

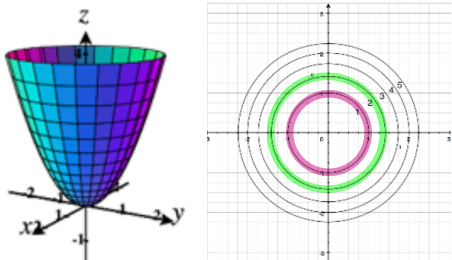
## Niveaulinien

Um die Niveaulinien einer Funktion zweier Variablen  $f(x, y)$  einzuzeichnen, wird wie in folgendem Beispiel die Gleichung mit **c** gleichgesetzt und **nach y** aufgelöst:

$$N_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$$

$$x^2 + y^2 = c$$

$$y = \sqrt{c - x^2}$$



Durch das Einsetzen von beliebigen Werten für **c** wie 0, **1**, **2**... können die Niveaulinien für die Werte an den jeweiligen Werten bestimmt werden.

Beliebige **x**-Koordinate einsetzen und **y** ermitteln

Achtung Definitionsbereich beachten  
Reell lösbar! Wurzel, Nenner, log

- Nach umformen nach **y** kritische Punkte beachten z.B.  $\sqrt{x+x^2}$ ,  $x+x^2 \geq 0$
- Nullstellen ermitteln z.B.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$   
 $-2 < x < 2$  Das ist dann der Definitionsbereich der Niveaulinien

## Richtungsableitung

Gegeben: Funktion  $f(x, y) = x^2 y + y^2$

Punkt  $P = (1, 2)$

Richtungsvektor  $\vec{v} = (3, 4)$

- Richtungsvektor normieren (Einheitsvektor)
  - Länge berechnen  
 $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

- Einheitsvektor (EV) von  $\vec{v}$  bilden mit  $V(\frac{a}{b})$  7, C, 1

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

- Gradient  $\nabla f$  berechnen

Ableitung 1. Ordnung

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 2y$$

- Punkt in Gradient einsetzen

$$\nabla f(1, 2) = (2 \cdot 1 \cdot 2, 1^2 + 2 \cdot 2) = (4, 5)$$

- Skalarprodukt mit EV mit  $P(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$  7, C, 3

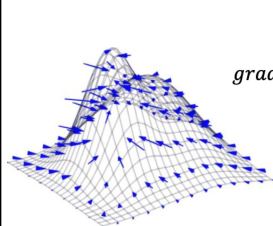
$$(4, 5) \cdot \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \frac{12 + 20}{5} = \frac{32}{5} = 6,4$$

## Hesse-Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \quad H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

## Gradient (Ableitung 1. Ordnung)

Um die Ableitung einer n-dimensionalen Funktion in einem einzigen Objekt zusammenzufassen, wird der Gradient verwendet. Dabei werden **alle partiellen Ableitungen** als **Vektor** zusammengefasst. Der **Gradienten-Vektor** zeigt die **Richtung des steilsten Anstiegs** einer Funktion an der Stelle  $(x_1, \dots, x_n)$  an. Er **steht** ausserdem **orthogonal auf der Niveaulinie**.



$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{matrix}$$

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

- Partiell Ableiten 4, 1

$$f_x = 2x, \quad f_y = 4y$$

- Gradienten aufstellen

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$$

- Gradienten an einem Punkt auswerten

$$\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Merksätze

Der Gradient sammelt alle partiellen Ableitungen. Er zeigt bergauf. Er steht senkrecht auf der Niveaulinie.

## Tangentialebene

$$z \text{ ist isoliert} \quad z = x^2 + y^2 \quad z = f(x, y)$$

Satz

Die Tangentialebene  $T$  an den Graphen der Funktion  $z = f(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ist: Tangentengleichung: von  $y = f(x)$   $Y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

- Erste Ableitung bilden  
↳ 4, 1
- Punkt an der die Ebene liegen soll einsetzen  
↳  $P(2, 1)$   
↳ Einsetzen als  $f(2, 1)$ ,  $f_x(2, 1)$ ,  $f_y(2, 1)$
- Alle Werte in Tangential-Gleichung einsetzen  
↳ siehe Definition
- Ausmultiplizieren

↳ Einfach in TR eingeben

$$\left( \begin{array}{l} \text{TANGENTIALEBENE AN IMPLIZITE FLÄCHE} \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\} \\ f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} z \text{ ist NICHT isoliert} \\ f(x, y, z) = 0 \\ z = x^2 - y^2 = 0 \end{matrix}$$

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

## Totales Differential

Das totale Differential beschreibt, wie sich der Funktionswert  $f(x, y)$  ändert, wenn du ein kleines Stück in  $x$ - oder  $y$ -Richtung gehst.

$$df = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy \quad \text{Approximierte Änderung}$$

- Partielle Ableitung bilden 4, 1

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 2y$$

- Punkt  $P_0$  einsetzen

$$f_x(1, 2) = 4, \quad f_y(1, 2) = 5$$

- Differential bilden

Formel anwenden!

$$df = 4 dx + 5 dy$$

- Änderung einsetzen

$$df = 4(0,1) + 5(-0,2) = 0,4 - 1 = -0,6 \quad \begin{matrix} dx = x_1 - x_0 \\ dy = y_1 - y_0 \end{matrix}$$

optional Vergleich mit exaktem Funktionswert

- 5.1 Punkt  $P_0$  und  $P_1$  in Anfangs-Funktion einsetzen

$$f(1, 2) = 4, \quad f(1, 1, 2) = 0,15$$

6. Wahre Differenz bilden

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = 0,15 - 4,14 = -0,99$$

7. Vergleich

$$-0,99 - (-0,6) = -0,39 = \Delta 0,05 = \text{Abweichung}$$

## Exakte Änderung

$$\Delta f = f(2,05, 0,99) - f(2,1) \quad \begin{matrix} \text{neuer Punkt} \\ \text{alter Punkt} \end{matrix}$$

## Zusatzinfo!

Normalform

Alles mit Variablen & alles mit Konstanten trennen

$$z = 2 - 2 \cdot (x-1) + \frac{1}{10} \cdot (y-3)$$

$$\downarrow \quad -\frac{13}{5} = -2x + \frac{1}{10}y - 2 \quad \text{Normalform!}$$

$\vec{n}$  = Normalenvektor = steht senkrecht auf Tangentialebene

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Gradient!} \quad \text{immer } -1!$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{10} \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Extremwertproblem mit Nebenbedingungen (Lagrange-Methode)

## Definition

Bei einem Extremwertproblem der Zielfunktion  $F(x, y)$  mit Nebenbedingung  $G(x, y) = 0$  ist die Lagrange-Prinzipalfunktion (oder Lagrange-Funktion) die Funktion

$$L(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda G(x, y) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (Lagrange-Multiplikator)}$$

$F(x, y)$  wird durch  $G(x, y)$  beschränkt. Es werden nun Extrema der Schnittmenge gesucht. Es werden nun die neuen Ebenen  $\min$  &  $\max$  gesucht.

