Potenzfunktionen als Bausteine von Polynomen

Grundbausteine Polynomf. = Monome $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ (Parameter: n)

unabhängige Variable = Argument der Funktion

$f: D \to W,\ x \mapsto y = f(x) = x^n,\ D = \mathbb{R}$

gerade Exponenten: gerade Symmetrie an y-Achse $f(-x) = f(x)$

$f(x)$ zu $f(-x)$: Spiegelung an y-Achse

$f(x)$ zu $-f(x)$: Spiegelung an x-Achse

je grösser n, desto grösser Bauch von f

ungerade Exponenten: ungerade Symmetrie $f(-x) = -f(x)$

symmetrisch bzgl. Punktspiegelung am Ursprung

Definition Polynomfunktion

Summe von Monome $x^0, x^1, \ldots$ • Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$

$p(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

nur natürliche Zahlen im Exponenten ($x^{-1} = \frac{1}{x}$, kein Polynom)

höchste Potenz = Grad des Polynom, der dazugehörige Koeffizient = Leitkoeffizient

wenn x^k nicht vorkommt, dann $a_k = 0$

$(x+1)^2$ Verschiebung um -1 auf x-Achse

$-(x+1)^2$ Spiegelung an x-Achse

$6x^2$ Parabel wird gestreckt

Multiplizität

$= 1$: schneidet x-Achse als Gerade

gerade: Graph berührt x-Achse nur

ungerade: kreuzt x-Achse

Nullstellen

x_0 Nullstelle von $p(x) \Leftrightarrow p(x_0) = 0$

da, wo Faktoren bei Faktorzerlegung $= 0$ sind $(x+1) \to x_0 = -1$

doppelte Nullstelle: $(x+1)^2$, Multiplizität 2

Fundamentalsatz der Algebra

Polynom von Grad n (nicht alle Koeffizienten verschwinden), besitzt höchstens n reelle Nullstellen

$n \geq 5$, keine Lösungsformeln

Zerlegungssatz

für jede reelle Nullstelle x_0 von $p(x)$, lässt sich ein Linearfaktor abspalten: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (x - x_0) \cdot g(x)$ ($g(x)$ auch eine Polynomf.)

kann mehrfach hintereinander angewendet werden

Polynomdivision

$p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ Nullstelle bei $x_0 = -1$

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x+1) = x^2 + x - 6$

$-(x^3 + x^2)$

$0 + x^2$

$-(x^2 + x)$

$0 - 6x$

$-(-6x - 6)$

0

$\Rightarrow p(x) = (x+1)\underbrace{(x^2 + x - 6)}$ Zerlegungssatz / Mitternachtsformel, weil quadr. Funktion

$\Rightarrow (x+1)(x+3)(x-2)$

Nullstellen: $\{-3, -1, 2\}$

falls Rest z.B. $-x+2 \to \ldots - x - 3 + \frac{-x+2}{x^2+x-1}$ (rationale F.)

Rechenaufwand für Polynom von Grad n: $\frac{n(n+1)}{2}$ Multiplikationen nötig

Horner-Schema

$p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ an der Stelle $x = -2$ (muss keine Nullstelle sein)

	1	2	-5	-6
$x=-2$	0	-2	0	10
	1	0	-5	4

immer 0, weil noch nichts steht

Koeff. der Reihe nach! $3x^3 + 2$: 3 0 0 2

$p(-2) = 4$

falls $x_0 = -1$ (Nullstelle)

	1	2	-5	-6
$x=-1$		-1	-1	6
	1	1	-6	0 = p(-1)

$1x^2 + 1x - 6 = x^2 + x - 6$

→ wieder Horner

$\Rightarrow (x+1)(x+3)(x-2)$

Identitätssatz

falls $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ & $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$

sind gleich, wenn gilt: $p(x) = q(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\to a_k = b_k\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots n$

Partialbruch-Zerlegung

$\frac{2x-1}{(x+1)^2(x+2)}$ als Summe von Partialbrüchen: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$

$\frac{\ldots}{(\ldots)^k} = \frac{A_1}{(\ldots)^1} + \frac{A_2}{(\ldots)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(\ldots)^k}$

Nullstellen des Nennerpolynoms müssen bekannt sein

Gleichheit $\Leftrightarrow$ Zähler gleich $\left(\frac{A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}\right)$

$\Rightarrow \underbrace{2x - 1}_{p(x)} = \underbrace{A(x+1)(x+2) + B(x+2) + (x+1)^2}_{g(x)}$

$= A(x^2 + 3x + 2) + B(x+2) + C(x^2 + 2x + 1)$

Koeffizientenvergleich: $0 \cdot x^2 + 2x - 1 = (A+C)x^2 + (3A+B+2C)x + (2A+2B+C)$

x^2	$0 = A + C$
x	$2 = 3A + B + 2C$
x^0	$-1 = 2A + 2B + C$

(lineares Gleichungssystem)

→ lösen mit Lin.Alg.

