

Analysis 2

Fabian Starc

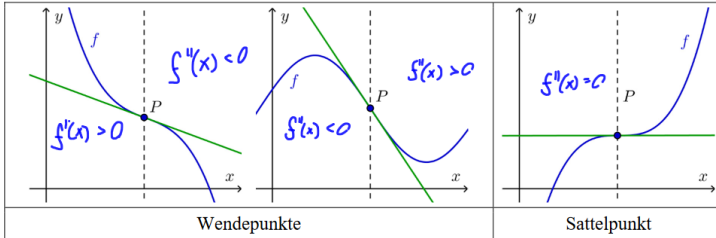
Version: January 18, 2026

Monotonität

Definitionsbereich bestimmen

wenn $f'(x) \geq 0$ dann ist der Graph **monoton wachsend**
wenn $f'(x) \leq 0$ dann ist der Graph **monoton fallend**

Wende- und Sattelpunkte



Sattelpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$

Wendepunkt: $f'(x)$ = beliebig und $f''(x) = 0$

relatives Maximum / relatives Minimum: $f'(x) = 0$

Hoch- und Tiefpunkte

1. $f(x)$ ableiten
2. Nullstellen von $f'(x)$ bestimmen = neues x_0
3. wenn $f''(x_0) < 0$ so ist $(x_0; f(x_0))$ ein **relativer Hochpunkt**.
4. wenn $f''(x_0) > 0$ so ist $(x_0; f(x_0))$ ein **relativer Tiefpunkt**.

Untersuchung von Funktionen

1. Definitionsbereich bestimmen
2. Symmetrieeigenschaften (gerade/ungerade) und Periodizität bestimmen
3. Nullstellen, y-Achsenabschnitt und Polstellen bestimmen
4. Randpunkte bestimmen bzw., wie sich die Funktion verhält, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsbereichs strebt (ggf. Asymptote untersuchen)
5. Kandidaten für relative Extrema bestimmen und untersuchen
6. Wendepunkte suchen
7. Tabelle von Werten aufstellen (falls nötig)

Vorgehen bei Extremwertaufgaben

1. Zielgrösse bestimmen
 2. Unabhängige Variable bestimmen
 3. Definitionsbereich bestimmen ($d_1; d_2$) oder $[d_1; d_2]$
 4. Zielgrösse als Funktion ausdrücken (wenn möglich Skizze oder Graphen machen)
 5. Ist Minimalstelle oder Maximalstelle gefragt? Randpunkte nicht vergessen!
 - erste Ableitung bestimmen.
 - **Nullstellen** von $f'(x)$ herausfinden.
 - zweite Ableitung bestimmen.
 - Nullstelle in $f''(x)$ einsetzen und prüfen:
wenn $f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ ist relative Maximalstelle
wenn $f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ ist relative Minimalstelle
- Wenn Intervall in $D \rightarrow$ keine Randpunkte, keine weiteren Kandidaten.

6. Intervall in $D \rightarrow \lim_{x_0 \rightarrow d_1 / d_2}$

- **relative Maximalstellen werden zu absoluten Maximalstellen wenn beide Grenzwerte gegen 0 gehen.**
- **relative Minimalstellen werden zu absoluten Minimalstellen wenn beide Grenzwerte gegen ∞ gehen**

7. Was ist gefragt? $\rightarrow$ Antwortsatz formulieren

Integrationsregeln

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
x^a ($a \neq -1 \in \mathbb{R}$)	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
a^x ($a \in \mathbb{R}, a > 0$)	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$

Integrationsmethoden

Substitution

1. u definieren.
2. $u' = \frac{du}{dx}$
3. Nach dx auflösen.
4. u in Integral einfügen.
5. u an Grenzen anwenden.
6. dx in Integral einfügen.
7. Stammfunktion bestimmen.

Integraltyp	Substitution	Beispiele	Substitution
(A) $\int f(ax+b) dx$ <i>Merkmal:</i> Die Variable x tritt in der linearen Form $ax+b$ auf ($a \neq 0$)	$u = ax+b$ $dx = \frac{du}{a}$	1. $\int (2x-3)^6 dx$ 2. $\int \sqrt{4x+5} dx$ 3. $\int e^{4x+2} dx$	$u = 2x-3$ $u = 4x+5$ $u = 4x+2$
(B) $\int f(x) \cdot f'(x) dx$ <i>Merkmal:</i> Der Integrand ist das Produkt aus einer Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitung $f'(x)$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	1. $\int \sin x \cdot \cos x dx$ 2. $\int \frac{\ln x}{x} dx$	$u = \sin x$ $u = \ln x$
(C) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ <i>Merkmal:</i> Im Zähler steht die Ableitung des Nenners	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	1. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx$ 2. $\int \frac{e^x}{e^x+5} dx$	$u = x^2-3x+1$ $u = e^x+5$

geeignete Substitutionen:

- Wurzelterme: $u =$ Term unter der Wurzel
- e^x ; $u =$ Term im Exponenten
- Term mit Bruch und Wurzel im Nenner: $u =$ Term unter der Wurzel im Nenner.

partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

Ablauf:

1. $u(x)$ definieren
2. $u'(x)$ (Ableiten)
3. $v'(x)$ definieren
4. $v(x)$ (Integrieren)
5. In Formel einsetzen und berechnen.
6. (Falls kein Grundintegral $\rightarrow$ wiederholen)

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen und Multiplizität des Nennerpolynoms $N(x)$ bestimmen
2. (Wenn $f(x)$ eine unecht gebrochen rationale Funktion ist; **Polynomdivision**)
3. Jeder der Nullstellen wird ein Partialbruch zugeordnet:
 x_{01} : einfache Nullstell $\rightarrow \frac{A}{x-x_{01}}$
 x_{02} : doppelte Nullstelle $\rightarrow \frac{B}{x-x_{02}} + \frac{C}{(x-x_{02})^2}$
 x_{0r} : r-fache Nullstelle $\rightarrow \frac{D}{x-x_{0r}} + \dots + \frac{E}{(x-x_{0r})^r}$
4. $f(x)$ wird mit der Summe der Parialbrüche gleichgestellt:

$$f(x) = \frac{A}{x-x_{01}} + \frac{B}{x-x_{02}} + \frac{C}{(x-x_{02})^2} \dots$$

5. $f(x)$ als einen Bruch schreiben. **[Kürzen wo möglich!!]**
6. Zähler des ursprünglichen Bruches dem neuen Zähler gleichstellen.
Durch einsetzen von werten für x können die Konstanten $A, B, C \dots$ bestimmt werden.
7. $f(x)$ mit gefundenen Werten für A, B, C schreiben.
8. Partialbrüche durch Integration mit Substitution integrieren:

$$\int \frac{1}{x-x_{01}} dx = \ln(|x-x_{01}|) + C_1$$

$$\int \frac{1}{(x-x_{0r})^r} dx = \frac{1}{(1-r)(x-x_{0r})^{r-1}} + C_2$$

uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

Differentialgleichungen

Trennbare Differentialgleichungen

1.

$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(x)$

2. Trennung der Variablen:

$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$

3. Integration auf beiden Seiten der Gleichung:

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

4. Nach y auflösen.

Anwendungen des Integrals

Volumen eines Rotationskörpers

$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$

$f(x)$ für alle $x \in [a; b]$ a, b sind Grenzen des Rotationskörpers auf der x-Achse.

Bodenlänge einer ebenen Kurve

$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a; b]$. Die Bogenlänge der Kurve $y = f(x)$ ist gegeben durch die obenstehende Formel.

Koordinaten des Schwerpunkts einer ebenen Fläche

$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) \, dx$

$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x)^2 - g(x)^2) \, dx$

Koordinate des Schwerpunkts eines Rotationskörpers

$x_s = \frac{\pi}{V} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x))^2 \, dx$

$y_s = z_s = 0$

Masseträgheitsmoment

$J = \frac{\pi \varrho}{2} \int_a^b (f(x))^4 \, dx$

Potenzreihen

Konvergenzradius

Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$

ist gegeben durch:

$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Der Konvergenzbereich ist gegeben durch: $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

Taylorpolynome

Gegeben ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$, die an der Stelle $x_0 \in D$ $(n+1)$ -mal differenzierbar ist. Dann heisst das Polynom

$T_n f(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \dots$

Ebene Kurven

Parametrisierung Ebener Kurven

Kreis mit Radius R (Kartesische Koordinaten):

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Kreis mit Radius R (Polarkoordinaten):

$\vec{r}(\varphi) = R$

Strecke von A nach B :

$\vec{r}(t) = \vec{r}(A) + t \cdot (\vec{r}(B) - \vec{r}(A))$

Ellipse mit Halbachsen a in x-Richtung und b in y-Richtung:

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\varphi) \\ b \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Zykloide für einen Kreis mit Radius R :

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cdot (\varphi - \sin(\varphi)) \\ R \cdot (1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$

Kreisevolvente für Kreis mit Radius R :

$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cdot (\cos(\varphi) + \varphi \cdot \sin(\varphi)) \\ R \cdot (\sin(\varphi) - \varphi \cdot \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$

Krümmung einer ebenen Kurve

Ist eine ebene Kurve durch die explizite Gleichung $y = f(x)$ gegeben, so berechnet sich die Krümmung κ im Punkt $P(x, y)$ nach der Formel:

$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$

der **Krümmungsradius** ist gegeben durch. $r = \frac{1}{|\kappa|}$