Tipp: Beide Funktionen im TR-Plotten

- Nebenbedingung wenn nötig nach 0 umstellen  
↳  $G(x, y) = 0$
- Lagrange Funktion aufstellen  
↳ siehe Definition
- Lagrange-Funktion  $\Rightarrow$  Erste Ableitungen (Gradient) 4,1
- GLS aufstellen mit ersten Ableitungen  $\stackrel{!}{=} 0$  (Gradient)  
↳ Lösungen der Parameter mit  $\lambda, \mu$  können ignoriert werden  
↳ Relevant sind alle Lösungen von  $x, y, z$   
↳ Ergibt den kritischen Punkt!
- Erhaltene Punkte in ZF einsetzen ( $F(x, y)$ )  
↳ Werte der kritischen-Punkte interpretieren  
↳ Fall 1: 1 kritischer-Punkt Grafische Interpretation  
↳ Fall 2: 2 kritische-Punkte  $P_1 < P_2$   
↳ Fall 3:  $> 2$  kritische-Punkte  $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_n$   
Sattelpunkte lokal  $\min$  &  $\max$

• Geht  $F(x, y)$  nach  $+\infty \rightarrow$  Minimum  
• Geht  $F(x, y)$  nach  $-\infty \rightarrow$  Maximum

## Implizites Ableiten

- Gleichung nach Null umstellen

$$F(x, y) = 0$$

- Punkt prüfen ob auf Funktion  $P(x_0, y_0)$

$$F(x_0, y_0) = 0$$

- Partielle Ableitungen bilden 4,1

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

- Ableitungen in Formel einsetzen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

- Punkt einsetzen

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_P = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

## Reihenfolge von Grenzen

Normale Reihenfolge 3-Dim

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Umgekehrte Reihenfolge 3-Dim

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Normale Reihenfolge 4-Dim

$$\int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_e^f f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

1 von 6 Umgekehrten Reihenfolge 4-Dim

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f \left( \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

äußeres Integral

darf nicht von "x" oder "y" abhängig sein

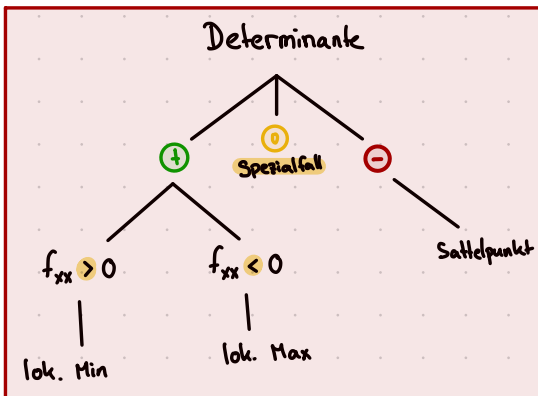
inneres Integral

darf von der äußeren Variable abhängen

## Extremwertstellen ermitteln 2D

- Ableitungen 1. Ordnung berechnen  
↳ Gradient  
↳ 4,1
- Ableitungen 2. Ordnung berechnen  
↳ Hesse Matrix  
↳ 4,1 (doppelt)
- Gradient = 0 setzen  
↳ Gleichungssystem lösen  
↳ 3,7,1  
Die Lösungen der GLS geben die zu prüfenden Punkte
- Punkte in Hesse-Matrix einsetzen  
↳ Punkt als Bedingung bei 2. Ableitung festlegen  
↳ Punkte in Hesse-Matrix einsetzen (3,1,1)
- Determinante der Matrix ( $\Delta$ ) = Determinante  
↳ 7,3

(Liefert das GLS einen Widerspruch, so bedeutet das, dass es kein kritischer Punkt ist)



Mittels Eigenwerte 7,8,4 relevant sind die Vorzeichen

- Alle EW Positiv l. Min U
- Alle EW Negativ l. Max n
- Min 1x Positiv & 1x Negativ Sattelpunkt ~
- Min 1 EW = 0 Sonderfall ?!

Integrationsreihenfolge

$$\iint f(x, y) dy dx$$

$$\iint f(x, y) dx dy$$

Feste Variable

x bleibt fest  
z.B. x = 0,5 wählen

y bleibt fest

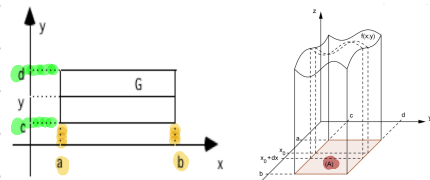
Bewegte Variable

y bewegt sich

x bewegt sich

## Rechteckige Grundfläche

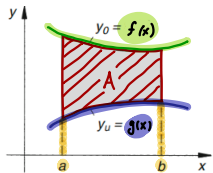
$$A = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



Die Reihenfolge der Integrale darf frei gewählt werden

## Grundfläche zwischen Funktionskurven

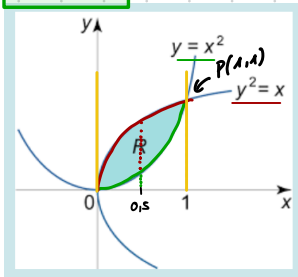
$$A = \{(x, y) | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$



Die Reihenfolge der Integrale ist relevant, Grenzen anpassen!

