

Substitution Verschachtelt, Wurzel/Trigo, Produkte

1. Substitution aufstellen $u = ?$
 $\hookrightarrow u = g(x)$
2. Grenzen anpassen
 $\hookrightarrow$ Grenzen einfach in $g(x)$ einsetzen
3. u Ableiten, sodass dx ins Spiel kommt.
 $\hookrightarrow du = g'(x) \cdot dx \quad / \quad du = u' \cdot dx \quad \frac{du}{dx} = \int$
 $\hookrightarrow$ nach dx umstellen
4. Alles im Integral mit u und du ersetzen
5. Neues Integral nun berechnen
6. Rücksubstitution
 $\hookrightarrow u$ mit x wieder tauschen } Unbestimmtes Integral
7. Kontrolle
 $\hookrightarrow$ erhaltene Funktion ableiten
 $\hookrightarrow$ sollte nun das ursprüngl. Integral sein

$$u' = \frac{du}{dx} \quad \text{z.B.} \quad u = x^2$$

$$u = g(x) \quad u' = 2x$$

$$u' = g'(x) \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

Partial Integration Produkt-Formen

1. Integral in Produktform bringen
 $\hookrightarrow$ Trick = $\cdot 1$
2. g & f' definieren
 $\hookrightarrow \begin{cases} g \rightarrow \text{leicht ableitbar (wichtiger)} \\ f' \rightarrow \text{leicht integrierbar} \end{cases}$
 $\hookrightarrow$ Wird der schwere Teil schöner wenn man ableitet oder integriert?
4. Alle f, f', g, g' definieren
 $\hookrightarrow$ In Tabellenform $\begin{matrix} g & f' \\ \hline g' & f \end{matrix}$ (f' wird also nicht benötigt)
5. Formel anwenden (Tabelle)
 $\int_0^1 e^x(x^2-1) = [f \cdot g]_0^1 - \int_0^1 f' \cdot g'$
6. Integral berechnen
 $\hookrightarrow$ eventuell nochmals Partial Integration

Faustregel

- $g \cdot v$ Polynome ($x^n + \dots + c$), $\ln(x)$ Ableitung ($\frac{d}{dx} v \rightarrow \frac{d}{dx} v'$)
 - $f' \cdot u'$ Exp- ($e^x, \dots$) / Trigo-Funktionen ($\sin(x), \dots$) Integration ($\frac{u'}{f'} \rightarrow u$)
- Für v sollte der Faktor verwendet werden, der durch eine Ableitung vereinfacht werden kann.

Partialbruchzerlegung Bruch

Zähler
Nenner

Falls Grad Zähler $\geq$ Nenner $\Rightarrow$ Polynomdivision

1. Nullstellen des Nenners ermitteln
 $\hookrightarrow$ nur mit dem Rest weiter machen Nullstellen... $\rightarrow$ In Schritt 7 Teil vor dem Rest mit integrieren!
 $\hookrightarrow$ Falls kein Rest, dann einfach Integral berechnen! mit erhaltenem Resultat der Polynomdivision
 $\hookrightarrow$ weil z.B. $\int \frac{6}{3} = \int 2$
2. Bruch nun mit Nenner in Produkt notieren
 $\hookrightarrow$ Faktor vor höchstem Grad in Nenner übernehmen
3. Bruch als Summe mit A & B im Zähler notieren
 $\hookrightarrow$ Achtung Nullstellen mit Multiplizität
4. Gleichung aufstellen
 $\hookrightarrow \begin{cases} \text{Links: Schritt 2} \\ \text{Rechts: Schritt 3} \end{cases}$
5. A und B ermitteln (oder versuchen geeignete x -Werte zu finden)
 $\hookrightarrow$ mit Nullstellen-Produkte Multiplizieren
 $\hookrightarrow$ linke Seite lassen! rechts ausmultiplizieren
 $\hookrightarrow x$ ausklammern
- 5.2 Koeffizientenvergleich
 $\hookrightarrow$ rechte- mit linksseite vergleichen
 $\hookrightarrow x$ -Teil, nicht x -Teil
- 5.3 Gleichungssystem lösen
6. A und B in 4.
7. Integrieren
 $\hookrightarrow$ Zähler als Faktor vor das Integral ziehen

