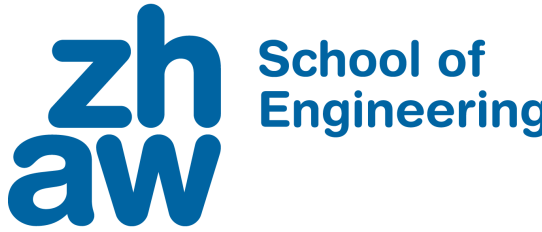


ZUSAMMENFASSUNG ANALYSIS 3

franclu1
ZHAW School of Engineering

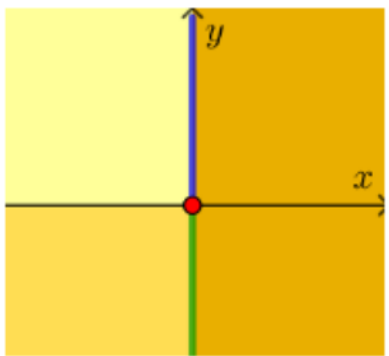


Komplexe Zahlen

$$\begin{aligned}j^2 &= -1 \quad \rightarrow \quad j = \sqrt{-1} \quad ; j \in \mathbb{C} \\z &= \textcolor{blue}{x} + \textcolor{blue}{j} \cdot \textcolor{red}{y} \quad ; \textcolor{red}{Re} \quad \textcolor{red}{Im} \\z^* &= x - j \cdot y \\|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\|z_2 - z_1| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\z_1 + z_2 &= (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \\z_1 - z_2 &= (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \\z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \\\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\z + z^* &= 2 \operatorname{Re}(z) \\z - z^* &= 2 \operatorname{Im}(z) \cdot j \\z \cdot z^* &= |z|^2\end{aligned}$$

Trigonometrische Form

atan2(y;x)	x < 0	x = 0	x > 0
y > 0	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
y = 0		nicht def.	
y < 0	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	



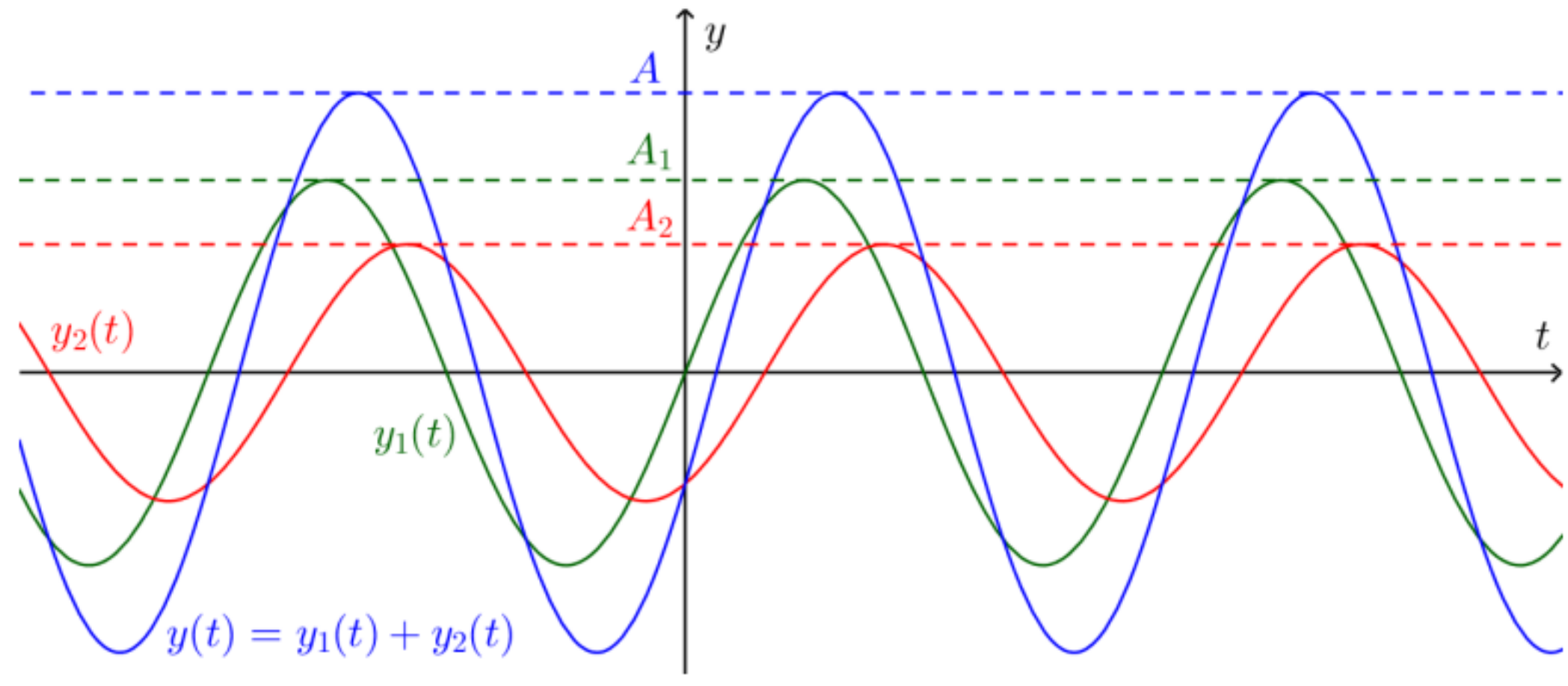
$$\begin{aligned}r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\\varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\z &= x + jy = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi) \\z_1 + z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) + r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) \\z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) \\\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2) \\z^n &= r^n [\cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi)] = r^n \operatorname{cis}(n\varphi) \\z_k &= \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right] = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\j^k &= \begin{cases} 1 & \text{für } k = 4n \\ j & \text{für } k = 4n + 1 \\ -1 & \text{für } k = 4n + 2 \\ -j & \text{für } k = 4n + 3 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad k \bmod 4 = \begin{cases} 0 & \Rightarrow j^k = 1 \\ 1 & \Rightarrow j^k = j \\ 2 & \Rightarrow j^k = -1 \\ 3 & \Rightarrow j^k = -j \end{cases} \\z^n = 1 &\rightarrow z = \sqrt[n]{1} \quad \textcolor{red}{n}\text{-Lösungen}\end{aligned}$$