$dy dx$

$$\{0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$$



$$\int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} 1 dy dx$$

mit  $f(x, y) = 1$   
Fläche ist gefragt

Inneres Integral nach "y" umgestellt

1. einen Wert auf x-Achse bestimmen z.B.  $x=0,5$

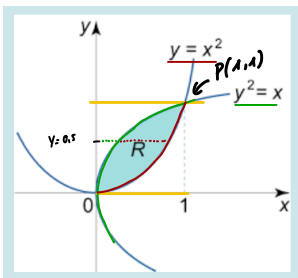
2. von unten nach oben hoch gehen um zu bestimmen welche Funktion die Untere Grenze der Integrals ist und welche die obere

$y^2$  = untere Grenze

$\sqrt{x}$  = obere Grenze

3. Bereiche für das äussere Integral bestimmen  
Schnittpunkte auf der Achse der äusseren Integrals beachten

$dx dy$



$$\{0 < y < 1, y^2 < x < \sqrt{y}\}$$

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=y^2}^{\sqrt{y}} 1 dx dy$$

Inneres Integral nach "x" umgestellt

$y = 0,5$

untere Grenze:  $y^2 = x$

obere Grenze:  $x = y^2$

part so  
nicht umstellen

x muss alleine  
stehen wie bei  
 $y = 2x + 3$

## Fläche unter der Kurve

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a \quad (\text{Länge des Intervalls})$$

## Volumen unter der Fläche

$$\iint_A f(x, y) dA$$

$$\iint_A 1 dA = \text{Fläche}(A)$$

## Dichte des Volumens

$$\iiint_G f(x, y, z) dV$$

$$\iiint_G 1 dV = \text{Volumen}(G)$$

$$\text{Spezialfall } f(x, y) = 1$$

Volumen

Fläche

$$\iint_G 1 dA = A(G)$$

Zahlenwert von Volumen  
= Zahlenwert von Fläche

$$dA = dx \cdot dy$$

Jedes einzelne Integral steht für eine Dimension sowie auch die zu integrierende Funktion  $f(x, \dots)$

Ist die Funktion jedoch  $= 1$ , dann entfällt die Dimension (Spezialfall)



## Funktionen gegeben und im TR darstellen

$$x = \frac{1}{4}y^2 - y, \quad x - y + 3 = 0$$

1. Jeweils nach y auflösen  
da der TR grafisch nur  $f(x)$  darstellen kann

$$y = 2 \pm 2\sqrt{1+x}, \quad y = x + 3$$

2. Im TR als Funktionen definieren

$$f1(x) := x + 3$$

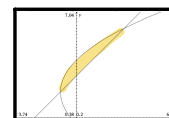
$$f2(x) := 2 + 2\sqrt{1+x}$$

$$f3(x) := 2 - 2\sqrt{1+x}$$

3. Im TR alle 3 Funktionen anzeigen lassen

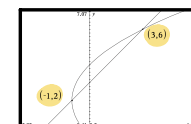


3.1 Gebiet erkennen (Eingesperrte Fläche)



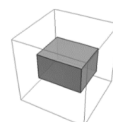
4. Schnittpunkte anzeigen 6,4

Wenn im Plott-Fenster mehr als 2 Funktionen dargestellt werden, müssen zuerst 2 Funktionen bei denen Schnittpunkte gesucht werden ausgewählt werden!



## ÜBER QUADERFÖRMIGE GEBIETE

$$G = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$



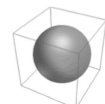
$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \int_e^f \left( \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

Reihenfolge irrelevant!

## ÜBER FUNKTIONEN BEGRENZTES GEBIET

$$\{(x, y, z) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), j(x, y) \leq z \leq k(x, y)\}$$



$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} \left( \int_{j(x,y)}^{k(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Reihenfolge ist relevant.

## Jacobi - Matrix

$$J = \begin{pmatrix} x_r & x_\phi \\ y_r & y_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Ableitung

$$\det(J) = r = \left| r \cdot \underbrace{[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)]}_{=1} \right| = r$$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \cdot y \\ x \cdot \sin(z) \end{pmatrix}$$

Funktionen in einem Vektor geschrieben

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ \sin(z) & 0 & x \cos(z) \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitung 4,1  
Gradient jeweils als Zeilen-Eintrag

## Transformation von Kartesisch - zu Polarsystem

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{\hat{G}} \hat{f}(r, \phi) \cdot r dr d\phi$$

Transformierter "y"  
Transformiertes "x"  
determinante Jacobi-Matrix

- $f(x, y) \rightsquigarrow \hat{f}(r, \phi)$
- $G \rightsquigarrow \hat{G}$
- Zusatzfaktor  $r$  im Integral

## Integral-Transformation

Angepasst werden müssen:

1. Funktion
2. Integrationsgebiet
3. Flächenelement  $dx dy$

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$



$$\iint_{\hat{G}} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |\det(J)| du dv$$

"J" steht für Jacobi-Matrix!

### 1. Kartesisch zu Polarkoordinaten

$$\hookrightarrow x = r \cdot \cos(\phi), y = r \cdot \sin(\phi)$$

### 2. Integrationsgrenzen bestimmen

$$\hookrightarrow \text{z.B. } 0 \leq r \leq 2\pi \quad (2\pi \text{ ist der maximale Radius})$$

↳ Reihenfolge der Integrale beachten!

### 3. Determinante von Jacobi-Matrix

↳ nur wenn nötig

### 4. Integral ausrechnen

$$\hookrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 (r^3 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)) dr d\phi \quad \text{in TR eingeben}$$

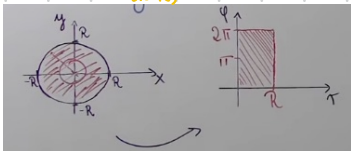
## Kreisfläche

- $\{(x, y) | (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq R^2\} = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$
- wobei  $(h, k)$  = Mittelpunkt des Kreises
- Halbkreis:  $y \geq 0$
- $R^2$ : quadratische Radius

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot d\phi$$

det(J)



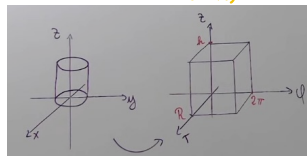
## Zylinder (Volumen)

- $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, a \leq z \leq b\}$
- $z$  ist Höhe des Zylinders

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ a \leq z \leq b \quad (0 \leq z \leq h) \end{matrix}$$

$$dx dy dz = r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz$$

det(J)



Der TR kann nicht zwischen gross & klein Buchstaben unterscheiden daher wurde aus  $R \rightarrow r$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r^3 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)) dr d\phi dz$$

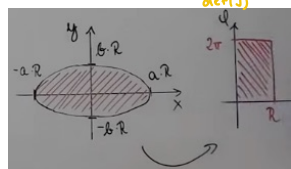
## Ellipse

- $\{(x, y) | \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \leq R^2\} \quad \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq R^2 \right)$
- wobei  $(h, k)$  = Mittelpunkt der Ellipse
- $a$  und  $b$  sind Hauptachsen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos(\phi) \\ b \cdot r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$dx \cdot dy = a \cdot b \cdot r \cdot dr \cdot d\phi$$

det(J)



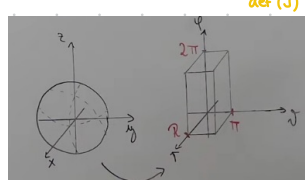
## Kugel (Volumen)

- $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{matrix}$$

$$dx \cdot dy \cdot dz = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$$

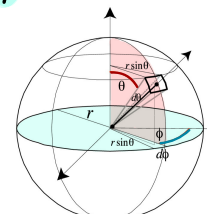
det(J)