Nullstellen mit Multiplizität

$$\begin{aligned} x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} &\rightarrow \frac{A}{x-x_1} \\ x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} &\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} \\ x_1 \text{ ist } r\text{-fache Nullstelle} &\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r} \end{aligned}$$

Geeignete x -Werte finden

$$1 = A(x-1) + B(x+1)$$

$$\begin{aligned} x=1 & \quad 1 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \\ x=-1 & \quad 1 = A \cdot (-2) + B \cdot 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x+3} = \ln|x+3|$$

Nach der Partialbruchzerlegung haben wir eine der beiden Integral Formen vorliegen!

$$\int \frac{1}{x-x_0} dx = \ln|x-x_0| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^r} dx = \frac{1}{(x-x_0)^{r-1} \cdot 1-r} + C$$

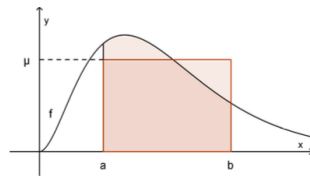
Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Mittelwert einer Funktion

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

$\mu = \bar{y}$ Höhe der Flächenstreife unter der Kurve



Koordinate y des Schwerpunktes

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b x [f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

A = Fläche vom ganzen.



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Koordinate x des Schwerpunktes

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] dx$$

Schwerpunkt Rotationskörper

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x [f(x)]^2 dx$$

$y_s = 0$ (weil um die x-Achse rotiert)

Mantelfläche (Oberfläche)

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx = M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx$$

Arbeits Integral

$$W = \int_R^{R+h} dW = \int_R^{R+h} F_G(r) dr$$

R = Radius von Erdkern bis Erdoberfläche

Volumen Rotation um x-Achse

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$

Wenn um die y-Achse Rotiert wird muss einzig y als x ausgedrückt werden. $\Rightarrow$ Umkehrfunktion Intervall mit Funktion anpassen

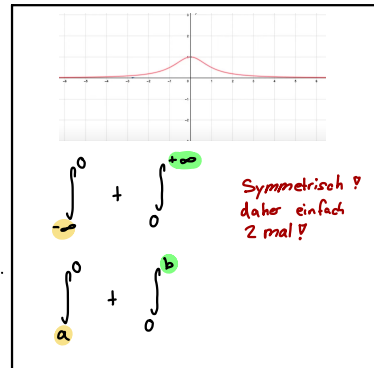
Z.B. $y = \sqrt{x}$
 $y^2 = x$ } Umkehrfunktion

Uneigentliche Integrale (ist die Fläche endlich?)

1. Art unendliche Grenzen z.B. $\int_1^\infty$

1. ∞ wird mit Hilfwert t ersetzt
2. Integral ausrechnen
3. Grenzwert berechnen

Wenn nötig Integrale auseinander ziehen
 $\hookrightarrow$ neue Intervallgrenzen definieren



Symmetrisch? daher einfach 2 mal!

2. Art Unstetigkeit im Intervall

z.B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ $x=0$ undefiniert

1. Problemstellung mit t ersetzen
2. Integrieren
3. Grenzwert berechnen

$$\int_t^1 \dots$$

$a =$ untere Grenze	$x \rightarrow a^+$	von rechts
$b =$ obere Grenze	$x \rightarrow b^-$	von links

Polynomdivision

1. Dividieren
2. multiplizieren
3. subtrahieren

Nullstellen erraten $(-3, -2, -1, 1, 2, 3)$

Polynomfunktion nach Exponenten sortieren!

