

Untersuchung von Funktionen S.54/57/65

1. Funktion $f(x)$ Ableiten zu $f'(x)$ und $f''(x)$
2. Definitionsbereich D und Wertebereich W bestimmen
3. Nullstellen bestimmen $f(x)=0$
4. Kandidaten für Extremal-, Sattel- und Wendepunkte bestimmen: $f'(x)=0 \Rightarrow x_1=n_1 | x_2=n_2$ etc.
5. Diskussion mit $f''(x) \Rightarrow f''(x_1)=n_1 | f''(x_2)=n_2$ etc.
6. Formelbuch S.65 $\Rightarrow$ Vergleich y -Wert von Schritt 5 mit $f''(x_1)>0 | f''(x_1)<0 | f''(x_1)=0$
7. $P_{\min}, P_{\max}, P_{\text{sattel}}$ ausrechnen mit $P(x_i; f(x_i))$...
8. Wendepunkte bestimmen mit $f''(x)=0 \Rightarrow x_{w_1}=n_1 | x_{w_2}=n_2$ etc.
9. P_{Wende} ausrechnen mit $P(x_{w_i}; f(x_{w_i}))$
10. Symmetrie bestimmen: gerade/axialsymmetrisch mit $f(-x)=f(x)$ (S.54) ungerade/punktsymmetrisch mit $-f(x)=f(-x)$
11. Asymptote bestimmen (S.57) $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für x -Achse $\Rightarrow$ Zählergrad $m < n$
 Falls Zählergrad $m=n \Rightarrow$ Quotient aus Koeffizienten: $\frac{p}{q} = \text{Asymptote}$
 Polstellen: Nenner $= 0 \Rightarrow x_1=n_1 | x_2=n_2$ etc.
 Schiefe Asymptote: Polynomdivision, Asymptote ist Ergebnis ohne Restterm
 e^x -Funktion $= x$ -Achse

Regel von l'Hopital, Grenzwerte S.61

Satz 1.1.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Sei $x_0 \in I$, und es gelten entweder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert, so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zählerfunkt. ableiten
Nennerfunkt. ableiten

Mit der Regel von de l'Hospital können unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ berechnet werden. *As long as you get a number*

Bsp.: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2-9x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x-9} = \frac{2}{2} = 1$

Extremwertaufgaben

1. Minimal oder Maximal Bedingung?
2. Extremalbedingung aufstellen
3. Nebenbedingung aufstellen
4. Nebenbedingung nach Variabel auflösen
5. Nebenbedingung in Extremalbed. einsetzen
6. Extremalbed. $2x$ ableiten
7. Extremalstellen: $f'(x)=0$
8. Diskussion $f''(x)>0 | f''(x)<0$
9. Unbekannte auflösen
10. Minima oder Maxima Punkt definieren

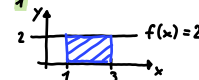
Integrationsmethoden S.70-74

unbestimmtes Integral

$$\int 2x dx = 2x + C$$

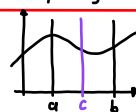
bestimmtes Integral

$$A = \int_1^3 2x dx = 2x \Big|_1^3 = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$$



Rechenregeln

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Integrationsgrenzen ändern

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = - (F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$$

Grundintegrale

Ableitung Integration

$$\begin{matrix} \sin(x) & \xrightarrow{\text{Ableitung}} & \cos(x) \\ \cos(x) & \xrightarrow{\text{Integration}} & \sin(x) \\ -\cos(x) & \xrightarrow{\text{Ableitung}} & \sin(x) \\ -\sin(x) & \xrightarrow{\text{Integration}} & -\cos(x) \end{matrix}$$

Degrees	Radians	sin θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
30°	π/6	1/2	√3/2	1/√3	√3	2/√3	√3
45°	π/4	√2/2	√2/2	1	√2	√2	1
60°	π/3	√3/2	1/2	√3	2/√3	1/√3	√3
90°	π/2	1	0	∞	0	∞	0