## Zusammengesetzt als Integral

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R \hat{f}(r, \theta, \phi) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$$

$\theta$  ist der Winkel zur z-Achse  
 $\phi$  ist der Winkel in der xy-Ebene



$$dA = (r d\theta)(r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$d\omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi$$



# Schwingungen

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi) \text{ bzw. } y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

- A: Amplitude Vertikale Streckung / Stauchung
- $\omega$ : Kreisfrequenz Horizontale Streckung / Stauchung
- $\phi$ : Phase Horizontale Verschiebung
- f: Frequenz
- T: Periode

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

## Harmonische Schwingung

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

oder

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$e^{i(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)$$

Reelle = Re    Imaginär = Im

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(A e^{i\omega t})$$

$$z(t) = A e^{i\omega t}$$

## Sinus $\Rightarrow$ Cosinus (Phasenverschiebung)

$$\sin(\omega t + \phi) = \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Signale  $y_1$  und  $y_2$  mit derselben Frequenz, aber evtl. verschiedener Amplitude und Phase

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad y_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$y(t) = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = |A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}|$$

$$\phi = \arg(A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2})$$

## Fourier-Reihe

$$s(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{Konstante}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))}_{\text{Punktsymmetrie}}$$

Achsensymmetrie

### Koeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(k\omega t) dt$$

### Periodisches Signal

$$s(t) = s(t+T)$$

Wenn die Funktion mit  $x$  definiert ist

z.B.  $f(x) = |x|$  dann ist  $t = x$

z.B.  $s(x) \cos(k\omega x) dx$

### Komplexe Form

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-ik\omega t} dt$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\omega t}$$

$$e^{-in\pi} = (-1)^n$$

## Überlagerung von Schwingungen (mit gleicher Frequenz)

1. alles mit Cosinus ausdrücken

$$\hookrightarrow \sin(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Komplexe Amplituden bilden

$$y_k = A_k \cos(\omega t + \phi_k)$$

$$z_k(t) = A_k e^{i(\omega t + \phi_k)} = \underbrace{(A_k e^{i\phi_k})}_{\text{Komplexe Amplitude}} e^{i\omega t} \quad \phi = 0$$

Potenzgesetze angewandt!

3. Als Komplexe Zahl schreiben

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \text{RAD?}$$

3.1 Komplexe-Zahl konkret berechnen  $A_1^{(c)} = 100 e^{i(-\pi/2)}$

$$e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2) \quad e^{-i\pi/2} = 0 - i$$

3.2 Mit Amplitude Multiplizieren = Komplexe Amplitude

$$A_1^{(c)} = 100 \times (-i) = -100i$$

4. Komplexe Amplituden addieren

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) + z_3(t) = (A_1^{(c)} + A_2^{(c)} + A_3^{(c)}) e^{i\omega t}$$

$$A^{(c)} = (-100i) + (100 - 100\sqrt{3}i) + (150)$$

4.1 Real- und Imaginärteile zusammenfassen

- Reale Teile:  $100 + 150 = 250$
- Imaginäre Teile:  $-100i - 100\sqrt{3}i = -i(100 + 100\sqrt{3})$

$$A^{(c)} = 250 - i(100 + 100\sqrt{3})$$

5. Umrechnung zur realen Lösung

5.1 Amplituden (Betrag)

$$A = |A^{(c)}| = \sqrt{(\text{Re})^2 + (\text{Im})^2} \quad A = \sqrt{250^2 + [100(1 + \sqrt{3})]^2}$$

5.2 Phase  $\varphi$  (Winkel)

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-100(1 + \sqrt{3})}{250}\right)$$

6. Resultat korrekt ausgedrückt

$$y(t) = |A^{(c)}| \cos(\omega t + \arg(A^{(c)}))$$

$$y(t) = 370.3 \cos(3t - 0.83) \quad (-0.83 = \text{RAD})$$

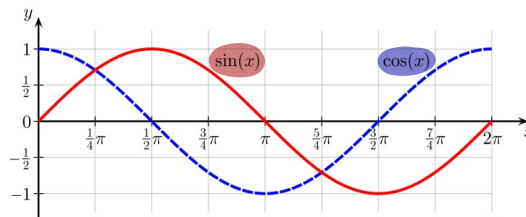
Erinnerung Argumentfunktion:

$$\phi = \arg(z) = \arg(a + ib) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & (a > 0) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & (a < 0, b \geq 0) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & (a < 0, b < 0) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & (a = 0, b > 0) \\ \text{undefiniert} & (a = 0, b = 0) \end{cases}$$

## Symmetrieeigenschaften

### Zusammenfassung

| Typ der Funktion | Bedingung       | Symmetrie         | Fourier-Anteile                  |
|------------------|-----------------|-------------------|----------------------------------|
| <b>Gerade</b>    | $f(-t) = f(t)$  | Achsensymmetrisch | nur <b>Cosinus</b> ( $b_k = 0$ ) |
| <b>Ungerade</b>  | $f(-t) = -f(t)$ | Punktsymmetrisch  | nur <b>Sinus</b> ( $a_k = 0$ )   |
| Keine Symmetrie  | -               | keine             | Sinus + Cosinus                  |



| ungerade           | gerade                  |
|--------------------|-------------------------|
| $s(t) = t$         | $s(t) = t^2$            |
| $s(t) = t^3$       | $s(t) = t^4 - 3t^2 + 1$ |
| $s(t) = 5t - 2t^3$ | $s(t) =  t $            |
| $s(t) = \sin(t)$   | $s(t) = \cos(t)$        |
| $s(t) = \sin(2t)$  | $s(t) = \cos(3t)$       |
| $s(t) = t \sin(t)$ | $s(t) = \cos(t) + 2$    |
|                    | $s(t) = \cos(t) + t^2$  |

weder noch  
Exponenten  
der Funktion  
berücksichtigen

$x^0 = 1$  gerade  
 $x^1 = x$  ungerade

## Beziehung zwischen Reell & Komplex

$$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

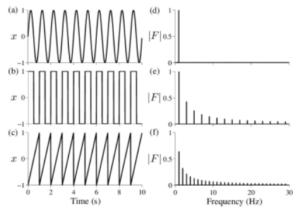
$$\hat{f}_{-k} = \overline{\hat{f}_k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad \text{Komplex Konjugiert}$$

## Von Komplex zu Reell

$$a_k = 2 \text{Re}(\hat{f}_k)$$

$$b_k = -2 \text{Im}(\hat{f}_k)$$

Ziel der Fouriertransformation ist es, von einem **Zeitsignal** auf das **Amplitudenspektrum** zu gelangen, bzw. die **Grundfrequenz** und ihre ganzzahligen Vielfachen zu **ermitteln**.