Ableitung

braucht man, um Veränderungen von Grössen darzustellen

Differenzquotient: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Ableitung von $f(x)$ an $x_0 \triangleq$ Grenzwert des Differenzquotient

$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ableiten / differenzieren

= momentane Änderungsrate

geometrisch: Steigung der Tangente an Graphen $f(x)$ im Punkt $P(x_0, f(x_0))$

zweite Ableitung: $f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)'(x_0) = (f')'(x_0)$

k-te Ableitung: $\frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

$f(x) = C$, mit $C \in \mathbb{R}$ konstant, (horizontale Gerade, Steigung $= 0$, Abl. $= 0$)

dann gilt $f'(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ (sobald in der Funktion kein x hat z.B. $f(x) = \ln(a)$ kein)

geg: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$, dann gilt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Faktorregel: $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

Summenregel: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Binomischer Lehrsatz

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \ldots + b^n$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ $\quad 0! = 1$

Kurvendiskussion

monoton wachsend: $f(x_2) \geq f(x_1)\ \forall x_1, x_2$ mit $x_1 < x_2$; $f'(x_0) \geq 0\ \forall x_0$

streng " ": falls $f(x_2) > f(x_1)\ \forall x_1, x_2$; $f'(x_0) > 0\ \forall x_0$

Umkehrfunktion: $f(y) = x$

monoton fallend: $f(x_2) \leq f(x_1)\ \forall x_1, x_2$ mit $x_1 < x_2$; $f'(x_0) \leq 0\ \forall x_0$

streng " ": $f(x_2) < f(x_1)$; $f(x_0) < 0\ \forall x_0$

$f'(x) > 0$ streng monoton wachsend

$f'(x) < 0$ streng monoton fallend

$f''(x) > 0$ Linkskrümmung von f

$f''(x) < 0$ Rechtskrümmung von f

lokale Extrema

lokales
"
relatives Minimum: $f(x_0) < f(x)$

relatives Maximum: $f(x_0) > f(x)$

notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$

(nicht hinreichend z.B. $f'(x_0) = 0$, aber trotzdem kein Extrema)

hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ & $f''(x_0) \neq 0$

Krümmungsrichtung soll sich nicht ändern $f''(x_0) > 0$ $f''(x_0) < 0$

wenn keine Aussage möglich: berechnen Vorzeichen links & rechts von f(x) beachten

Bsp. $f(x) = (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ suchen x, für die $f'(x) = 0$ ist

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 0$

↳ $\underline{x = -1}$ (aus $(x+1)^4$) möglicher Kandidat

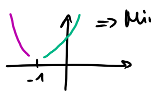
$f''(x) = 12x^2 + 24x + 12$ $x_0 = -1$ einsetzen

$\rightarrow f''(-1) = 12 - 24 + 12 = 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Monotoniebetrachtung: $f'(x) = 4(x+1)^3$ $(-)^3 = -$

$x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0$

$x > -1 \Rightarrow f'(x) > 0$



$\Rightarrow$ Minimum

Wendepunkte: $f''(x_0) = 0$ & $f'''(x_0) \neq 0$ (Monotonieverhalten unüblich)

Linearisierung einer Funktion

$y(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ - Tangentenfunktion

Linearisierung von f(x) an der Stelle x_0 = Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Bsp. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ bei $x_0 = 1$ linearisieren

$f'(x) = 9x^2 - 4x \rightarrow f'(1) = 9 - 4 = 5$, $f(1) = 3 - 2 + 1 = 2$

$\Rightarrow y(x) = 5 \cdot x + 2 - 5 \cdot 1 = \underline{\underline{5x - 3}}$

bestimmtes Integral → konstante Zahl ∈ ℝ

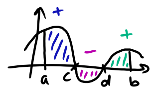
auf dem Intervall [a,b] stetige Funktion f(x)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \cdot \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{N}$$