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$x^a \ (a \neq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$a^x \ (a \in \mathbb{R}, a > 0)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{2x^{3/2}}{3}$	$\sin(2x)$	$-\frac{\cos(2x)}{2}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \cos^2(x) &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale S.72

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = e^{-x} \Big|_0^t = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 1 - 0 = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln(t) - \ln(1)) = \infty \rightarrow \text{existiert nicht}$$

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^4 x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\epsilon}^4 = 4 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\epsilon} = 4$$

Partialbruchzerlegung S.71

echt gebrochene rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
 $q(x)$ hat nur reelle Nullstellen

Bsp. 1 $q(x)$ hat nur einfache, reelle Nullstellen

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} dx = \int \frac{3x-5}{(x+4)(x-2)} dx \quad \text{Nullstellen von } q(x): \begin{matrix} x=-4 \\ x=2 \end{matrix}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{3x-5}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

$$\Rightarrow 3x-5 = A(x-2) + B(x+4)$$

$$\cdot x=2 \quad 3 \cdot 2 - 5 = A(2-2) + B(2+4) \Rightarrow 7 = 6B \Rightarrow B = \frac{7}{6}$$

$$\cdot x=-4 \quad 3 \cdot (-4) - 5 = A(-4-2) + B(-4+4) \Rightarrow -17 = -6A \Rightarrow A = \frac{17}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{17}{6} \int \frac{1}{x+4} dx + \frac{7}{6} \int \frac{1}{x-2} dx = \frac{17}{6} \ln|x+4| + \frac{7}{6} \ln|x-2| + C$$

Bsp. 2 $q(x)$ hat auch mehrfache, reelle Nullstellen

$$I = \int \frac{x^2+15x+8}{(x+1)^2(x-5)} dx \quad \text{Nullstellen von } q(x): \begin{matrix} x=-1 \text{ doppelt} \\ x=5 \text{ einfach} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} 3 \text{ Brüche} \end{matrix} \right\}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{x^2+15x+8}{(x+1)^2(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-5} = \frac{A(x+1)(x-5) + B(x-5) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-5)}$$

$$\Rightarrow x^2+15x+8 = A(x+1)(x-5) + B(x-5) + C(x+1)^2$$

Einsetzen in Gl.

$$\cdot x=-1 \quad -6 = -6B \Rightarrow B=1$$

$$\cdot x=5 \quad 108 = 36C \Rightarrow C=3$$

$$\cdot x=0 \quad 8 = -5A - 5 + 3 \Rightarrow A = -2$$

$$\Rightarrow -2 \int \frac{1}{x+1} dx + 1 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + 3 \int \frac{1}{x-5} dx =$$

$$= -2 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + 3 \ln|x-5| + C$$

Bsp. 3 Unecht gebrochene rationale Funktion $f(x)$

$$\int f(x) dx = \int (g(x) + r(x)) dx = \int g(x) dx + \int r(x) dx$$

$$\text{Bsp. } f(x) = \frac{x^4-3x^2+x-1}{x^2-1} = (x^2-3x^2+x-1) : (x^2-1) = x^2-2 + \frac{x-3}{x^2-1}$$

$r(x) \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Integration durch Substitution (Lineare Funktionen!) S.71

unbestimmtes Integral

$$I = \int \cos(2x) dx$$

$$= \int \cos(u) \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(u) du$$

$$= \frac{1}{2} \sin(u) + C$$

$$I = \frac{1}{2} \sin(2x) + C$$

1. Schritt: Substitution

$$u = 2x$$

2. Schritt: Anpassung des Linienelements

u Ableiten

$$u'(x) = 2$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{2}$$

3. Schritt: Rücksubstitution

$$u = 2x$$

bestimmtes Integral

$$I = \int_0^{\pi} \cos(2x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(u) \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(u) \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(u) du$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(u)) \Big|_0^{2\pi}$$

$$I = \frac{1}{2} (\sin(2\pi) - \sin(0))$$

$$= 0$$

1. Schritt: Substitution

$$u = 2x$$

2. Schritt: Anpassung des Linienelements

u Ableiten

$$u'(x) = 2$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{2}$$

3. Schritt: Grenzen anpassen

$$u_1 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 0 = 0$$

$$u_2 = 2 \cdot x_2 = 2 \cdot \pi = 2\pi$$

Alternativ zu Schritt 3.