In Produktform bringen $\rightarrow$ Nullstellen ablesen!

alle Exponenten müssen vorkommen! sonst einf. $0 \cdot x^2 = 0 \checkmark$

Polynomdivision mit Rest

$$\text{z.B. } (5x^3 + 0x^2 - 7x + 9) : (x-2) = 5x^2 + 10x + 13 + \frac{35}{(x-2)}$$

35 $\rightarrow$ Rest

Polstelle / Hebbbar?

Nullstellen

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2(x-3)(x+4)}$$

1. Zähler auf Null setzen $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} \rightarrow (-2, 3)$
2. Nenner $\neq$ Null $\rightarrow$ Echte Nullstelle
(Vergleich mit 3. wenn nicht vorhanden, dann Nullstelle)
3. Nenner welche Zahlen dürfen nicht eingesetzt werden? $\rightarrow (-4, 1, 3)$
4. Abschließender Vergleich

Hebbare Definitionslücke

Welche Zahl kommt im Zähler & Nenner vor? 3
(Weil man es theoretisch raunkürzen könnte)

Echte Nullstellen

Welche Zahlen kommen nur im Zähler vor? -2

Polstellen

Welche Zahlen kommen nur im Nenner vor? -4 & 1 (doppelt)

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad f(x) = u(v(x))$$

z.B. $(-x^2 + 1)^3$

$$u = (v)^3$$

$$v = -x^2 + 1$$

$$u' = 3(v)^2$$

$$v' = -2x$$

$$3 \cdot (-x^2 + 1)^2 \cdot (-2x) = \underline{\underline{-6x(1-x^2)^2}}$$

Äußere-Ableitung

Innere-Ableitung

$$e^{3x+2}$$

$$(4x^2+1)^4$$

$$\sqrt{2x+1}$$

$$\ln(2x)$$

$$\sin(4x)$$

Äußere-Ableitung $\cdot$ innere-Ableitung

$$f(x) = e^{3x+2} \quad f'(x) = (e^{3x+2}) \cdot 3$$

Produktregel

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$f(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot z(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot z(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot z'(x) \dots$$

z.B. $2x^2 \cdot e^x$

Multiplizieren

$$\begin{array}{l} u = 2x^2 \quad v = e^x \\ u' = 4x \quad v' = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \cdot e^x + 2x^2 \cdot e^x \\ &= e^x(4x + 2x^2) \\ &= 2e^x(2x + x^2) \end{aligned}$$

Differentialgleichung DGL

Richtungsfelder = $\mathbb{R}^2$

↳ Werte von x_0, y_0 sind gegeben
so kann die Steigung an diesem Punkt ermittelt und in ein $\mathbb{R}^2$ eingetragen werden

1. Ordnung und Typ bestimmen
2. Umformen, wenn nötig
3. Integrieren
4. Lösungsfunktion aufstellen
5. Falls gegeben. Anfangsbedingung einsetzen um Konstanten $[C]$ zu berechnen

Separierbare DGL

$$y'(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{Nur x Komponenten}} \cdot \underbrace{g(y)}_{\text{Nur y Komponenten}}$$

1. $f(x), g(y)$ und $\frac{dy}{dx}$ identifizieren und in die Form bringen

$$\hookrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

2. Trennung der Variablen x by

$$\hookrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

3. Integration der beiden Seiten der Gleichung (falls möglich)

$$\hookrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

4. Auflösen nach y (falls möglich)

(5.1) Anfangsbedingung AB einsetzen

↳ nach der Konstante C umstellen

(5.2) C wieder in 4. einsetzen

Notationen

1. Ordnung

$$y' = 3x$$

$$y'(x) = 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$\dot{y} = 3x$$

2. Ordnung

$$y'' = 3x$$

$$y''(x) = 3x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x$$

$$\ddot{y} = 3x$$

Euler - Verfahren

gegeben $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ explizit 1. Ord.
gesucht: $y(x)$

