

inelastischer Stoß

frontal! *! Vorzeichen der Geschwindigkeit*

Geschwindigkeit nach dem Stoß:

$$v_1' = v_2' = v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Impulserhaltungssatz:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Energie:

$$E_{kin} > E_{kin}'$$

$$\Delta E = E_1 + E_2 - (E_1' + E_2')$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - (\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2)$$

$$F_{Stoß} = - \frac{m \cdot v_{vorher}^2}{2 \cdot \Delta x} \rightarrow a = \frac{F_{Stoß}}{m}$$

$$\Delta p = F_{Stoß} \cdot \Delta t$$

Elastischen Stoß

Feder

-energie $E_s = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$

-kraft $F_s = k \cdot \Delta x$
*Feder-Spannung
konstanter Feder*

max. Stoßkraft
bzw.
Verformung

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{stoss} - p_{vor}}{\Delta t} \quad \omega = \frac{\pi}{\Delta t_{stoss}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Delta x = \frac{F}{k} \quad k = m \cdot \omega^2$$

Geschwindigkeit nach dem Stoß:

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Impulserhaltungssatz:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Energieerhaltungssatz:

$$E_{kin} = E_{kin}'$$

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Kreisbahn

$$x(t) = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y(t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Geschwindigkeit (1. Ableitung)

$$v_x(t) = -\omega \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v_y(t) = \omega \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Arbeit - Leistung

Spannarbeit (Feder)

$$W = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$$

Beschleunigungsarbeit ($\equiv$ kin. Energie)

$$W = \frac{1}{2} m v^2 \text{ [J] "Joule"}$$

mech. Leistung

$$P = \frac{W}{t} \text{ [W] "Watt"}$$

Zentripetalkraft

$$F_z = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2$$

Kreisradius *Winkelgeschw.*

Freier Fall

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Potenzielle Energie

$$- m \cdot g \cdot h$$

negatives Vorzeichen
wenn Bezugssystem
nach oben

Auch: Aufstiegsarbeit

Senkrechter Wurf

$$h(t) = h_0 + v \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Höhe *Geschwindigkeit (zeit)*

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$h_{max} = \frac{v^2}{2g}$$

1 Austritt aus der Erdumlaufbahn

$$E_{kin, rE} + E_{pot}(r_E) = \frac{m \cdot v_{rE}^2}{2} - \frac{G \cdot m \cdot m_E}{r_E} = E_{kin, r=\infty} + E_{pot}(r=\infty) = 0$$

$$\rightarrow v_{rE} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_E}{r_E}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot r_E} = \sqrt{2 \cdot 9.82 \cdot 6.37 \cdot 10^6} \frac{m}{s} = 11.2 \frac{km}{s}$$

Rakete

$$M dv = u dm$$

$$\rightarrow M \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$$

M = Masse Rakete
u = Ausstrichgeschw.
v = Geschwindigkeit
dm = ausgestoßene Masse

$$a_z(t) = \frac{R}{m_{R,0} - R \cdot t} \cdot u - g$$

$$R = \rho \cdot A \cdot u$$

Gaskontinuität *noch*

Die Brenndauer berechnet sich aus der Startmasse, der Verbrennungsrate und der Nutzlast

$$m_{R,L} = m_{R,0} - R \cdot t_L \rightarrow t_L = \frac{m_{R,0} - m_L}{R} = \frac{m_{R,0} - m_L}{\rho \cdot A \cdot u_{min}} = 29.6 \text{ s}$$

Es folgt für die maximale Geschwindigkeit:

$$v_{R,z,max} = u_{min} \cdot \ln\left(\frac{m_{R,0}}{m_{R,L}}\right) - g \cdot t_L = 213 \frac{m}{s} = 768 \text{ km/h}$$

Fluidreibung *~ Luftwiderstand*

Kraft $F_R = \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$

Arbeit $W_R = \int_A^B \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 \cdot ds$
 $= \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \Delta s$
 $= E_{pot} - E_{kin}$

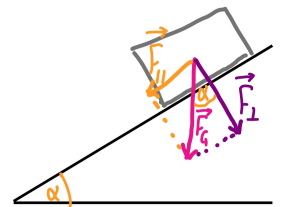
im Fall, umgekehrt
bei steigenden Bewegungen

Leistung $P_R = \frac{W}{t}$

falls $\vec{F}$ und $\vec{v}$ konstant

$$P_R = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Schiefe Ebene



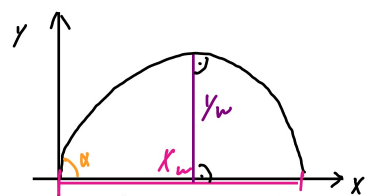
Senkrechtkomponente

$$F_I = F_g \cdot \cos(\alpha)$$

Parallelkomponente

$$F_{II} = F_g \cdot \sin(\alpha)$$

Schiefer Wurf



(max.) Wurfweite

$$x_w = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

(max.) Wurfhöhe

$$y_w = \frac{1}{2} x_w \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot (\frac{1}{2} x_w)^2}{2 v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}$$