- Amplitude der  $l$ -ten Harmonischen ist:
  - $A_0 = \frac{a_0}{2}$
  - $A_{l>0} = \sqrt{a_l^2 + b_l^2}$  **Stärke der Frequenz**
  - $A_l = |\hat{f}_l| = \sqrt{(\text{Re}(\hat{f}_l))^2 + (\text{Im}(\hat{f}_l))^2}$
- Die Frequenz der  $k$ -ten Harmonischen ist:
  - $k \cdot \omega$
  - (wobei  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ )
  - Komplex:  $\frac{l}{T} / \frac{1}{2\pi}$  für  $l$  von 0 bis  $N-1$

## DISKRETE FOURIER TRANSFORMATION – DFT

Die  $N$  Koeffizienten der komplexen DFT der Funktion  $f(x)$  mit **Periode  $2\pi$**  und **Kreisfrequenz  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$** , sind:

## KOMPLEX

$$\hat{f}_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} = \hat{f} = (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{N-1})$$

Rücktransformation:

$$f_k = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l e^{2\pi i \frac{kl}{N}}$$

## REELL

$$a_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right), (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$b_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi kl}{N}\right), (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

Rücktransformation:

$N$  ungerade ( $N = 2M + 1$ ):

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^M a_l \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + b_l \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right)$$

$N$  gerade ( $N = 2M$ ):

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M-1} a_l \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + b_l \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + \frac{a_M}{2} \cos\left(\frac{2\pi Mk}{N}\right)$$

## KOMPLEX → REELL

$$a_l = 2\text{Re}(\hat{f}_l) \quad \text{cosinus}$$

$$b_l = -2\text{Im}(\hat{f}_l) \quad \text{sinus (-)}$$

## REELL → KOMPLEX

$$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$\hat{f}_{l>0} = \frac{1}{2}(a_l - ib_l)$$

## $\hat{f}_l$ berechnen

1.  $l$  festlegen
2. Summe über  $k$  von 0 bis  $N-1$  bilden
3. Jeden Messwert  $f_k$  mit  $e^{(-2\pi i \cdot k \cdot l / N)}$  multiplizieren
4. Alles addieren
5. Am Schluss durch  $N$  teilen

Danach hast du einen komplexen Wert

## Cosinus ( $a_l$ ) & Sinus ( $b_l$ )

1.  $l$  festlegen
2. Für jedes  $k$   $\cos/\sin$  berechnen
3. Mit  $f_k$  multiplizieren
4. Alles aufsummieren
5. Mit  $2/N$  multiplizieren

## Laufindex

$l$  wählen  
über  $k$  summieren

$k$ : Zeitindex

$l$ : Frequenzindex

$f_k$ : Messwert des Signals zum Zeitpunkt  $k$   
• Originalsignal

## Beispiel - Reell

Gegebenes Signal als Messwerte

$$f_0 = 3, f_1 = 3, f_2 = 1, f_3 = 1$$

Schritt 1: Summe für  $a_1$  vollständig ausschreiben

$$\sum_{k=0}^3 f_k \cos\left(\frac{2\pi k}{4}\right) = f_0 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{4}\right) + f_1 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 1}{4}\right) + f_2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 2}{4}\right) + f_3 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 3}{4}\right)$$

$$\frac{2\pi \cdot 0}{4} = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

Schritt 2: Jetzt  $f_k$  einsetzen und multiplizieren

$$\frac{2\pi \cdot 1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$= 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0$$

$$\frac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi$$

$$\cos(\pi) = -1$$

$$= 2$$

$$\frac{2\pi \cdot 3}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Schritt 3: Vorfaktor  $\frac{2}{N}$

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Das Gleiche vorgehen gilt für alle  $a_n$   
für  $b_n$  einfach mit  $\sin$ !

## Endergebnis

$$a_1 = 1, b_1 = 1$$

Amplitude: Wie stark ist der Ausschlag?  
 $A_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

## Beispiel - Komplex

$$N = 4, f_0 = 3, f_1 = 3, f_2 = 1, f_3 = 1$$

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot 0}{4}}$$

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{4} (f_0 e^{-2\pi i \frac{0 \cdot 0}{4}} + f_1 e^{-2\pi i \frac{1 \cdot 0}{4}} + f_2 e^{-2\pi i \frac{2 \cdot 0}{4}} + f_3 e^{-2\pi i \frac{3 \cdot 0}{4}})$$

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{4} (f_0 \cdot 1 + f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 1 + f_3 \cdot 1)$$

Jetzt  $f_k$  einsetzen

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{4} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)$$

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \quad \text{Gleichanteil! } \hat{f}_0$$

2)  $\hat{f}_1$  Schritt für Schritt

Laufindex  $k$

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{4} (f_0 e^{-2\pi i \frac{0 \cdot 1}{4}} + f_1 e^{-2\pi i \frac{1 \cdot 1}{4}} + f_2 e^{-2\pi i \frac{2 \cdot 1}{4}} + f_3 e^{-2\pi i \frac{3 \cdot 1}{4}})$$

Jetzt die Winkel vereinfachen

$$\begin{cases} -2\pi \frac{0}{4} = 0 \\ -2\pi \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2} \\ -2\pi \frac{2}{4} = -\pi \\ -2\pi \frac{3}{4} = -\frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \hat{f}_1 = \frac{1}{4} (f_0 e^{i \cdot 0} + f_1 e^{-i \frac{\pi}{2}} + f_2 e^{-i \pi} + f_3 e^{-i \frac{3\pi}{2}}) \\ \text{Jetzt jedes } e^{i\theta} \text{ einzeln in Cosinus und Sinus umwandeln} \\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ \text{Erstes Glied} \\ e^{i \cdot 0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + i \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{4} (f_0 \cdot 1 + f_1 \cdot (-i) + f_2 \cdot (-1) + f_3 \cdot i)$$

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{4} (3 \cdot 1 + 3 \cdot (-i) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot i)$$

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{4} (2 - 2i)$$

$$6 \hat{f}_1 a_1 = 2 \text{Re}(\hat{f}_1) \quad b_1 = -2 \text{Im}(\hat{f}_1)$$

## Interpretation

1.  $a_0$ : Gleichanteil

↳  $a_0 = 0$  kein Gleichanteil

↳  $a_0 \neq 0$  Signal ist nach unten oder oben verschoben

↳  $b_0$  ist immer 0!  
gibt keine Information und ist keine Schwingung

2. Jede Paarung betrachten

↳  $a_0, b_0 \quad a_1, b_1 \dots$

3. Entscheiden, ob die Frequenz vorkommt

↳  $a_l = 0$  &  $b_l = 0$

↳ Frequenz kommt nicht vor

↳ mindestens einer ungleich 0!