1. Anfangswerte festlegen

↳ Startpunkt x_0 , Anfangswert y_0 , Schrittweite h , n Schritte

2. Funktion bestimmen

↳ $f(x) = \dots$ rechte Seite von y' (explizit)

3. Formel n-Mal anwenden

$$\hookrightarrow x_{n+1} = x_n + h \rightarrow x_0 = x_0 + n \cdot h$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Autonome DGL = Spezielle Form der Separierbaren DGL

$$y'(x) = \underbrace{f(x)}_{=1} \cdot g(y)$$

2. B $\begin{cases} y' = x + \sqrt{y} \\ y(4) = 1 \end{cases}$ $f(x) = x + \sqrt{y}$
 $x_0 = 4$
 $y_0 = 1$
 $h = \text{gegeben}$
 $n = \text{gegeben}$
 $x_{0+1} = 4 + 0,25 = 4,25$
 $y_{0+1} = 1 + 0,25 \cdot (4 + \sqrt{1}) = 2,25$
 Schrittweite
Anzahl Schritte

Lineare DGL (y-Komponenten kein Exponent ≥ 2)

$$y'(x) + f(x) \cdot y = g(x)$$

Störglied $\begin{cases} g(x) = 0 \rightarrow \text{homogen} \\ g(x) \neq 0 \rightarrow \text{inhomogen} \end{cases}$

1. $f(x)$ & $g(x)$ identifizieren und in die obige Form bringen

2. Bestimmung von $F(x)$

3. Homogen oder inhomogen?

4. In die entsprechende Formel einfügen

5. Integrieren wenn Inhomogen

(6) AB einsetzen wenn vorhanden

Lösungsformel homogen

$$y = C \cdot e^{-F(x)}$$

$$K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} \cdot dx$$

Lineares DGL

Lösungsformel für inhomogenes Lineares-DGL 1. Ordnung

$$y = e^{-F(x)-C} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)+C} \cdot dx$$

C ist nicht in der Formel enthalten weil es sich kürzt.

L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Umformung sodass L'Hopital angewendet werden kann.

Von $0 \cdot \infty$ nach $\frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty}{0}$
 Oder $\infty - \infty$ nach $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Situation $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$)

Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Funktion $f(x)$	Umformung
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$	$\frac{g(x)}{h(x)}$	entfällt
$0 \cdot \infty$	$g(x) \cdot h(x)$	$\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}$
$\infty - \infty$	$g(x) - h(x)$	$\frac{1}{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{h(x)}}$
$0^\infty, \infty^0, 1^\infty$	$g(x)^{h(x)}$	$e^{h(x) \cdot \ln(g(x))}$

Konstante Lösungen

Falls $f(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine *konstante Lösung* der autonomen DGL $y' = f(y)$. Um die konstante Lösung der DGL zu finden, müssen wir die Gleichung $f(y) = 0$ lösen.

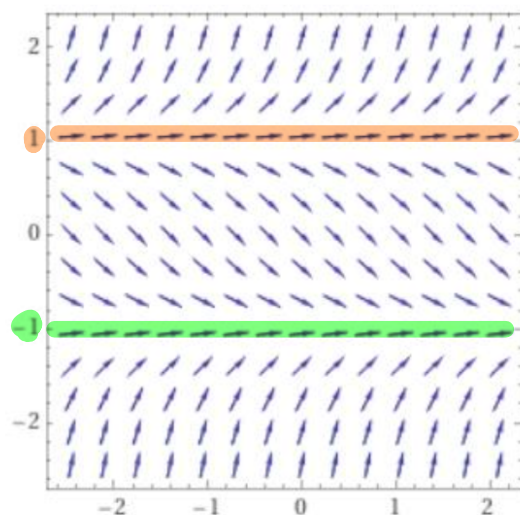
- Stabil Benachbarte Lösungen werden *angezogen*
- Instabil Benachbarte Lösungen werden *abgestossen*
- Semi-Stabil *Anziehung* auf einer, *Abstossung* auf der anderen Seite

Beispiel Nur autonome DGL's haben diese Eigenschaften: Stabil, ... Da eine solche Funktion die Form $y' = f(y)$ hat und daher nur durch y beschrieben wird
Autonom $\rightarrow y' = y^2 - 1$ Sonst $y' = f(x, y)$

- $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = 1$: Konstante Lösung
 - $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = -1$: Konstante Lösung
- wo wird die Gleichung $= 0$?