Keine Grenzen Anpassen, dafür Rücksubstituieren *

$$= \int_0^{\pi} \cos(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \sin(2x) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(2\pi) - \sin(2 \cdot 0)) = 0$$

Partielle Integration S.71

Unbestimmte Integrale

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\text{Bsp. } I = \int x^2 \cdot \cos(x) dx$$

$$I = x^2 \sin(x) - 2 \int x \cdot \sin(x) dx$$

$$= x^2 \sin(x) - 2 \left[-x \cdot \cos(x) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx \right]$$

$$= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = \cos(x) \rightarrow g(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \sin(x) \rightarrow g(x) = -\cos(x)$$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\text{Bsp. } I = \int_0^1 x \cdot 2^x dx$$

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = 2^x \rightarrow g(x) = \frac{2^x}{\ln(2)}$$

$$I = \left[\frac{x \cdot 2^x}{\ln(2)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2^x}{\ln(2)} dx =$$

$$= \frac{1 \cdot 2^1}{\ln(2)} - 0 - \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 2^x dx = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \left[\frac{2^x}{\ln(2)} \right]_0^1 = \dots$$

Flächeninhalt berechnen S.75

Bsp. 1 Endliche Fläche A zwischen x-Achse und Graph Kurve f

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

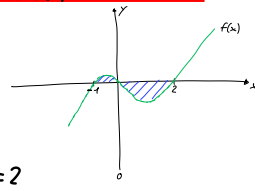
Skizze: Nullstellen x_0 von $f(x)$

$$f(x_0) = x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 = 0$$

$$x_0(x_0^2 - x_0 - 2) = 0$$

$$x_0(x_0+1)(x_0-2) = 0$$

$$x_{0,1} = -1, x_{0,2} = 0, x_{0,3} = 2$$



$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx + \left| \int_0^2 f(x) dx \right|$$

Bsp. 2 Von beiden Graphen eingeschlossene Fläche

Schnittstellen

$$f(x_s) = g(x_s)$$

$$4 - x_s^2 = x_s^2 + 1$$

$$3 = 2x_s^2$$

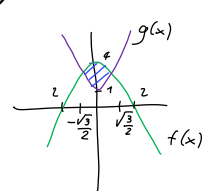
$$x_s^2 = \frac{3}{2}$$

$$x_{s,1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Fläche } A$$

Symmetrie!

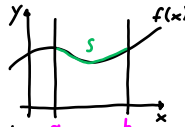
$$A = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (f(x) - g(x)) dx = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (f(x) - g(x)) dx$$



Anwendung Integralrechnung S.75

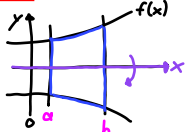
Bogenlänge s einer ebenen Kurve

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



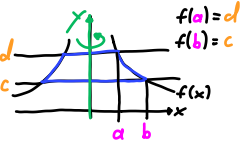
Volumen von Rotationskörper um x-Achse

$$V_x = \int_a^b dV_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Volumen von Rotationskörper um y-Achse

$$V_y = \int_c^d dV_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$



$$= \pi \int_c^d (f^{-1}(y))^2 dy$$

$$V_y = \pi \int_c^d (f^{-1}(y)_{\text{außen}})^2 - (f^{-1}(y)_{\text{innen}})^2 dy$$