Exponentialform

$$\begin{aligned}z &= r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad z^* = r \cdot e^{-j\varphi} \\2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 &= 2^6 \cdot \operatorname{cis}\left(6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \\(x + jy)^n &\rightarrow \quad r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + j \sin(n \cdot \varphi))\end{aligned}$$

Schwingungen

$$\begin{aligned}y(t) &= A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \iff y(t) = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \\\text{Überlagerung ergibt Sinus-Schwingung} \\y_1(t) &= A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad y_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)\end{aligned}$$



Vorgehen:

- $y_1 = z_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi_1} = A_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$
- in kartesische Form bringen
- $z = z_1 + z_2$
- zurück in trigonometrische Form bringen $\rightarrow r \cdot \operatorname{cis}(\varphi)$
- Umformen bzw. einsetzen $\rightarrow r \cdot \operatorname{cis}(\varphi) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Fourier (Formeln)

$$\begin{aligned}F_N(x) &= \sum_{k=-N}^N c_k e^{jkx}, \quad \text{bzw.} \quad F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jkx} dx, \quad (k \in \mathbb{Z}) \\a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad (k \geq 0) \\b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad (k \geq 1) \\a_k &= 2 \cdot \Re(c_k), \quad b_k = -2 \cdot \Im(c_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Gerade Funktion:} \quad f(-x) &= f(x) \quad \rightarrow b_k = 0 \\\text{ungerade Funktion:} \quad f(-x) &= -f(x) \quad \rightarrow a_k = 0 \\\omega &= \frac{2\pi}{T}\end{aligned}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\omega_k x) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega_k x) dx$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cdot e^{-j\omega_k x} dx$$

Laplace (Formeln)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} &= c_1 \cdot \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\\mathcal{L}\{t^k\} &= \frac{k!}{s^{k+1}}\end{aligned}$$

Dämpfung mit einem Faktor e^{-gt} entspricht einer Verschiebung um g nach links:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-gt} \cdot f(t)\} &= F(s + g) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \\\text{Bei Verschiebung nach rechts multiplizieren mit } e^{-as} \\ \mathcal{L}\{f(t - a)\} &= e^{-as} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

Erfüllt die Funktion $f(t)$ die Bedingung $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) e^{-sz} = 0$, dann gilt:

$$Y' = \mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot Y(s) - f(0)$$

$$Y'' = \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

DGL 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heißt *linear*, mit der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heißt *separierbar*, mit der Form:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Lösungsverfahren für separierbare Differentialgleichungen