Werte in der Nähe der Konstanten Lösung einsetzen

- Steigung
- $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
 - $f(1.5) = (1.5)^2 - 1 = 1.25$
 - $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Instabil}$
 - $f(0.5) = (0.5)^2 - 1 = -0.75$
 - $f(0) = (0)^2 - 1 = -1$
 - $f(-0.5) = (-0.5)^2 - 1 = -0.75$
 - $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Stabil}$
 - $f(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 = 1.25$
 - $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$



Steigend oder fallend? Erste - Ableitung

$$f'(x) < \text{oder} > 0 ?$$

$$f'(x) < 0 = \text{fallend}$$

$$f'(x) > 0 = \text{steigend}$$

$$f'(x) = 0 \text{ waagerechte Tangente (Extrempunkt)}$$

Krümmung? Zweite - Ableitung

Nach **oben** oder **unten** gekrümmt?

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \text{ Konvex} &= \text{links } \cup \\ f''(x) < 0 \text{ Konkav} &= \text{rechts } \cap \end{aligned}$$

$$f''(x) > 0 \text{ nach oben konvex } \cup$$

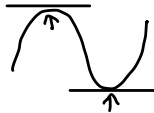
$$f''(x) < 0 \text{ nach unten konkav } \cap$$

$$f''(x) = 0 \text{ Wendestelle } \curvearrowright$$

Wendepunkt prüfen $f'''(x) \neq 0$

Resultat von $f''(x) = 0$

1. $f'(x) = 0$ Steigung waagrecht



2. $f''(x)$ für Erkennung ob hoch- oder Tiefpunkt? $\circ$

*

Hochpunkt

$$f'(x_0) = 0 \text{ \& } f''(x_0) < 0 \quad \cap$$

Tiefpunkt

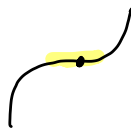
$$f'(x_0) = 0 \text{ \& } f''(x_0) > 0 \quad \cup$$

Wende - Sattelpunkte

Wendepunkt = Drehsinnwechsel



Sattelpunkt = spezieller Wendepunkt
(Tangente = waagrecht)



Bedingung für Wendepunkt

$$f''(x_0) = 0$$

$$f'''(x_0) \neq 0$$

Sattelpunkt zusätzlich $f'(x_0) = 0$

Ableiten Exp(-1)	alter Exponent nach vorne
Integrieren Exp(+1)	neuer Exponent in den Bruch

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
 eine Zahl durch ihre Wurzel ist immer die Wurzel der Zahl

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$1 - \sin^2 = \cos^2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

Schritt	Was tun?	Beispiel
1	Erkenne $f(g(x))$	$e^{3x} \rightarrow$ äußere: e^x , innere: $3x$
2	Finde $g(x)$	$g(x) = 3x$
3	Leite $g(x)$ ab $\rightarrow g'(x)$	$g'(x) = 3$
4	Integriere die äußere Funktion	$\int e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + C$
5	Multipliziere mit $\frac{1}{g'(x)}$	$\frac{1}{3} e^{3x} + C$