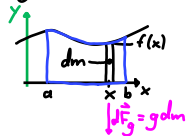
Drehmoment bezüglich der Bezugsachse $\bar{x}$

$$x_s = \frac{M_y}{m \cdot g} \quad y_s = \frac{M_x}{m \cdot g}$$

Schwerpunkt s einer homogenen ebenen Fläche

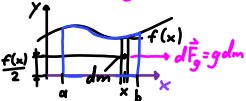
Bezugsachse $\bar{y}$

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) dx$$



Bezugsachse $\bar{x}$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b f^2(x) dx$$



Fläche

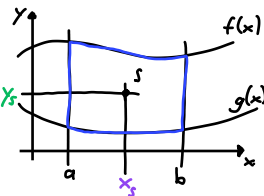
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Schwerpunkt s einer homogenen ebenen eingeschlossener Fläche

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

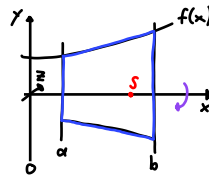
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Schwerpunkt s eines homogenen Rotationskörpers

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f^2(x) dx, \quad y_s = x_s = 0$$

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Separierbare DGL 2

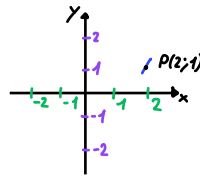
$$y' = -f(x) \cdot y \text{ oder } y' + f(x) \cdot y = 0$$

$\Rightarrow$ Analog zu DGL 1

DGL Richtungsfeld

Bsp: $y' \cdot y = x \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$
 1. Werte x von -2 bis 2 auf x -Achse
 2. Werte y von -2 bis 2 auf y -Achse
 3. Jeder Punkt von x und y in $y' = \frac{x}{y}$ einsetzen. Ergebnis gibt Steigung an diesem Punkt

Bsp: für $x=2$ und $y=1 \Rightarrow y' = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow$ Steigung bei $P(2;1)$ ist $2 \Rightarrow$ einzeichnen!



DGL Kurvenschar für $C \in \{-1; 0; 1\}$

$$\text{Bsp: } y' = x \Rightarrow \text{mit Methode } y(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

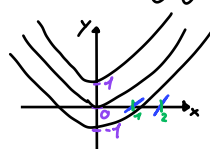
1. $y(0)$ setzen und C mit $\{-1; 0; 1\}$ und Punkte einzeichnen

2. $y' = x$ betrachten und Zahlen für x Einsetzen. Ergibt Steigung

3. Graphen zeichnen

Bsp: für $x=0$ und $C=1$
 $y(0) = \frac{0^2}{2} + 1 = 1 \Rightarrow P(0;1)$

2. $y'=2$, bei $x=2$ ist Steigung 2



Separierbare DGL 1

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad 1. \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$2. \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad 3. \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + K, K \in \mathbb{R}$$

Beispiel: $y' = x \cdot y$

$$1. \frac{dy}{dx} = x \cdot y \quad 2. \frac{dy}{y} = x \cdot dx$$

$$3. \int \frac{dy}{y} = \int x \cdot dx + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Integrieren}$$

$$4. \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \quad |e^{\cdot}$$

$$5. |y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^C \Rightarrow y(x) = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}$$

Kontrolle: $y(x)$ in DGL einsetzen, muss 0 geben

$$y'(x) = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x \Rightarrow K \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x \cdot K \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = 0 \checkmark$$

DGL in expliziter Form

$$y = y(x) = c \cdot \ln(2x)$$

$$1. \text{Ableiten: } y'(x) = c \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{c}{x}$$

2. $y(x)$ nach c umformen:

$$y = c \cdot \ln(2x) \Rightarrow c = \frac{y}{\ln(2x)}$$

$$3. c = \frac{y}{\ln(2x)} \text{ in } c \text{ bei } y'(x) \text{ einsetzen}$$

$$y'(x) = \frac{\frac{y}{\ln(2x)}}{x} = \frac{y}{x \cdot \ln(2x)} = \frac{y(x)}{x \cdot \ln(2x)}$$