(I) Ausgangspunkt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

(II) Separation (Trennung) der Variablen:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

(III) Integration auf beiden Seiten der Gleichung (falls möglich):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

(IV) Auflösen nach y (falls möglich):

$$y = y(x)$$

Formel für den allgemeinen homogenen Fall y_h :

$$y_h = C \cdot e^{-F(x)}$$

Variation der Konstanten lineare inhomogene 1. DGL

(I) Vergleich mit der allgemeinen Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

und Bestimmung von $f(x)$ und $g(x)$. (Achte auf das Vorzeichen!)

(II) Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

- (III) **Einsetzen in die Formel**
- $$y_h = C \cdot e^{-F(x)}$$
- liefert die Lösung der zugehörigen **homogenen** Differentialgleichung.
- (IV) **Ersetzen von C durch eine Funktion $K(x)$ ergibt den Ansatz:**
- $$y = K(x) \cdot e^{-F(x)}$$
- (V) **Bestimmung von $K(x)$:**
- $$K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx \quad (\text{Integrationskonstante nicht vergessen!})$$
- (VI) **Einsetzen von $K(x)$ in den Ansatz aus (IV) ergibt die allgemeine Lösung:**
- $$y(x) = e^{-F(x)} \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

Lösungsverfahren Aufsuchen einer p-Lösung

- (I) **Vergleich der DGL mit der allgemeinen Form**
- $$y' + a \cdot y = g(x)$$
- und Bestimmung von a und $g(x)$. (Achte auf das Vorzeichen!)
- (II) **Einsetzen in die Formel**
- $$y_h = C \cdot e^{-ax}$$
- liefert die Lösung der zugehörigen **homogenen Differentialgleichung**.
- (III) **Mit Tabelle: Bestimme den Ansatz für die partikuläre Lösung y_p .**
- (IV) **Bestimme y_p' , indem du den Ansatz aus (III) ableitest.**
- (V) **Setze y_p und y_p' in die Differentialgleichung ein.**
- (VI) **Bestimme die Parameter durch Koeffizientenvergleich.**
Dies ergibt die **partikuläre Lösung y_p .**
- (VII) **Die allgemeine Lösung ist:**
- $$y = y_h + y_p$$

DGL 2. Ordnung

Eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit der Form

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

Die Lösung einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung in Linearkombination:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Lösungsverfahren für homogene lineare DGL 2. Ordnung

- (I) **Charakteristische Gleichung aufstellen:**
- $$y'' + ay' + by = 0 \rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$
- (II) **Bestimmen von λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung.**
- (III) **Aufstellen der allgemeinen Lösung gemäß der nachfolgenden Formeln:**
- Fall 1:** $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell) $\Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
- Fall 2:** $\lambda_1 = \lambda_2 = c$ (reell, doppelte Nullstelle) $\Rightarrow y = (C_1 x + C_2) e^{cx}$
- Fall 3:** $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex) $\Rightarrow y = e^{\alpha x} (C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$
- | | |
|--------|---------|
| Fall 1 | $D > 1$ |
| Fall 2 | $D = 0$ |
| Fall 3 | $D < 0$ |

Lösungsverfahren „Aufsuchen einer partikulären Lösung“

- $$y'' + ay' + by = g(x) \quad \text{inhomogen}$$
- (I) **Bestimme die homogene Lösung y_h der zugehörigen Gleichung**
- (II) Bestimme die **Störfunktion $g(x)$.**
- (III) Aus der Tabelle: **Wähle den passenden Ansatz** für die partikuläre Lösung y_p .
(Tabelle für die 2. Ordnung verwenden!)
- (IV) Bestimme y_p' und y_p'' durch Ableiten des Ansatzes aus (III).
- (V) Setze y_p , y_p' und y_p'' in die Differentialgleichung ein.
- (VI) Bestimme die Parameter durch **Koeffizientenvergleich**. Dies ergibt y_p
- (VII) **Die allgemeine Lösung lautet:**
- $$y = y_h + y_p$$

Wenn nach dem Einsetzen 0 herauskommt, dann war die Wahl des Ansatz falsch

Partielle Integration

x-Variable: $f_x(x, y)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

y-Variable: $f_y(x, y)$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

f_x nach y ableiten – Ergebnis: $f_{xy}(x, y)$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$

Satz von Schwarz: Sind die partiellen Ableitungen k -ter Ordnung stetig, so gilt:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}} \quad \text{für jede Vertauschung } \sigma.$$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \rightarrow \left(\vec{\nabla} = \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \right)$$

- (1) $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ steht senkrecht auf der Höhenlinie von f durch $P' = (x_0, y_0)$.
- (2) $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ zeigt in Richtung, in der der Graph von f an dieser Stelle am steilsten ist.
- (3) Die maximale Steigung ist durch den Betrag des Gradienten gegeben: $|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)|$.