FORMELN INTEGRAL & DIFFERENTIAL

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
ax^{a-1}	x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$
$-1 - \cot^2(x)$	$\cot(x)$	
$-\cos$	$-\sin$	$\cos + C$
$\sin$	$-\cos$	$-\sin + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}(x)$	$x * \sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}(x)$	$x * \cos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}(x)$	$x \tan^{-1}(x) - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2}$
$-e^{-x}$	e^{-x}	$-e^{-x} + C$
$-ae^{-x}$	$e^{-x \cdot a}$	$-\frac{1}{a} e^{-x \cdot a} + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln(x) * a^x$	a^x	$\frac{1}{\ln(a)} * a^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$	$x * \ln(ax) - x + C$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln(x+a)$	$(x+a) * \ln(x+a) - x + C$
$\frac{1}{x * \ln^2(x)}$	$\frac{1}{\ln(x)}$	
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} * x\sqrt{x} + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{ax} = a \cdot x^{-1}$	$\frac{1}{a} \ln(x) + C$
	$\frac{1}{x+a}$	$\ln(x+a) + C$

Trigo

e

ln

Streckung

Verschiebung

$f(x \cdot k)$	$\frac{1}{k} \cdot F(x \cdot k)$
$f(x+k)$	$F(x+k)$

Bsp:

$$f(x) = \cos(3x) \rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x)$$

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow F(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Grenzwert von Folgen (Tricks)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

① erweitern mit $\frac{1}{u^{\max}}$ mit dem höchsten Exponenten $\rightarrow$ nur wenn: $n \rightarrow \infty$

② $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \rightarrow \frac{(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}) \cdot (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})}{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})}$

③ $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$

Bsp. $x_n = \left(1 - \frac{1}{5 \cdot n}\right)^n$
 $\downarrow$ umschreiben
 $= \left(1 + \frac{-\frac{1}{5}}{n}\right)^n$
 $= e^{-\frac{1}{5}}$

Sonderfälle:

Fall 1. Zählergrad < Nennergrad $\frac{n^2}{n^5}$
 Bsp. $\frac{0}{1} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} = 0$

Fall 2. Zählergrad > Nennergrad $\frac{n^5}{n^2}$
 Bsp. $\frac{1}{0} \neq$ $\lim$ exist. nicht!
 (divergiert $\rightarrow \infty$ od. $-\infty$)

Fall 3. Zählergrad = Nennergrad
 Bsp. $\frac{7n^7}{3n^7}$ $\lim = \frac{7}{3}$

Rechenregeln

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n),$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)},$ falls $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n .

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

- Fall 1: $\left|\frac{a}{b}\right| < 1 \rightarrow$ Grenzwert ist 0
- Fall 2: $\left|\frac{a}{b}\right| = 1 \rightarrow$ Grenzwert ist 1 (falls kein Vorzeichenwechsel)
- Fall 3: $\left|\frac{a}{b}\right| > 1 \rightarrow$ Grenzwert ist ∞ oder $-\infty$ (je nach Vorzeichen)

Scheitelpunktform

$$f: y = a(x-u)^2 + v$$

$\downarrow$ $\downarrow$
x y

S(u|v)
 $\downarrow$
 Scheitelpunkt

$$a(u-x)^2 + v$$

Die Vorzeichen wurden
 ändert aber nichts? gedreht

Scheitelpunkt

$$x_s = \frac{-b}{2a}$$

$y_s = x_s$ einsetzen in Funktion
 $(c - \frac{b^2}{4a})$

Linear

$$f: y = m \cdot x + q$$

Bestimmung von Geraden aus 2 Punkten

① $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

② $q =$ Punkt in Funktion einsetzen

Quadratisch

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

Bestimmung von Parabeln aus 3 Punkten

(Scheitelpunkt zählt doppelt)

① Gleichungssystem aufstellen & Lösen

① Wenn S gegeben: S in S-Punktform einsetzen, nach a umstellen

② 2. gegebener Punkt einsetzen

Nullstellen - / Produktform allgemein

$$f: y = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$p: y = x^2 - 6x + 8$$

