 y$, $y = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$

DGL natürlichen Zerfalls: $y' = -\lambda y$, $y = c_1 e^{-\lambda x}$

Anti-Harmonische DGL: $y'' = \omega^2 y$, $y = c_1\cosh(\omega x) + c_2\sinh(\omega x) = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$

Tabelle 2 (Ansatzfunktionen).

b(x)	$y_p(x)$
konstant	A (konstant)
Polynom vom Grad n	Polynom vom Grad n
$\sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = C\sin(\omega x + \varphi)$
$\exp(bx)$, $(b \neq -a)$	$A\exp(bx)$
$\exp(-ax)$	$A\cdot x\cdot\exp(-ax)$

Bsp: $y' + 2y = 2x^2 + 2x + 4 \Rightarrow b(x) = 2x^2 + 2x + 4$, (Polynom 2. Grades) $[A + Bx + Cx^2]$

① $y_h = c\cdot e^{-2x}$, ② $y_p = B + 2Cx + 2(A + Bx + Cx^2) = 2A + B + 2Bx + 2Cx^2$

Koeffizientenvergleich:

$2C = 2 \Rightarrow C = 1$

$2B = 2$, $B = 0$

$2A + B = 4$, $A = 2$

daraus folgt: $y_p(x) = x^2 + 2$

$y(x) = c\cdot e^{-2x} + x^2 + 2$

Spezialfall: Falls $y_h = b(x)$ muss für die Ansatzfunktion noch ein x dazumultipliziert werden, da $b(x)$ beim Einsetzen sonst die hDGL löst. Bsp.:

$y' + y = 3e^{-x} \Rightarrow y_h(x) = c\cdot e^{-x}$, $y_p(x)$ muss den Ansatz $A\cdot x\cdot e^{-x}$ haben

Lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- zweiter Ordnung $y(x) = y_h(x) + y_p(x) : y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

Homogene Gleichung: Es kommen drei Lösungstypen in Frage, diese werden anhand der Nullstellen des charakteristischen Polynoms festgemacht.

$p(\lambda) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (\lambda \in \mathbb{C})$ Vorsicht: $a_0 \cdot y \Rightarrow a_0$

Inhomogene Gleichung: Die Ansatzmethode funktioniert im Wesentlichen gleich, wie für gDGL erster Ordnung, es muss nur der zusätzliche Fall berücksichtigt werden, dass auch eine harmonische Anregung eine Lösung der homogenen Gleichung sein kann.

Satz 20. Die allgemeine Lösung von (4.8) hängt von den Nullstellen von $p(\lambda)$ ab. Es gibt drei Fälle

- $p(\lambda)$ hat **zwei verschiedene, reelle Nullstellen** $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist y_h eine Überlagerung von Exponentialfunktionen
$$y_h(x) = c_1 \exp(\lambda_1 x) + c_2 \exp(\lambda_2 x)$$
- $p(\lambda)$ hat **eine doppelte, reelle Nullstelle** $\lambda \in \mathbb{R}$. In diesem Fall hat y_h die Form
$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x) \cdot \exp(\lambda x)$$
- $p(\lambda)$ hat **ein komplex konjugiertes Nullstellenpaar** $\lambda = r \pm i\omega \in \mathbb{C}$. In diesem Fall ist y_h eine Schwingung
$$y_h(x) = \exp(rx) \cdot [c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)] = \exp(rx) \cdot [A \sin(\omega x + \varphi)]$$

Tabelle 3 (Ansatzfunktionen). R bezeichnet die Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$

$b(x)$	Bedingung an R	Ansatz für $y_p(x)$
Polynom vom Grad $n \geq 0$	$0 \notin R$	$A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
	$0 \in R$, m-fach	$A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + \ldots + A_n x^{m+n}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda \notin R$	$Ae^{\lambda x}$
„Spezialfall“	$\lambda \in R$, m−fach	$Ax^m e^{\lambda x}$
$\cos(\omega x), \sin(\omega x)$	$\pm j\omega \notin R$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
„Spezialfall“ falls $b(x)$ die homogene GL löst	$\pm j\omega \in R$	$x \cdot (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$

Bemerkung: Auch hier können Produktansätze helfen, und auch hier müssen die Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Bsp. $b(x) = x^2 e^{-x} \Rightarrow y_p(x) = e^{-x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

Taylorreihe als Ansatzfunktion: Eine sehr allgemeine und vom Typ der Störfunktion unabhängige Ansatzfunktion für y_p ist eine Taylorreihe. Bsp. $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$

Der Ansatz für die partikuläre Lösung ist:

$$y_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_p^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$= y_0 + y_1(x-x_0) + \frac{y_2}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y_3}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{y^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k$$

Wir brauchen die höheren Ableitungen $y^{(k)}(0)$. Diese gewinnen wir durch wiederholtes Ableiten der gDGL:

$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x) \Rightarrow y''(0) = b(0) - a_0 y_0 - a_1 y_1$

$y'''(x) + a_1 y''(x) + a_0 y'(x) = b'(x) \Rightarrow y'''(0) = b'(0) - a_0 y_1 - a_1 y''(0)$