↳ Stelle in jeweiligem Teilintervall

↳ Teilintervalle

geometrisch: $\int_a^b f(x)\,dx \;\hat{=}$ Fläche unter der Kurve



vorzeichenbehaftet: wenn f(x) unterhalb x-Achse → $f(x) < 0$

wenn Untergrenze > Obergrenze → $a > b$, $\Delta x < 0$

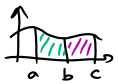
↳ Teilintegrale: $\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$

Eigenschaften bestimmtes Integral

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $b \in [a,c]$, dann gilt: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$



Stammfunktion

$F'(x) = f(x)$ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (unterscheiden sich durch Konstante C)

versch. Stammfunktionen derselben Funktion

a,b ∈ I (Intervall)

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

unbestimmtes Integral → Funktion

$\int f(x)\,dx$ → allgemeine Stammfunktion, $= F(x) + C$

Integrationsregeln

Faktorregel: $a \cdot \int f(x)\,dx = \int a f(x)\,dx$ (nur für Konstanten)

Summenregel: $\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = \int (f(x) \pm g(x))\,dx$

→ analog für bestimmte Integrale

→ keine für Produkte & Quotienten

Stammfunktionen der Monome von x

$\int a\,dx = ax + C$, $F(x) = ax + C$

Stammfunktionen für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\forall n \neq -1$ (für $n = -1 = \ln(x)$)

→ beliebige Polynome integrieren

Folgen

reelle Folge a = Funktion $a: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

Indexschreibweise: $a_n = a(n)$ = n-te Glied der Folge a_n

$a = \langle a_n \rangle$ Index

Darstellungen

verbale D.: "Folge der positiven, geraden Zahlen"

aufzählende D.: 2, 4, 6, 8, ...

explizite D. durch Bindungsgesetz: $a_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$

implizite D. durch Rekursionsformel: $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_1 = 2$

	implizite D.	aufzählende D.	explizite D.
harm. F.	$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_{n-1}} + 1}$, $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{n}$ Ü.
Fibonacci-F.	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$	$0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$	nicht elemtbar
arithm. F.	$a_n = a_{n-1} + d$, $a_1 = c$ (c,d konst)	$c, c+d, c+2d, \ldots$	$a_n = c + (n-1)d$
geom. F.	$a_n = a_{n-1} \cdot q$, $a_1 = c$	$c, cq, cq^2, cq^3, \ldots$	$a_n = c \cdot q^{n-1}$

Grenzwerte von Folgen

reelle Zahl g heisst Grenzwert/Limes der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche n_0 gibt, sodass $\forall n \geq n_0$ gilt: $|a_n - g| < \varepsilon$

→ nur einen, nicht mehrere

konvergent: besitzt Grenzwert; $\lim_{n \to \infty} a_n = g$; $a_n \to g$ für $n \to \infty$

divergent: besitzt keinen Grenzwert

Rechenregeln Grenzwerte

$\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ = konv. F. mit jeweiligem Grenzwert a, b; Konst. $c \in \mathbb{R}$

Konst. Faktor: $\lim_{n \to \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \to \infty} a_n = c \cdot a$

Summenregel: $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n = a \pm b$

Faktorregel: $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n = a \cdot b$

Quotientenregel: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

→ dürfen nur verwendet werden, wenn Grenzwerte existieren

allgemein: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$

Bsp.: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Achtung !

wenn $\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3n^2+7n-3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+4n-11)}$ Regel 4 nicht direkt anwendbar, weil $\frac{\infty}{\infty}$!

→ Faustregel: grösste im Nenner vorkommende Potenz von n im Zähler & Nenner ausklammern & dann kürzen

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \frac{(3+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2})}{(1+\frac{4}{n}-\frac{11}{n^2})} = \frac{3}{1} = 3$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2{,}718$ Eulersche Zahl (irrational)

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty}(a_n))$, falls $f(x)$ eine stetige Funktion ist

Reihen

Summenfolge / Reihe s, a = reelle Folge

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ (n-te Teilsumme) = Partialsumme

arithmetische Reihe

arithmetische Folge zugrunde liegend, $a_k - a_{k-1} = d$ = konst.

$s_n = a_1 \cdot n \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = \frac{(a_1+a_n)}{2} \cdot n$

geometrische Reihe

geometrische Folge zugrunde liegend, $\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$ = konst.