↳ Frequenz ist im Signal

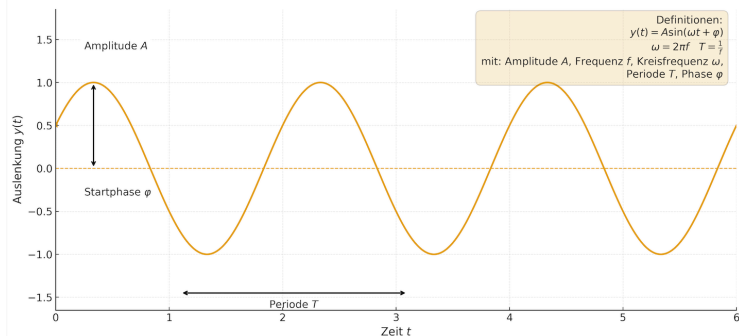
4. Amplitude der Frequenz berechnen

$$\hookrightarrow \sqrt{(a_l)^2 + (b_l)^2}$$

5. Art der Schwingung bestimmen

↳

- $a_l \neq 0, b_l = 0$   
→ reiner Cosinus
- $a_l = 0, b_l \neq 0$   
→ reiner Sinus
- $a_l \neq 0$  und  $b_l \neq 0$   
→ Cosinus mit Phasenverschiebung



$A$  = Höhe der Auslenkung

$\omega$  = wie schnell die Schwingung ist

$T$  = Zeit für eine volle Schwingung

$f$  = wie viele Schwingungen pro Sekunde

$\varphi$  = Verschiebung der Schwingung entlang der Zeitachse

↳ Positive Phase = Verschiebung nach links

Negative Phase = Verschiebung nach rechts

## Umgang mit TR Ausgabe

Für ganzzahliges  $k$  gilt immer:

$$\sin(k\pi) = 0$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

1. Sinus Terme eliminieren

$$(k^2\pi^2 - 2) \underbrace{\sin(k\pi)}_0 = 0$$

2. übrigen Term vereinfachen

$$\frac{2 \cdot 2k \cos(k\pi) \pi}{k^3 \pi} = \frac{4k \cos(k\pi) \pi}{k^3 \pi} = \frac{4 \cos(k\pi)}{k^2}$$

3. Regel für cos mit ganzzahligen  $k$  anwenden

$$\frac{4(-1)^k}{k^2}$$

als Funktion im TR definieren  
und die einzelnen  $k$  Werte einsetzen

$$a_k = f(k) := \frac{2 \cdot (2 \cdot k \cdot \cos(k \cdot \pi) \cdot \pi + (k^2 \cdot \pi^2 - 2) \cdot \sin(k \cdot \pi))}{k^3 \cdot \pi}$$

$f(1)$   $k=1$   
 $f(2)$   $k=2$  } beliebiger  $k$  einsetzen

## BERECHNUNG FOURIERREIHE

1. Ermitteln der relevanten Größen

- $T$ : Periodenlänge
- $f = \frac{1}{T}$ : Frequenz in Hz
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- $s(t)$ : periodisches Signal  
i.  $s(t) = s(t + T)$
- Symmetrieeigenschaften
- Berechnung der Koeffizienten
- Ermitteln der Fourierreihe

1. Symmetrie erkennen

2. Periodenlänge ( $T$ ) bestimmen

3. Intervall festlegen

4. Funktion festlegen (abhängig vom Intervall)

5. Berechnen der Koeffizienten

## Komplexe Zahlen

Kartesische Form  $\rightarrow$  Polarform / Euler

$$z = a + bi \rightarrow z = r \cdot [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] / r e^{i\varphi}$$

1. Betrag  $r$  berechnen

$$\hookrightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. Winkel berechnen

$$\hookrightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + k \cdot 180^\circ$$

2.1) Korrekturparameter  $k$  bestimmen

Vorzeichen von  $a$  und  $b$  beachten  
um den Quadranten zu bestimmen

1. Quadrant  $\rightarrow k = 0$
2. Quadrant  $\rightarrow k = 1$
3. Quadrant  $\rightarrow k = 1$
4. Quadrant  $\rightarrow k = 2$

3. In Polarform notieren

4. Spezialfall rein Imaginär

$$\hookrightarrow z = +bi, z = -bi \quad \text{Imaginäre Achse (y-Achse)}$$

$$\hookrightarrow z = a, z = -a \quad \text{Reelle Achse (x-Achse)}$$

Euler / Polarform  $\rightarrow$  Kartesische Form

$$r e^{i\varphi} / z = r \cdot [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] \rightarrow z = a + bi$$

1.  $\cos(\varphi)$  und  $\sin(\varphi)$  berechnen

↳ Taschenrechner

2. Real- und Imaginärteil bestimmen

$$\hookrightarrow a = r \cdot \cos(\varphi), b = r \cdot \sin(\varphi)$$

3. In kartesischer Form notieren

| Kartesische Form      | Polarform                                                                                                                             | Eulersche Form       |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $z = a + bi$          | $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$                                                                                              | $z = r e^{i\varphi}$ |
| $a = r \cos(\varphi)$ | $r =  z  = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$                                                      |                      |
| $b = r \sin(\varphi)$ | mit $\Delta = \begin{cases} 0^\circ, & z \text{ in 1. oder 4. Quadrant} \\ 180^\circ, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \end{cases}$ |                      |

Eulersche Form

$$z = r e^{i\varphi} = r [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$$

Addition / Subtraktion

Nur in kartesischer Form!

Potenzen

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Konjugiert

$$\bar{z} = r e^{-i\varphi} = r e^{i(-\varphi)}$$

- $z = a + bi = A \cdot \cos(\varphi) + A \cdot \sin(\varphi) i = |z| e^{i\varphi}$
- $A = |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$
- $\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) (\pm \pi)$

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & (a > 0) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & (a < 0, b \geq 0) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & (a < 0, b < 0) \\ \text{undefiniert} & (a = 0, b > 0) \\ & (a = 0, b < 0) \\ & (a = b = 0) \end{cases}$$



Eulersche Form

$$z = r e^{i\varphi} = r [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$$

Addition / Subtraktion

Nur in kartesischer Form!