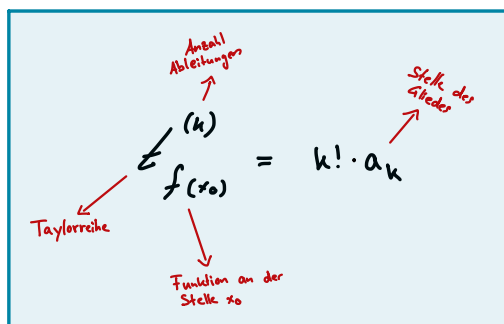
$$(x-4)(x-2)$$

Taylorreihe

input Funktion } Annäherung einer Funktion
output Polynom } durch ein Polynom

1. Ableitungen berechnen
↳ $p_3 = 3$ mal Ableiten
2. Auswertungsbereich = x_0 in Ableitung einsetzen
3. Taylorpolynom zusammensetzen Formel anwenden
4. Vereinfachen

$$T_{f(x)} = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0)^3$$



$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\sum a_k (x-x_0)^k$$

Tangentengleichung / polynom Grad 1

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Trick bei e^z

der Exponent kann einfach in die Taylorreihe eingefügt werden

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$t_{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

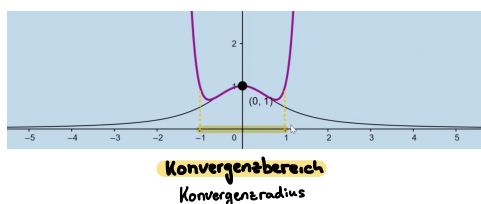
Trick bei $\cos(z)$

der Exponent kann einfach in die Taylorreihe eingefügt werden

$$\cos(z) = + \frac{z^0}{0!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Exponenten gerader Grad
Vorzeichen alternierend

Konvergenzbereich $\Rightarrow$ Bereich in der die Taylorreihe immer genauer wird
Ausserhalb: Egal wie hoch der Grad der Taylorpolynoms ist



$[-1, 1]$ wird es immer genauer
ausserhalb kann nicht angenähert werden wenn $x_0 = 0$

$$t_{\sin}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Trick bei $\sin(z)$

der Exponent kann einfach in die Taylorreihe eingefügt werden

$$\sin(z) = + \frac{z^1}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Exponenten ungerader Grad
Vorzeichen alternierend

Quotientenkriterium

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Konvergent, wenn $L < 1$
Divergent, wenn $L > 1$
Keine Aussage, wenn $L = 1$

$$r = \frac{1}{L}$$

- Wenn $r > 1 \rightarrow$ dann ist $L < 1 \rightarrow$ Konvergenz
- Wenn $r < 1 \rightarrow$ dann ist $L > 1 \rightarrow$ Divergenz
- Wenn $r = 1 \rightarrow$ dann ist $L = 1 \rightarrow$ keine Aussage

Konvergenzradius

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| > 1 \text{ oder}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \sqrt[k]{|a_k|}} > 1$$

$$|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$$

Wichtig wie lautet die Frage:
Was ist der Konvergenz-Radius? nur ρ muss ermittelt werden
Was ist der Konvergenz-Bereich? die Randpunkte müssen untersucht werden!

$$(x_0 - r, x_0 + r) = \text{Konvergenz-Bereich}$$

$$(-1)^{k+1} = \text{Wenn } k \text{ gerade} = -1$$

$$= \text{Wenn } k \text{ ungerade} = +1$$

$$(-1)^k = \text{Wenn } k \text{ gerade} = +1$$

$$= \text{Wenn } k \text{ ungerade} = -1$$

Fehlerabschätzung

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot \max_{z \in [x_0, x]} |f^{(n+1)}(z)|$$

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot \max_{z \in [x, x_0]} |f^{(n+1)}(z)|$$

Kürzen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)!}{k!} \right|$$

Binomialreihe

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Präzision der Approximation

Für die Abschätzung des Fehlers bzw. Restglieds

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Es gibt ein ξ zwischen x_0 und x , so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Beispiel

letztes Glied des Taylorpolynoms

Fehler bei Approximation von $f(x) = e^x$ durch $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ im Intervall $[0, 1]$