$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, $q \neq 1$

falls $q=1$, $s_n = n \cdot a_1$ (Spezialfall)

Grenzwert von Reihen

$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}$

arithm. Reihe divergiert

geom. Reihe: $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} q^n: \left.\begin{array}{l} \text{falls } q=1: 1 \\ \text{falls } 0 \le q < 1: 0 \\ \text{falls } -1 < q < 0: 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{konvergiert} \\ \text{hat Grenzwert}\end{array}$$

für alle anderen q divergiert es

konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{-1}{q-1}$, falls $|q| < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, falls $|q| < 1$

harm. Reihe divergiert

Grenzwerte von Funktionen

jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert (= konvergent)
↗ analog für monoton fallende, nach unten beschränkte Folge

monoton wachsend: $a_{n+1} \ge a_n$

monoton fallend: $a_{n+1} \le a_n$

2 Strategien:

1) $a_{n+1} - a_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Beschränktheit: kleinst mögliche obere Schranke

Vorgehen:

1) Folge $\langle x_n \rangle$ wählen mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$, Glieder $x_n \neq x_0$ $\forall n$
2) Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$

Grenzwert einer Funktion nur dann, wenn für jede Folge $\langle x_n \rangle$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ denselben Grenzwert hat: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$

f(x) muss an x_0 nicht unbedingt definiert sein, lim kann dort evtl. trotzdem existieren

Bsp. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$, $x_0 = 1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x+1, \text{ falls } x \neq 1 \\ \text{nicht def., falls } x = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$ $\lim\limits_{x\to 1}(x+1) = \underline{\underline{2}}$

↳ durch kürzen ändert sich lim nicht

Stetigkeit

f(x) stetig an der Stelle x_0, wenn Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

1) Gleichung überprüfen
2) existiert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?
3) existiert $f(x_0)$? → Fallunterscheidung

stetig, wenn jede Stelle in Definitionsbereich stetig

meisten Funktionen stetig: Polynome, rationale Funktionen $\left(\frac{p(x)}{p(x)}\right)$, sin(x), cos(x), tan(x), Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktion, Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, ...

Summe, Differenz, Produkt, Komposition von stetigen Funktionen sind stetig

wenn $f(x_0)$ stetig → $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ → benutzen, um $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ zu berechnen ⇒ = Resultat von $f(x_0)$

Bsp. $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1-4+2 = \underline{\underline{-1}}$ (weil Polynomf. stetig)

Liste von Grenzwerten

harmonische Folge: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*\right)$

geometrische Folge: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, für $|q| < 1$

n-te Wurzel: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, für $a \in \mathbb{R}^+$ & $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = n^{\frac{1}{n}}$

Eulersche Zahl: $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$

Rechenregeln

Faktorregel: $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$

Summenregel: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Produktregel: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Quotientenregel: $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

stetige Funktionen: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x) = f(x_0)$

Bsp. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{a} - \underbrace{\sqrt{n^2-2n-1}}_{b}$ → Trick $\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a+b)}$ → Wurzeln im Zähler weg

→ lim Rechenregeln anwenden, wenn nicht mehr $\infty + \infty$

Bsp. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{\frac{3n+2}{n+1}} = \sqrt[5]{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1}} = \ldots = \underline{\underline{\sqrt[5]{3}}}$
weil stetig

Ableitungsregeln

Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g + fg'}{g^2}$

Kettenregel: $(F(f(x)))'(x) = (F \circ f)'(x) = F'(f(x)) \cdot f'(x)$
"äussere Ableitung mal innere Ableitung"

Inversenregel: $x = g(y)$ (Umkehrf.) von $y = f(x)$, $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$\frac{dg}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(g(y))}$ gleiche Variable auf beiden Seiten

Ableitungsfunktionen

(natürliche) Exponentialfunktion e^x ↗ Variable im Exponent

" Logarithmusfunktion $\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$

$\nearrow$ Variable in Basis

Potenzfunktion x^a

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}, \ \forall x > 0$

$(e^x)' = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

allgemeine Exponentialf.: $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$; $x \in \mathbb{R}, a > 0$

" Logarithmusf.: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \rightarrow (\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$

" Potenzf.: $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$; $a \in \mathbb{R}$ (auch $\mathbb{Q}$)

trigonometrische Funktionen:

$(\sin(x))' = \cos(x)$; $(\cos(x))' = -\sin(x)$; $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