Potenzen

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Konjugiert  $\bar{z}$

$$\bar{z} = r e^{-i\varphi} = r e^{i(-\varphi)}$$

Multiplikation

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

# Differentialgleichung

## Linear 1. Ordnung - Inhomogen

$$ay' + by = g(x)$$

- Umstellen (Störfunktion  $g(x)$ )

alles mit "y" = alles mit "x"

$$y' - 2y = 4x^2, \quad y(0) = 0$$

- Homogene DGL lösen (mit Ansatz)

$$y = c \cdot e^{\lambda x} \quad y' = \lambda c e^{\lambda x}$$

Trick

$$y_h = c \cdot e^{-ax}$$

$a \hat{=}$  Zahl vor y

$$y' - 2y = 0$$

Bedingung ist das Konstante vor

$y'$  muss 1 sein!

- Ansatz in DGL einsetzen

$$\lambda c e^{\lambda x} - 2c e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda c - 2c) e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda = 2$$

- Homogene Lösung notieren

$$y_h = c \cdot e^{2x}$$

- Spezielle Lösung bestimmen

$$g(x) = 4x^2 \quad \text{Quadratischer Ansatz}$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad y' = 2ax + b$$

Je nach Art von  $g(x)$ , wird ein anderer Ansatz gewählt!

- Ansatz in DGL einsetzen

$$(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 4x^2$$

- Gliedern

$$x^2(-2a-4) + x(2a-2b) + (b-2c) = 0$$

- Gleichungssystem lösen

$$a = -2, \quad b = -2, \quad c = -1$$

- In Ansatz einsetzen

$$y_s(x) = -2x^2 - 2x - 1$$

- Allgemeine Lösung bestimmen

$$y(x) = y_h + y_s \quad y_s = c \cdot e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1$$

- c bestimmen wenn AB vorhanden

- 1 Anfangsbedingung in  $y_s$  einsetzen

nach c auflösen

$$y(0) = c \cdot e^{2 \cdot 0} - 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = 0$$

$$= c \cdot 1 - 0 - 0 - 1 = 0$$

$$= c - 1 = 0$$

$$c = 1$$

Achtung! Ist die AB als  $y(x)$  gegeben oder deren Ableitung?

$y'(x) \Rightarrow$  dann einfach allgemeine Lösung ableiten

| Störfunktion $g(x)$                                       | Zugehöriger Ansatz für $y_s(x)$            |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $a$ (const)                                               | $b$ (const)                                |
| $a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$                             | $b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ K. Vergleich |
| $ae^{\lambda x}$                                          | $be^{\lambda x}$                           |
| $a \sin(mx)$<br>$b \cos(mx)$<br>$a \sin(mx) + b \cos(mx)$ | $c \sin(mx) + d \cos(mx)$ K. Vergleich     |

(ist das Störglied  $g(x)$  teil der Homogenen Lösung so wird die andere Tabelle verwendet! Lösung = mit x multiplizieren)

## Linear 2. Ordnung - Homogen

$$y'' + ay' + by \stackrel{!}{=} 0$$

- Charakteristische-Gleichung lösen

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$y = e^{\lambda x} \quad \dots \text{Ableitungen davon}$$

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0$$

davon müssen die Nullstellen ermittelt werden

Solve = reell  
c Solve = komplex

- Die 3 Arten von Lösungen

Durch das Lösen der charakteristischen Gleichung können 3 Fälle auftreten!

- 1 Einfache reelle Nullstellen

$$y_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

- 2 Doppelte reelle Nullstelle

$$y_h = (C_1 + x C_2) \cdot e^{\lambda_{1,2} x}$$

- 3 Einfache komplexe Nullstellen

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

1. Reelle Basislösung  
2. Reelle Basislösung

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$$

$$y_h = e^{\alpha x} [C_1 \sin(|\beta|x) + C_2 \cos(|\beta|x)]$$

$$y_h = e^{\alpha x} [C_1 e^{+i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}]$$

Reell  
Komplex

Es kann von  $\beta$  der Betrag  $|\beta|$  genommen werden da der negative Anteil in die Konstante C übergehen würde

| Fall | Störfunktion $g(x)$                                                          | Lösungsansatz $y_p$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$                       | $y_p = \begin{cases} P_n(x) & \text{falls } b \neq 0 \\ x P_n(x) & \text{falls } a \neq 0, b = 0 \\ x^2 P_n(x) & \text{falls } a = b = 0 \end{cases}$                                                                                                                                                                                              |
| 2    | $g(x) = B e^{cx}$ mit $B, c \in \mathbb{R}$                                  | $c$ keine Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$<br>$y_p = A e^{cx}$ mit $A \in \mathbb{R}$<br>$c$ einfache Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$<br>$y_p = A x e^{cx}$ mit $A \in \mathbb{R}$<br>$c$ zweifache Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$<br>$y_p = A x^2 e^{cx}$ mit $A \in \mathbb{R}$                                    |
| 3    | $g(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ | $i\beta$ keine Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$<br>$y_p = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)$<br>oder $y_p = C \sin(\beta x + \varphi)$<br>$i\beta$ Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$<br>$y_p = x (A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x))$<br>oder $y_p = C x \sin(\beta x + \varphi)$<br>mit $A, B, C, \beta, \varphi \in \mathbb{R}$ |



## Linear 2. Ordnung - Inhomogen

1. Homogene Lösung bestimmen  
siehe Verfahren Lin. 2. Ord. - Homogen
2. Entsprechenden Ansatz für  $g(x)$  wählen  
siehe Störfunktion Tabelle
- 2.1 Ableitungen des Ansatzes  
 $g(x) = 3e^{4x}$   $y_s = A \cdot e^{4x}$   
 $y = Ae^{4x}$   $y' = 4Ae^{4x}$   $y'' = 16Ae^{4x}$
- 2.2 Ableitungen in DGL einsetzen mit  $g(x)$   
nach "A" auflösen  
 $16Ae^{4x} + 3(4Ae^{4x}) - 12(Ae^{4x}) = 3e^{4x}$   
 $A = \frac{1}{6}$
- 2.3 Spezielle Lösung notieren  
 $y_s = \frac{1}{6}e^{4x}$  "A" in Ansatz einsetzen
3. Allgemeine Lösung  
 $y = y_h + y_s$

### Exponential Ansatz Regeln

$$c \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \text{Kein Problem}$$

$$c \hat{=} \lambda_1 \text{ oder } \lambda_2$$

Dies führt zu  $\downarrow$   
Daher Ansatz mit "x" multiplizieren  
siehe Erweiterte Tabelle

$$c \hat{=} \lambda_1 \& \lambda_2 \text{ Doppelte Nullstelle}$$

Ansatz mit  $x^2$  multiplizieren

### Trigo Ansatz Regel

$$\pm i \neq \lambda_{1/2}$$

Normaler Ansatz

$$g(x) = \cos(3x) \quad \beta = 3$$

$$\pm i \cdot \beta = \lambda_{1/2}$$

Ansatz mit "x" multiplizieren

$$EV = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}$$

wird als 0 betrachtet

Bei doppeltem  $\lambda$  und linearer-Abhängigkeit des Eigenvektors kommt es zum Problem!