Richtungsableitung: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{a}.$

Das totale Differential

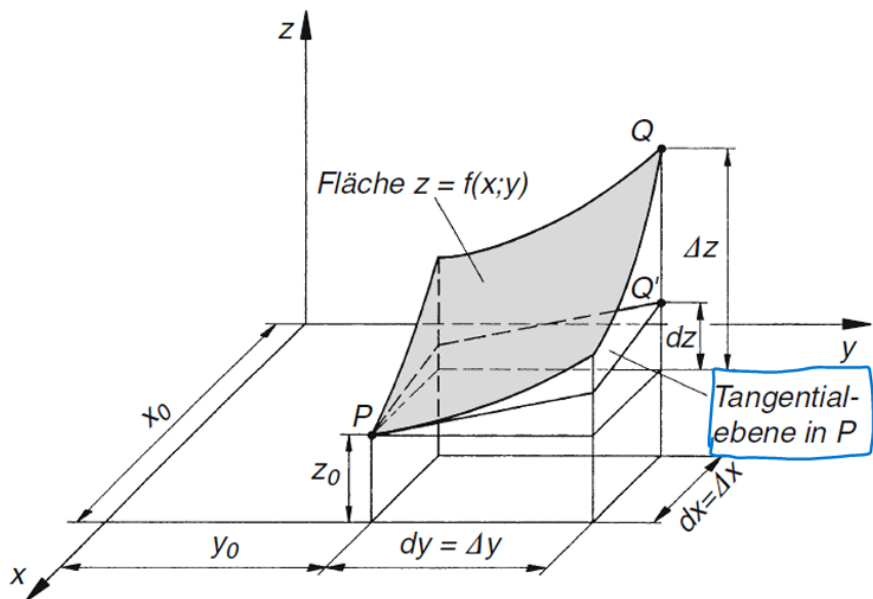
Abschätzung der Änderung von z bei Änderung von x und y .

Approx.: Tangentialebene $dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$

real: Fläche $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

Formel für Tangentialebene:

$$f(x, y) \approx f_x(x_0, y_0) (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$



Relative Extremwerte

(lokales / globales) Maximum wenn gilt;

$$f(x, y) \leq z_0 = f(x_0, y_0).$$

Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum

Jede Extremalstelle (x_0, y_0) liegt in einer der folgenden Punktmengen:

- Menge der kritischen Punkte von D .
- Menge der Randpunkte von D .

Hinreichende Bedingung für ein relatives Extremum

Eine Funktion $z = f(x, y)$ besitzt an der Stelle (x_0, y_0) mit Sicherheit ein relatives Extremum, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(1) f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$(2) \Delta = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0$$

Ausserdem gemäss Hesssche Matrix:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\Delta > 0, f_{xx} > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum,}$$

$$\Delta > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum,}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt,}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \text{keine Entscheidung möglich.}$$

Doppelintegral

$$A = \iint_A f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

Integral von f über den Bereich A

$$dA = dy dx = dx dy$$

$$V = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dy dx$$

Grenzen in y abhängig von x , deshalb zuerst dy integrieren;

$$V = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x, y) dy dx$$

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi \quad \text{wobei; } \partial A = r \partial r \partial \varphi$$

$$\text{weil; } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta A_k \quad \text{folgt; } A = \iint_A 1 \partial A$$

Schwerpunkte:

$$x_s = \frac{1}{A} \iint_A x dA \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{A} \iint_A y dA$$

Axiales Flächenträgheitsmoment:

$$I_x = \iint_A y^2 dA \quad \text{und} \quad I_y = \iint_A x^2 dA$$

polares Flächenträgheitsmoment:

$$I_p = \iint_A r^2 dA = \iint_A (x^2 + y^2) dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$