$\hookrightarrow$ nur wenn Winkel in rad!

wenn x in Grad $\sin(x) = \sin\left(\frac{x \cdot 2\pi}{360°}\right)$

Arcusfunktionen:

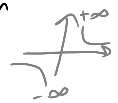
$(\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\cos^{-1}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Anwendung der Ableitung

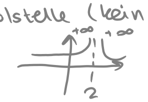
geg: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

1) $f(x_0) = 0$ & $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow h(x_0) = 0$: x_0 NS
2) $f(x_0) \neq 0$ & $g(x_0) = 0 \Rightarrow$ falls $g(x) \to 0$ für $x \to x_0 \Rightarrow h(x_0) \to \pm\infty$
   $\Rightarrow x_0$ ist eine Polstelle / Pol von $h(x)$
3) $f(x_0) = 0$ & $g(x_0) = 0 \rightarrow$ weitere Abklärungen nötig:
   - existiert $\lim_{x \to x_0} h(x) \Rightarrow$ Definitionslücke bei x_0 kann gestopft werden
   - kann aber auch eine Polstelle sein

$\frac{1}{x}$ = einfache Polstelle (Vorzeichenwechsel)



$\frac{1}{(x-2)^2}$ = doppelte Polstelle (kein Vorzeichen-wechsel)



Asymptotisches Verhalten von rationalen Funktionen im Unendlichen

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $f(x)$ Polynom von Grad n
$g(x)$ Polynom von Grad m

- falls $m > n$: $h(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$
  $\rightarrow$ echt gebrochene rationale Funktionen
- falls $m = n$: $h(x) \to a$ $(a \in \mathbb{R})$ für $x \to \pm\infty$
  $\rightarrow$ unecht gebrochen rationale Funktionen
- falls $m < n$: $|h(x)| \to \infty$ für $x \to \pm\infty$
  $\rightarrow$ unecht gebrochen rationale Funktionen

Kurvendiskussion

Definitionsbereich

$f(x) = f(-x)$ $\uparrow$ $\quad$ $g(-x) = -g(x)$ $\uparrow$ Punktspiegelung

Symmetrieverhalten (gerade / ungerade F. ; periodisch)

Schnittpunkte mit Achsen (NS, Polstellen)

Randpunkte / Verhalten im Unendlichen

Extremalstellen (Maxima, Minima)

$\frac{g^+}{g_+} = g^+$ $\quad$ $\frac{ug^-}{ug^-} = g^+$ $\quad$ $\frac{ug^-}{g^+} = ug^-$ $\quad$ $\frac{g^+}{ug^-} = ug^-$

Extremalwertaufgaben

1) Zielgrösse ("was maximieren?")
2) unabhängige Variable identifizieren ("wovon hängt es ab?")
3) Definitionsbereich bestimmen
4) Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variable ausdrücken ; Skizze wenn möglich
5) relative Extremalstellen bestimmen (finden & prüfen)
6) prüfen, ob relative Extremalstelle absolut ist
   bei (halb-) offenem Definitionsbereich Ränder bestimmen

Newton'sches Tangentenverfahren

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ n-ter Schritt (Newton-Iteration)

- Startwert x_0 (grobe Schätzung der NS)
  Linearisierung der Funktion $f(x)$ im Punkt
  (Gleichung der Tangente $t_0(x)$)

falls $\langle x_n \rangle$ gegen $\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$ konvergiert, dann gilt: $\cancelto{\xi}{x_{n+1}} = \cancelto{\xi}{x_n} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\quad \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$

Rechenregel Potenzen

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Rechenregeln Wurzeln

$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

Rechenregeln Logarithmus

$a^x = b$, $x = \log_a(b) \Rightarrow a^{\log_a(b)} = b$ / $b = e^{\ln(b)}$

$\log_a(f \cdot g) = \log_a f + \log_a g$

$\log_a\left(\frac{f}{g}\right) = \log_a f - \log_a g$

$\log_a(f^k) = k \cdot \log_a u$

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$: natürliche Zahlen (+); 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Z}$: ganze Zahlen (+ & -); -1, 1, -2, 2, ...

$\mathbb{Q}$: rationale Zahlen; $\frac{10}{3}$, 0,5, ...

$\mathbb{I}$: irrationale Zahlen; $\sqrt{2}$, e, $\sqrt{5}$, ...

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen; alles ausser komplexe Zahlen

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad ax^2 + bx + c = 0$$