

ZUSAMMENFASSUNG FESTIGKEITSLEHRE 1

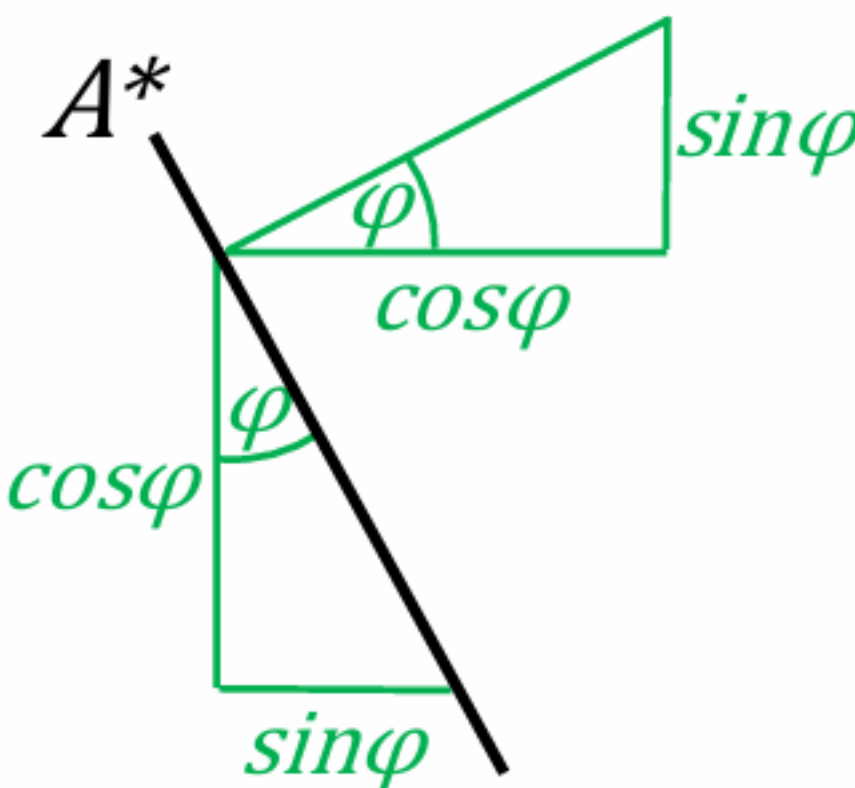
franclu1
ZHAW School of Engineering

Spannung

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA} \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$$

$$\sigma(\varphi) = \frac{\sigma_0}{2} (\cos 2\varphi + 1)$$

$$\tau(\varphi) = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\varphi$$



Hooksche Gesetz

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\begin{matrix} E_{\text{Stahl}} = 210000 \text{ MPa} \\ E_{\text{Alu}} = 70000 \text{ MPa} \end{matrix}$$

Normalspannungen ändern Volumina und Längen

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \rightarrow \quad \tau = G \cdot \gamma = \frac{Q}{A}$$

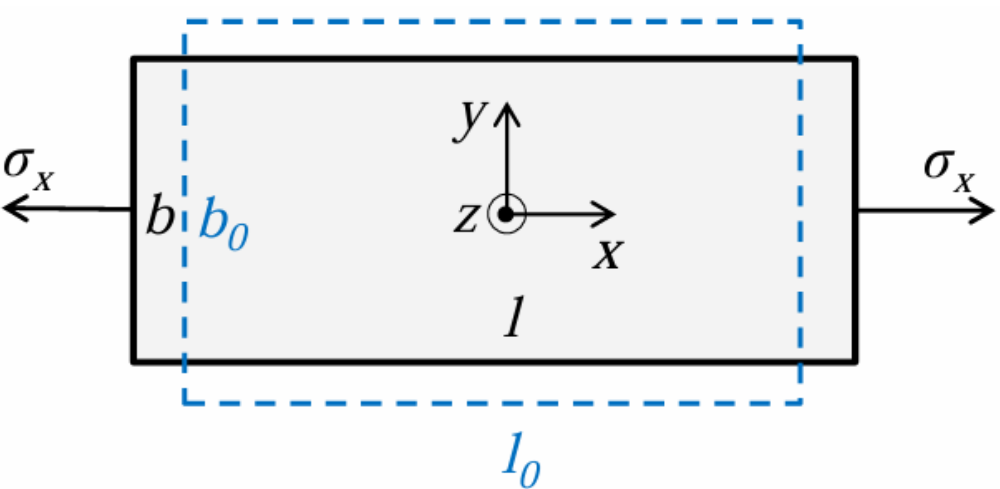
$$\begin{matrix} G_{\text{Stahl}} = 80000 \text{ MPa} \\ G_{\text{Alu}} = 27000 \text{ MPa} \end{matrix}$$