Parametrisierung Ebene Kurven

Polarkoordinaten

$$\vec{R}(\rho) = r(\rho) \begin{pmatrix} \cos(\rho) \\ \sin(\rho) \end{pmatrix} \quad \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$$

Tangentenvektor

$$\dot{\vec{R}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

normierter Tangentenvektor

$$\dot{\vec{R}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Normierter Normalenvektor

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Steigung des Tangentenvektors

$$\tan(\rho(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

Bogenlänge einer Kurve

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Krümmung einer ebenen Kurve

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

Krümmungsradius

$$r = \frac{1}{|\kappa|}$$

Krümmung einer Kurve in Parameterdarstellung

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Massenträgheitsmoment

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i = E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 J$$

Rotationsgeschw.

$$v_i = r_i \cdot \omega$$

Kontinuierliche Massenverteilung

$$J = \int r^2 dm$$

Homogene dünne Scheibe

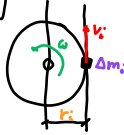
$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

M-moment dünner Stab

$$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

Satz von Steiner

$$J_A = J_S + d^2 \cdot m$$



Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \dots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{oder} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n |a_n|}$$

Taylorreihen (beliebige Stelle x_0)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{falls } x_0=0 \Rightarrow \text{MacLaurinsche Reihe}$$

Wichtige Taylorreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

Integral durch Potenzreihenentwicklung

1. Funktion n-mal Ableiten

2. $x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = \dots$

$$f'(0) = \dots$$

$$f''(0) = \dots$$

3. MacLaurinsche Reihe bilden

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

4. Integral mit Potenzreihe

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(f(0) + f'(0)(x-x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \right) dx$$

$$\text{Bsp. Konvergenzradius Potenzreihe } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n! a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n! \cdot \frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 1 \quad \frac{1}{n!} = 1$$

Bsp. Summand Taylor-Reihe

$$f(x) = \sin^2(x), x_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ Summand } (x - \frac{\pi}{2})^2$$

1. $(x - \frac{\pi}{2})^2$ Potenz gibt Ableitung an

2. Ableitungen bilden: $f(x) = \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$$f'(x) = \sin(2x); f''(x) = 2\cos(2x)$$

3. x_0 in $f''(x)$ einsetzen

$$f''(x_0) = f''(\frac{\pi}{2}) = 2\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = -2$$

4. Gesuchter Summand $\frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2$

$$\frac{-2}{2!} (x - \frac{\pi}{2})^2 = - (x - \frac{\pi}{2})^2$$

Ableitung

Kettenregel

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Beispiel: $f(x) = \sin(3x^2 + 2x)$

1. Schritt: Äußere Funktion
 $g(u) = \sin(u)$, $u = 3x^2 + 2x$
 $g'(u) = \cos(u)$

2. Schritt: Innere Funktion

$$h(x) = 3x^2 + 2x$$

$$h'(x) = 6x + 2$$

3. Ableitungen Multiplizieren

$$f'(x) = \cos(u) \cdot 6x + 2$$

4. Rücksubstitution

$$f'(x) = \cos(3x^2 + 2x) \cdot 6x + 2$$

Funktion	1. Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}$
$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$

Scheitelpunktsform

$$f(x) = (x-2)(x-4) = (x-x_s)^2 + y_s$$

$$x_s = \frac{x_{01} + x_{02}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y_s = (x_s - 2)(x_s - 4) = (3-2)(3-4) = -1$$

$$\Rightarrow y = (x-3)^2 - 1$$

Umkehrfunktion

$$f(x) = (x-3)^2 - 1$$

$$y = (x-3)^2 - 1 \quad | +1$$

$$y+1 = (x-3)^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\pm \sqrt{y+1} = x-3$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{y+1}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{y+1}$$