Satz von Steiner:

$$I_t = I_s + d^2 A$$

Dreifachintegrale

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) \, dV = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Volumenelement in Zylinderkoordinaten:

$$dV = r \, dr \, d\varphi \, dz$$

Integral Volumen und Masse:

$$V = \iiint_{\partial V} = \iiint (1) \, dV \quad m = \iiint \rho(x, y, z) \, dV$$

Schwerpunkt:

$$x_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x \, dV, \quad y_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y \, dV, \quad z_s = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z \, dV.$$

Massenträgheitsmoment:

$$J = \iiint_{(V)} r_A^2 \, dV$$

Vektorfelder

Ebnes Vektorfeld: $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$,

Räumliches Vektorfeld: $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$

Feldlinie:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Tangentialvektor:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

Feldvektor $\vec{F}$ verläuft parallel: $\vec{F}$ und $\vec{r}$ linear abhängig:

$$\text{2-dimensionaler Fall:} \quad \det(\vec{F}, \vec{r}) = 0$$

$$\text{3-dimensionaler Fall:} \quad \vec{F} \times \vec{r} = \vec{0}$$

Differentialoperatoren

Der Gradient $\text{grad} f = \vec{\nabla} f$ des Skalarfeld f ist ein Vektorfeld $\vec{F}$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f \\ \frac{\partial}{\partial y} f \\ \frac{\partial}{\partial z} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergenz:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \text{div } \vec{F} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad \text{im } \mathbb{R}^2 \quad \text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \text{im } \mathbb{R}^3$$

Bedeutung der Divergenz:

$$\text{div } \vec{F} > 0 \implies \text{Quellenwirkung}$$

$$\text{div } \vec{F} < 0 \implies \text{Senkungswirkung}$$

$$\text{div } \vec{F} = 0 \implies \text{quellenfrei/Wirbelfeld}$$

Rotation

Die **Rotation** eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

Die **Rotation ist ein Mass für die Wirbeldichte eines Vektorfeldes**

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \text{wirbelfrei/Potentialfeld}$$

Für Bestimmung von Rot. in ebenen Feld muss z=0 gesetzt werden in $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \implies \text{es gibt ein Vektorfeld } \vec{F} \text{ mit } \vec{E} = \text{rot } \vec{F}$$

in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G gilt;

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \implies \text{es gibt ein Skalarfeld } f \text{ mit } \vec{F} = \text{grad } f.$$

Laplace Operator: Divergenz des Gradienten

$$\Delta g = \nabla \cdot (\nabla g) = (\nabla \cdot \nabla) g = \nabla^2 g$$

Kurvenintegrale

Parametrierisierung:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(P_1) + t \overrightarrow{P_1 P_2}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Kurvenintegral:

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \, dt$$

Für ein Vektorfeld $\vec{F}$ in einem **einfach zusammenhängenden Gebiet** G :

1. Das Integral $\int_C \vec{F} \, d\vec{r}$ ist in G **wegunabhängig**

2. In G ist das Integral über $\vec{F}$ längs jedes **geschlossenen Weges Null**:

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = 0$$

3. In G ist $\vec{F}$ ein **Potentialfeld (konservativ)**, d. h. es gibt ein Potential $f(x, y, z)$ mit

$$\int F_x \cdot dx + \varphi(y, z) \dots$$

4. Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist in G **wirbelfrei**, d. h. es gilt:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Methoden zur Berechnung eines Kurvenintegrals im Gebiet G :

- Definition des Kurvenintegrals
- $\vec{F}$ wirbelfrei
- Potentialdifferenz

$$\int \vec{F} \, d\vec{r} = f(P_2) - f(P_1), \quad \text{falls } \vec{F} = \nabla f.$$

Oberflächenintegrale

Oberflächenintegral:

$$\Phi = \iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA$$

Bei der Berechnung von Oberflächenintegralen geht man so vor:

- geeignete Koordinaten wählen (kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten)
- Normalenvektor bestimmen $\vec{N}$, berechnet das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \vec{N}$ und durch zwei der gewählten Koordinaten ausdrücken
- Das Flächenelement dA durch beide Koordinaten ausdrücken
- Integrationsgrenzen für das erhaltene Doppelintegral festlegen
- Doppelintegral ausrechnen

Integralsatz Gauss

$$\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{F} \, dV$$

Integralsatz Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A}$$