Schubspannungen ändern Gestalt und Winkel

$$\varepsilon_x = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$



$$0 < \nu < 0.5$$

$$\nu_{\text{Metall}} = 0.3$$

Verschiebung und Dehnung

$$u(x) = \frac{F}{EA} x = \varepsilon x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u'(x) = \varepsilon$$

$$\Delta l = u(l) - u(0) = \int_0^l du = \int_0^l u'(x) dx = \int_0^l \varepsilon dx$$

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Die Dehnung ist die erste Ableitung der Verschiebung.

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Näherungen in linearer Festigkeitslehre:

$$\sin \varphi \sim \sin 0 + (\cos 0) \varphi = \varphi$$

$$\cos \varphi \sim \cos 0 - (\sin 0) \varphi = 1$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sim \frac{\varphi}{1} = \varphi$$

Zug und Druck in Stäben

$$\frac{dN}{dx} + n(x) = 0 \quad \text{wobei;} n(x) = gpA$$

Elastizitätsgesetz für den Stab:

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha \Delta T(x)$$

Differentialgleichung des Stabes:

$$(EA u')' = -n + (EA \alpha \Delta T)'$$

Verlängerung des Stabes:

$$\Delta l = \int_0^l du = \int_0^l \left(\frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha \Delta T(x) \right) dx$$

Verlängerung im Sonderfall - EA=const, N=F, dT=const

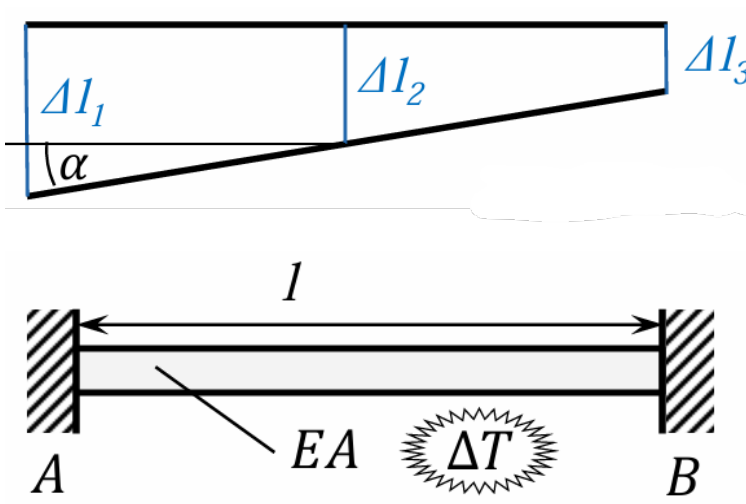
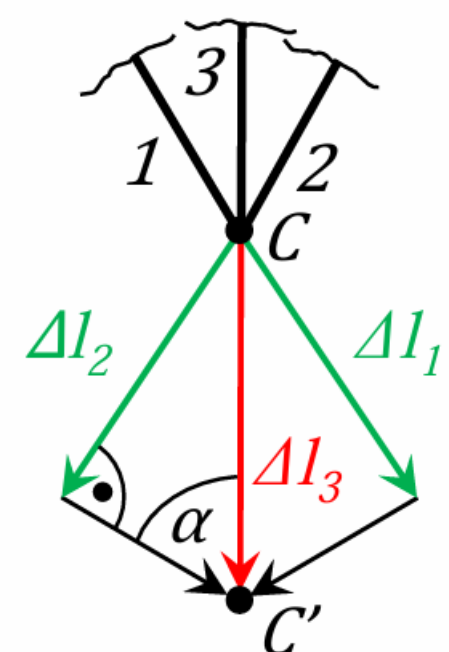
$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \alpha \Delta T l$$

$$\Delta l_3 \sin \alpha = \Delta l_2$$

$$2k = s + r$$

$$\Delta l_2 = \frac{1}{2}(\Delta l_1 + \Delta l_3)$$

$$\Delta l = 0$$



Spannungsmatrix

eine normal und zwei parallel zur Schnittfläche:

eine Normal- und zwei Schubspannungen:

$$t_n = (t_i)_n = \begin{pmatrix} t_{nn} \\ t_{n1} \\ t_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \tau_{n1} \\ \tau_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma \equiv (\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ t_3^T \end{pmatrix}$$

$$n = (n_i) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Formel von Cauchy:

Der in einer Fläche mit Normalenvektor $\mathbf{n}$ wirkende Spannungsvektor $\mathbf{t}_n$ kann mit Hilfe der Spannungsmatrix $\underline{\underline{\sigma}}$ berechnet werden:

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{t}_n \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^3 \sigma_{ik} n_i = t_{nk}$$

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$$

Lineare Algebra

Drehmatrix:

$$\underline{\underline{a}} = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Multiplikation Drehmatrizen:

$$\underline{\underline{a}}(\varphi_2) \cdot \underline{\underline{a}}(\varphi_1) = \underline{\underline{a}}(\varphi_2 + \varphi_1)$$

Inverse:

$$\underline{\underline{a}}^T(\varphi) = \underline{\underline{a}}^{-1}(\varphi)$$

Determinante:

$$\det \underline{\underline{a}} = \cos \varphi \cos \varphi - \sin \varphi (\sin \varphi) = 1$$

Eigenvektoren

Hauptspannungen = Eigenwerte (σ)

Hauptrichtungen = Eigenvektoren

Transformationsmatrix = Matrix aus normierten EV

Diagonalform = (σ^*)

1. Eigenwerte bestimmen:

$$I_2 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$I_1 = \det \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \det(A)$$

1.1 charakteristische Gleichung aufstellen

$$-\lambda^3 + I_2(-\lambda)^2 + I_1(-\lambda) + I_0 = 0$$

Nullstelle erraten -> Polynomdivision -> Mitternachtsformel

2. Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungen aufstellen (x,y,z) -> x=1 einsetzen -> auflösen nach y,z

Normieren:

$$\frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = n \quad \rightarrow \quad n \cdot \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_2^x \\ v_3^x \end{pmatrix}$$

4. Transformationsmatrix aus normierten EV:

$$V = \begin{pmatrix} v_1^x & v_2^x & v_3^x \\ v_1^y & v_2^y & v_3^y \\ v_1^z & v_2^z & v_3^z \end{pmatrix}$$

Diagonalform:

$$V \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot V^T = \sigma^*$$

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

wobei gilt:

$$\lambda_1 = \sigma_1$$

$$\lambda_2 = \sigma_2$$

$$\lambda_3 = \sigma_3$$

Spannungsmatrix in 2D

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{xy} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}$$

$$a \equiv \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma'_{xy} = a \sigma_{xy} a^T$$

Transformation von xy in x'y':

$$\sigma_{x'x'} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

Drehwinkel in das Hauptspannungssystem:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Hauptschubspannungen ($\tau_{max} = \varphi^* + 45^\circ$):