Wo wird der Fehler abgeschätzt?

$$R_3(x) = |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (1 - 0)^4$$

$\xi \in [0, 1]$

Es wird der grost mögliche Fehler gesucht daher wird $x=1$ genommen

$$R_3(1) = \left| \frac{e^\xi}{24} \right| \leq \frac{e^1}{24} \approx 0.113 \quad \text{geschätzter Fehler}$$

$$f(1) = e^1 = 2.71828 \dots$$

$$p_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \approx 2.667 \rightarrow \Delta = |2.71828 - 2.667| \approx 0.0516 \leq 0.113$$

tatsächlicher Fehler

Schritt 1: Polynom als Summe schreiben um a_k ablesen zu können

↳ dazu betrachtet man das Polynom mit ihren isolierten Teilen
↳ x teil getrennt betrachtet von isolierten Teil

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

in Aufgabe a) ist $x_0 = 0$
weil das x nicht verschoben ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}$$

$$(x - 0)^k$$

Schritt 2:

Wir wollen nun a_k der Summe ermitteln
dazu muss ein Zusammenhang zwischen den x -Teil und dem Koeffizienten-Teil gefunden werden!

$$p_1(x) = 1x^0 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

↳ Der Zusammenhang ist hier also einfach ablesbar

↳ Der Koeffizient ist immer +1 der Exponenten der Summanden.

↳ Daraus folgt $a_k = k+1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k+1}_{a_k} (x-0)^k$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

$$(-1)^{k+1} = \begin{cases} \text{Wenn } k \text{ gerade} = -1 \\ \text{Wenn } k \text{ ungerade} = +1 \end{cases}$$

$$(-1)^k = \begin{cases} \text{Wenn } k \text{ gerade} = +1 \\ \text{Wenn } k \text{ ungerade} = -1 \end{cases}$$

Integral allgemein

- b) Das unbestimmte Integral der um den Betrag k in x -Richtung verschobenen Funktion $g(x) = f(x - k)$ ist

$$\int f(x - k) dx = F(x - k) + C \quad (k \in \mathbb{R}). \quad (1.2)$$

- c) Das unbestimmte Integral der um den Faktor k in x -Richtung gestreckten/gestauchten Funktion $g(x) = f(k \cdot x)$ ist

$$\int f(k \cdot x) dx = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0). \quad (1.3)$$

- a) Vertauschung der Integrationsgrenzen:

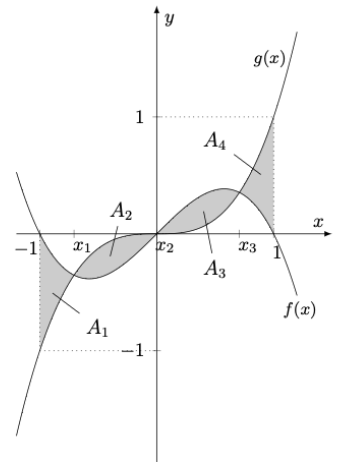
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

- b) Identische Integrationsgrenzen:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

- c) Zerlegung des Integrationsbereichs:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



 1. Quadrant (0°–90°)

Gradmaß (°)	Bogenmaß (rad)
0°	0
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$

 3. Quadrant (180°–270°)

Gradmaß (°)	Bogenmaß (rad)
210°	$\frac{7\pi}{6}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$

 2. Quadrant (90°–180°)

Gradmaß (°)	Bogenmaß (rad)
120°	$\frac{2\pi}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
180°	π

 4. Quadrant (270°–360°)

Gradmaß (°)	Bogenmaß (rad)
300°	$\frac{5\pi}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$
360°	2π

$$\text{Bogenmaß} = \text{Grad} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\text{Grad} = \text{Bogenmaß} \cdot \frac{180}{\pi}$$