Geschwindigkeiten

$$v_x = v \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_y = v \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Wichtige Ableitungen / Integrale

$F(x)$	$f(x)$	$\dot{f}(x)$
$\frac{1}{n} x^{n+1}$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Schwingung

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = \frac{v}{r}$

Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} [s]$

Phase $\phi = \pi - \omega \cdot t_{\text{minimum}}$

t_{minimum} bestimmt man graphisch aus dem Diagramm, es ist ein globales/lokales Minimum der sin-funktion

8.1.8 Energie-Arbeit

	J	Nm	Ws	kWh	cal	Kcal
J	1	1	1	$2,778 \cdot 10^{-7}$	0,2388	0,0002388
Nm	1	1	1	$2,778 \cdot 10^{-7}$	0,2388	0,0002388
Ws	1	1	1	$2,778 \cdot 10^{-7}$	0,2388	0,0002388
kWh	$3,6 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^6$	1	$8,598 \cdot 10^5$	859,8
cal	4,187	4,187	4,187	$1,163 \cdot 10^{-6}$	1	0,001
Kcal	4187	4187	4187	0,001163	1000	1

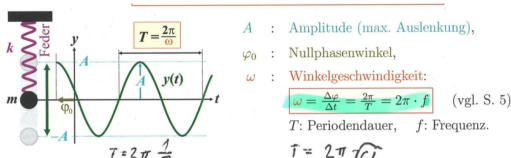
Abgeleitete SI-Einheiten

$v, \vec{v}, c$	Geschwindigkeit (velocity)	$\frac{m}{s}$	Meter pro Sekunde
$p, \vec{p}$	Impuls (momentum)	$kg \frac{m}{s}$	Kilogramm · Meter pro Sekunde
$a, \vec{a}, g, \vec{g}$	Beschleunigung (acceleration)	$\frac{m}{s^2}$	Meter pro Quadratsekunde
$F, \vec{F}$	Kraft (Force)	$N = kg \frac{m}{s^2}$	Newton
A	Fläche (Area)	m^2	Quadratmeter
V	Volumen	m^3	Kubikmeter
p	Druck (pressure)	$Pa = \frac{N}{m^2}$	Pascal
ρ	Dichte (density)	$\frac{kg}{m^3}$	Kilogramm pro Kubikmeter
W, E	Arbeit (Work), Energie	$J = N \cdot m$	Joule
$U, Q, \Delta Q$	Innere Energie, Wärme	$J = N \cdot m$	Joule
P	Leistung (Power)	$W = \frac{J}{s}$	Watt
f	Frequenz (frequency)	Hz	Hertz = Sekunde ⁻¹
$\omega, \vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{1}{s}$	rad pro Sekunde
$M, \vec{M}$	Drehmoment (torque)	N m	Newton · Meter
$L, \vec{L}$	Drehimpuls, Drall	$kg \frac{m^2}{s}$	Kilogramm · Quadratmeter pro Sekunde
J, I, Θ	Trägheitsmoment (Inertia)	$kg m^2$	Kilogramm · Quadratmeter

Pendel, Harm. Schwingung

mit t bekannt

Auslenkung: $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$
 Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{y}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$
 Beschleunigung: $a(t) = \ddot{y}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot y(t)$



Federpendel	Winkelgeschwindigkeit	Fadenpendel
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{L}}$	$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{L}}$
$F_{\text{Rück}} = -k \cdot y$	Kraftgesetz	$F_{\text{Rück}} \approx -\frac{m}{L} \cdot y$
$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$	Differentialgleichung	$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot y \approx 0$

Satellit

$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G \cdot (M_1 + M_2)}}$

a = Abstand zum Schwerpunkt der Erde
 $M_1/M_2 \rightarrow$ Massen

$G = 6,674 \cdot 10^{-11}$

Seilkraft

für 2 identische Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$

$\frac{m \cdot g}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{m \cdot g \cdot b}{4d}$

t unbekannt, v maximal

$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi)}$

L = Pendellänge / Federauslenkung
 φ = Auslenkwinkel

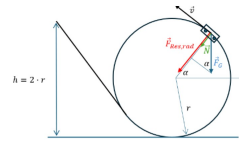
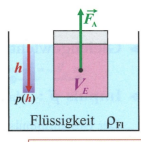
Hydrostatischer Druck: Druck einer Flüssigkeits- oder Gas-Säule der Höhe h : $p(h) = \rho_{fl} \cdot g \cdot h$ (falls ρ_{fl} konstant).

Auftriebskraft: Satz von Archimedes:

Auftriebskraft = Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit:

$F_A = \rho_{fl} \cdot g \cdot V_E$ V_E : Eintauchtes Volumen.