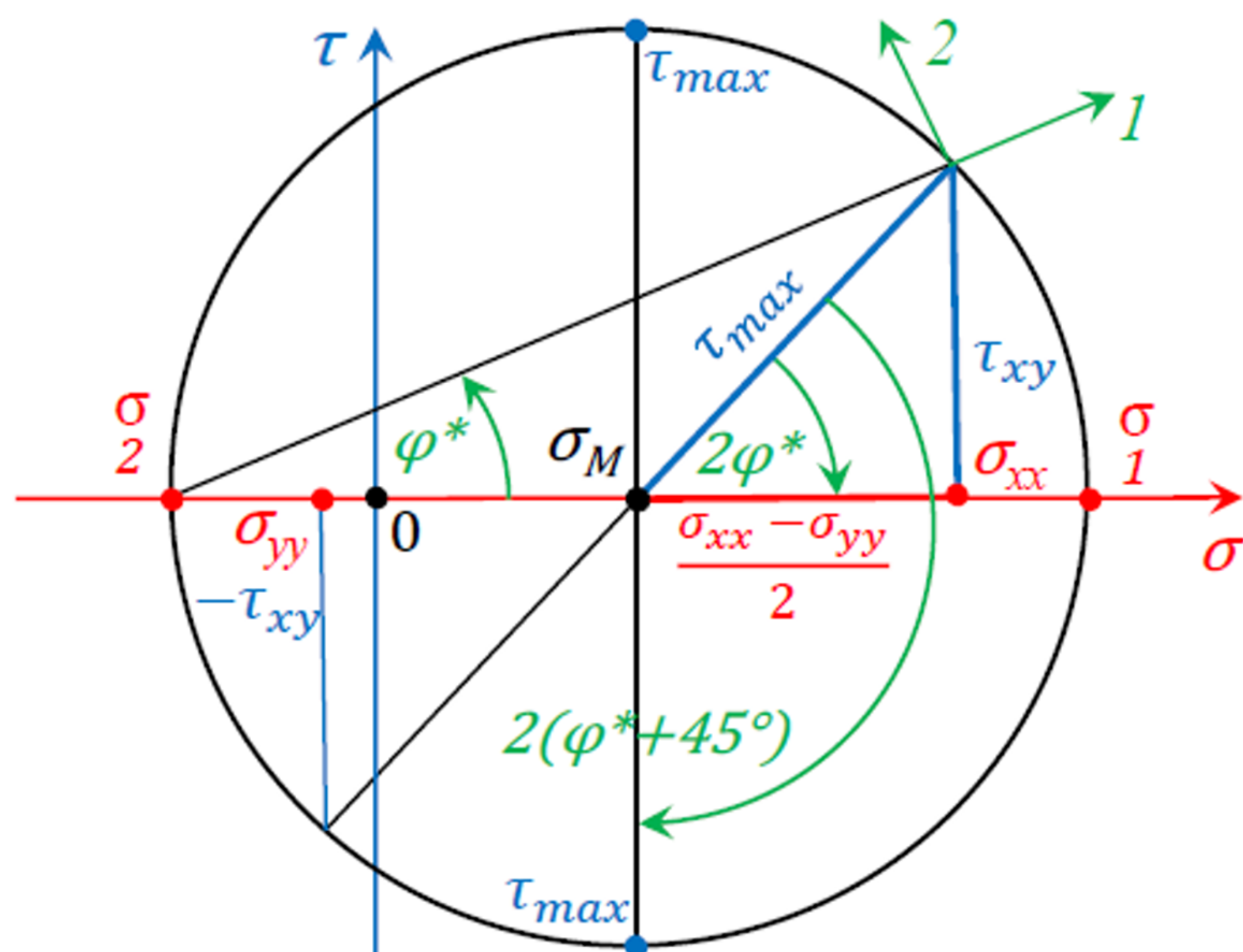
$$\tau_{max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Normalspannungen in Hauptschubspannungsebenen:

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Mohrsche Spannungskreis

$$(\sigma - \sigma_M)^2 + \tau^2 = \tau_{max}^2$$



allgemeine Hooksche Gesetz

Superposition der Dehnungen 3-achsig:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

2-achsig:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}),$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(-\nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Hoohsche Gesetz in Matrixform: möglich durch Voigtsche Notation

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nachgiebigkeitsmatrix D

$$\varepsilon \equiv D \sigma + \varepsilon_T$$

Hooksche Gesetz invertiert für σ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{zz} - \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

Elastizitätsmatrix C $\equiv D^{-1}$

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_T)$$

Dehnungstensor

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi = \varepsilon_{abc}$$

$$\varepsilon_{y'y'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cos 2\varphi$$

Hauptdehnungen 1 und 2:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \pm \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2})$$

Hauptachsen; Drehwinkel ins Hauptachsensystem:

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}$$

Hauptspannung aus hooksche Zusammenhang (siehe 2-achsig)

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Spannungstensor im XY-System:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Vergleichsspannungen

von Mises Hypothese: Sicherheitsfaktor gegen Streckgrenze (duktiler Stoffe/Fliesen)

- Für einen dreiachsigen Spannungszustand gilt:

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

- Für einen zweiachsigen Spannungszustand gilt mit $\sigma_3 = 0$:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2}$$

- Für einen einachsigen Spannungszustand gilt mit $\sigma_2 = 0$ und $\sigma_3 = 0$:

$$\sigma_v = \sigma_1 = \sigma_{xx}$$

Hypothese von Tresca: Sicherheitsfaktor gegen Streckgrenze (Fliesen)

= Schubspannungshypothese

$$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$$

- Im Falle eines zweiachsigen Spannungszustandes mit $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ gilt:

$$\sigma_v = \sigma_1$$

- Im Fall $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ gilt:

$$|\sigma_v| = -\sigma_2$$

Normalspannungshypothese: Sicherheitsfaktor Zugfestigkeit (spröde Stoffe/Bruch)

$$\sigma_v = \sigma_1$$

Sicherheitsrechnung (z.B. gegen Fliesen):

$$s = \frac{R_p 0.2}{\sigma_v} = \frac{Re}{\sigma_v}$$