$y^{IV}(x) + a_1 y'''(x) + a_0 y''(x) = b''(x) \Rightarrow y^{IV}(0) = b''(0) - a_0 y''(0) - a_1 y'''(0)$

$y^{(k)}(0) = b^{(k-2)}(0) - a_0 y^{(k-2)}(0) - a_1 y^{(k-1)}(0)$

bzw. mit $y_k := y^{(k)}(0)$, $b_k := b^{(k)}$: $y_k = b_{k-2}(0) - a_0 y_{k-2}(0) - a_1 y_{k-1}(0)$

Separierbare gDGL $\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y)$

Eine gDGL erster Ordnung heisst separierbar, wenn sie von der Form $y' = f(x)\,g(y)$ ist.

Speziell ist jede gDGL der Form $y' = g(y)$ separierbar (man setzt $f(x) = 1$).

0. Jede Nullstelle von $g(y)$ ist eine konstante Lösung. $g(y_0) = 0 \Rightarrow y = y_0 = \text{const} \Rightarrow$ Lösung
1. Trenne formal die Variablen $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$
2. Integriere auf beiden Seiten, links nach y und rechts nach x. $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$
3. Löse die Gleichung mit den erhaltenen Ausdrücken nach y auf. $I(y) = J(x) + c$

Bestimmte Integrale

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Gerade $f(x)$: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Ungerade $f(x)$: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Uneigentliche Integrale

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to \infty} F(u) - F(a)$

Integral als Funktion der oberen Grenze: $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $F(a) := 0$

Erste Substitutionsregel (AN1)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \,\Big|_{u = g(x)} \quad \left(dx = \frac{du}{g'(x)}\right)$$

Spezialfälle dieser Regel, sogenannte Logarithmische Integrale:

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$
- $\int f'(x) \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + C$
- $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Zweite Substitutionsregel

Die Zweite Substitutionsregel ist nicht darauf angewiesen, dass im Integranden einer verschachtelten Funktion noch ein $g'(x)$ vorhanden ist. Dafür muss die Substitutionsfunktion invertierbar sein.

Wir schreiben sie in zwei (inhaltlich identischen) Fassungen auf. In beiden Fassungen sind die Funktionen $g(x)$ und $h(y)$ Umkehrfunktionen voneinander: $y = g(x)$ und $x = h(y)$.

Erste Fassung: $\int f(x)\,dx = \int f(h(y))\,h'(y)\,dy \,\Big|_{y = g(x)}$

Vorgehen:
- Passende invertierbare Substitutionsfunktion $x = h(y)$ wählen und deren Umkehrfunktion $y = g(x)$ bestimmen.
- Im gesuchten Integral substituieren: $x = h(y)$, $dx = h(y)'\,dy$
- Den entstandenen Ausdruck nach y integrieren.
- Im Ergebnis das Integral $y = g(x)$ substituieren.

Zweite Fassung: $\int f(g(x))\,dx = \int f(y)\,h'(y)\,dy \,\Big|_{y = g(x)}$

Vorgehen:
- Einen invertierbaren Ausdruck $y = g(x)$ wählen, der ersetzt werden soll und deren Umkehrfunktion $x = h(y)$ bestimmen.
- Im gesuchten Integral substituieren: $y = g(x)$, $dx = h'(y)\,dy$
- Den entstandenen Ausdruck nach y integrieren.
- Im Ergebnis das Integral $y = g(x)$ substituieren.

Nützliche Substitutionen:

$\sqrt{1+x^2}$ $\quad |x = \sinh(y)$

$\sqrt{x^2-1}$ $\quad |x = \cosh(y)$

$\sqrt{1-x^2}$ $\quad |x = \sin(y)$ oder $\cos(y)$

$\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\,dx \quad |x = \frac{a}{b}\sinh(y)$

$b^2x^2 = a^2\sinh^2(y)$

Partialbruchzerlegung $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ Für die Funktion: $f(x) = \frac{p(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)^2\cdot(x^2+1)}$ lautet die Partialbruchzerlegung: $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

Gegeben ist die rationale Funktion f wobei $p, q \in P_n$ und der Grad von p echt kleiner ist, als der Grad von q. Dann lässt sich f als eine Summe von einfacheren rationalen Funktionen schreiben. Die Summe enthält für jede einfache-, vielfache Nullstelle und jeden quadratischen Faktor einen Summanden. Die Koeffizienten A, B_i, C, D

$\frac{A}{x-x_1}$, $\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-x_2)^k}$, $\frac{Cx+D}{(x-c)^2+d^2}$ müssen dabei (für jede Nullstelle von q) durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Parametrisierte Kurven $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Der Graph einer Funktion $y = f(x)$, $(x \in [a,b])$ kann als Kurve aufgefasst werden.

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

Der Halbkreisbogen $y = \sqrt{1-x^2}$ kann als Kurve dargestellt werden.

$\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$

Eine Ellipse mit Halbachsen a, b $\quad y = b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$ (mit Umkehrsin)

$\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$