Barometerformel: Luftdruck als Funktion der Höhe h über Meer: $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}}$
 wobei $\left\{ \begin{array}{l} p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} : \text{Luftdruck} \\ \rho_0 = 1,293 \frac{kg}{m^3} : \text{Luftdichte} \end{array} \right\}$ auf Meereshöhe ($T_0 = 0^\circ C$) bezeichnen (Normbedingungen).



Die resultierende Kraft in radialer Richtung setzt sich zusammen aus der Normalkraft der Bahn und der radialen Komponente der Gewichtskraft:

$\vec{F}_{Res,rad} = \vec{N} + \vec{F}_G \cdot \sin \alpha$

Solange $\vec{N} > 0$ bleibt der Wagen in der Bahn. Damit folgt:

$|\vec{F}_{Res,rad}| = \frac{m \cdot v^2}{r} \geq m \cdot g \cdot \sin \alpha$

Aus der Energieerhaltung folgt:

$\frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot r \cdot (1 + \sin \alpha) \rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot (h - r \cdot (1 + \sin \alpha))$
 $\frac{m \cdot 2 \cdot g \cdot h \cdot (1 + \sin \alpha)}{r} \geq m \cdot g \cdot \sin \alpha \rightarrow 2 \cdot g \cdot (h - r \cdot (1 + \sin \alpha)) \geq g \cdot r \cdot \sin \alpha$
 $2 \cdot g \cdot (h - r) \geq g \cdot r \cdot 3 \cdot \sin \alpha$
 $\sin \alpha \leq \frac{2 \cdot (h - r)}{3 \cdot r}$

Gleichförmige und gleichmäßig beschleunigte Bewegungen

Gleichförmige Bewegung	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung
Ort, Strecke: $x(t) = v \cdot t + x_0$	Ort, Strecke: $x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$
Geschwindigkeit: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{konstant}$	Geschwindigkeit: $v(t) = a \cdot t + v_0$
Beschleunigung: $a = 0$	Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{konstant}$

Spezielle Formeln der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ($x_0 = 0$):

Ohne t : $x = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$	Ohne a : $x(t) = \frac{1}{2} \cdot (v + v_0) \cdot t$	Speziell: $v_0 = 0$ (Bewegung aus Ruhelage) $x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $x = \frac{v^2}{2 \cdot a}$ $x(t) = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$
---	--	--

Laminare Strömung

Reibungskraft bei laminarer Strömung (v klein, keine Wirbel)

$F_R = 6 \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ η : Viskosität, vgl. S. 8. Tabelle S. 33.

Fehlerrechnung

Mittelwert:

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Standardabweichung (Stichprobe): $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

Absoluter Fehler des Mittelwertes: $\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma$

$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Winkelgeschw. / -beschleunigung

Die Winkelgeschwindigkeit berechnet sich aus der Winkelbeschleunigung: $\dot{\varphi} = \int a_\varphi dt = a_\varphi \cdot t$

Der Winkel berechnet sich aus der Winkelgeschwindigkeit: $\varphi = \int \dot{\varphi} dt = \int a_\varphi \cdot t dt = \frac{1}{2} a_\varphi \cdot t^2$

Die Tangentialbeschleunigung beträgt: $a_t = \dot{\varphi} \cdot r = a_\varphi \cdot r$

Die Tangentialgeschwindigkeit beträgt: $v_t = a_t \cdot t = a_\varphi \cdot r \cdot t$

Die Radialbeschleunigung ist $a_r = \frac{v_t^2}{r} = a_\varphi^2 \cdot r \cdot t^2$

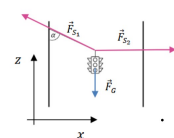
Looping / Feder

(d) (2,0 Pt) Wie gross ist die minimale Anfangsauslenkung d der Feder, sodass der Block im Looping gerade nicht herunter fällt?

„Fällt gerade nicht herunter“ bedeutet: $F_Z = m v_C^2 / R = m g \rightarrow v_C = \sqrt{Rg}$. Die gesamte Energie beim Punkt C ist $E_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g R = \frac{1}{2} m R g + m g R = \frac{3}{2} m g R$. Sie muss gleich sein der Energie

der gespannten Feder: $\frac{1}{2} k d^2 = \frac{3}{2} m g R \rightarrow d = \sqrt{\frac{3 m g R}{k}} = 8,45 \text{ cm}$

Seilkraft m. d. Parallele



x-Richtung:

$F_{S1,x} + F_{S2,x} = 0$

$-F_{S1} \cdot \sin \alpha + F_{S2} = 0 \rightarrow F_{S2} = F_{S1} \cdot \sin \alpha$

z-Richtung:

$F_{S1,z} + F_{S2,z} - m \cdot g = 0$ ($F_{S2,z} = 0$)

$F_{S1} \cdot \cos \alpha = m \cdot g \rightarrow F_{S1} = \frac{m \cdot g}{\cos(\alpha)} \rightarrow F_{S2} = \frac{m \cdot g}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \tan(\alpha) = 849 \text{ N}$