Lösungsansatz:

$$(A - \lambda E_n) \cdot \vec{v}^* = \vec{v} \rightarrow \text{schon g-e-undenen EV} \quad \vec{v} = EV$$

$$I_n = E_n = \text{Einheitsmatrix}$$

$$\text{solve} \left( \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w1, w2 \right)$$

$$\text{solve} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w1, w2 \right) \quad \text{mit } \lambda = 0$$

mit  $\lambda = 0$

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot \vec{v} \quad \vec{v}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = C_2 \cdot e^{2x} \cdot \left[ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$y_2 = C_2 \cdot e^{\lambda x} (x \cdot \vec{v} + \vec{v}^*)$$

$$= C_2 \cdot e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Lineare Systeme von DGL - homogen

$$y' = Ay$$

A ist eine Matrix  
y ist ein Vektor

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### Satz

Die vektorwertige Funktion  $y = e^{\lambda x} \cdot c$  ist genau dann eine Lösung des homogenen Systems

$$y' = Ay,$$

wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von A mit Eigenvektor c ist.

dennach sind Eigenwerte & Eigenvektoren zu bestimmen

Achtung! Komplexe & Doppelte Eigenwerte sind möglich

1. Matrix A erstellen
2. Eigenwerte der Matrix A berechnen  
 $\hookrightarrow \text{eigV} \quad 7, 8, 4$   
 $\hookrightarrow \lambda_n \quad \det(A - I_n \lambda) = 0$

3. Eigenvektoren der Matrix A berechnen  
 $\hookrightarrow \text{eigV} \quad 7, 8, 5$   
 $\hookrightarrow EV_n$

- (3.1) Eigenvektor skalieren

$\hookrightarrow$  Jeder EV darf beliebig skaliert werden

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} -0,707107 & 0,707107 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3.1.1 Kleinste Komponente auf 1 skalieren

$$EV = \begin{pmatrix} 0,81649658 \\ 0,57735027 \end{pmatrix} \quad \text{solve}(0,57735027 \cdot x = 1, x) = \sqrt{3} \quad (\text{ganzer EV mit } \sqrt{3} \text{ multiplizieren})$$

4. Paarung von EV & EW berücksichtigen

$\hookrightarrow$  Ausgabe im TR: 1 EW = 1 Spalte von EV

5. Berechnung von  $y_n$

$$y_n = C_n \cdot EV_n \cdot e^{\lambda_n x}$$

Eigenwerte =  $\lambda_n$

Eigenvektoren =  $EV_n$

Konstanten =  $C_n$

6. Notierung der homogenen Lösung

$$y_h = y_1 + y_2 \dots y_n$$

### EV & EW sind komplex

$$EW \leftarrow \lambda = \mu \pm i\nu \quad \nu \neq 0, \quad \lambda = 1 \pm 2i$$

$$y(x) = e^{\lambda x} c = e^{(\mu + i\nu)x} (a + ib) \rightarrow EV$$

$$z_1(x) = \text{Re}(e^{\lambda x} c) = e^{\mu x} (a \cos(\nu x) - b \sin(\nu x))$$

$$z_2(x) = \text{Im}(e^{\lambda x} c) = e^{\mu x} (a \sin(\nu x) + b \cos(\nu x))$$

Reihenfolge & Vorzeichen beachten!

Es wird nur 1 Eigenvektor benötigt der zweite EV enthält keine neuen Infos!

1. Eigenvektor umschreiben

$$V = \begin{pmatrix} 0,834427 \\ -0,447214i \end{pmatrix} \quad v = \underbrace{a}_{\text{Re}} + i \underbrace{b}_{\text{Im}}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0,834427 + 0i \\ 0 - 0,447214i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Zwei reelle Lösungen bauen

$\hookrightarrow$  Siehe Form von  $z_1(x)$  &  $z_2(x)$

$$e^{1x} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos(2x) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \sin(2x) \right] \quad e^{1x} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sin(2x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cos(2x) \right]$$

$$e^x \left[ \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \end{pmatrix} \right] \quad e^x \left[ \begin{pmatrix} 2 \sin(2x) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(2x) \end{pmatrix} \right]$$

$$e^x \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \quad e^x \begin{pmatrix} 2 \sin(2x) \\ -\cos(2x) \end{pmatrix}$$

3. Allgemeine Lösung notieren

$$y = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x)$$

$$y = C_1 e^x \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \sin(2x) \\ -\cos(2x) \end{pmatrix}$$

## Lineare Systeme von DGL-inhomogen

$$y'(x) = Ay(x) + b(x) \quad b(x) = \text{Störfunktion}$$

1. Homogenes System lösen  
↳ siehe: Lineare Systeme von DGL-homogen
2. Ansatz der Störfunktion wählen  
↳ siehe Tabelle
3. Ableitungen notieren  
↳ 4,1
4. Ableitungen in Funktionen einsetzen  
↳ dies ergibt ein Gleichungssystem
5. Gleichungssystem lösen  
↳ 3,7,1
6. Allgemeine Lösung notieren

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 + 3e^{-x} \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 - e^{-x} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$1. \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1, \quad EV_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad EV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_h = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x$$

$$2. \quad \text{Exponentieller Ansatz} \quad b \cdot e^{\lambda x}$$

$$3. \quad y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-x}, \quad y' = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad -b_1 e^{-x} &= 2 \cdot b_1 e^{-x} - b_2 e^{-x} + 3e^{-x} \\ -b_2 e^{-x} &= -1 \cdot b_1 e^{-x} + 2b_2 e^{-x} - e^{-x} \end{aligned}$$

$e^{-x}$  kürzen

$$5. \quad \begin{cases} -b_1 = 2b_1 - b_2 + 3 \\ -b_2 = -1b_1 + 2b_2 - 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} b_1 = -1 \\ b_2 = 0 \end{matrix}$$

$$y_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$6. \quad y = \underbrace{C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x}_{y_h} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}}_{y_s}$$

## Anfangsbedingung einsetzen

$$y = C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}x} + C_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}x}$$

allgemeine homogene Lösung

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NB

$$y(0) = \text{für alle } x=0$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{anfangswerte } y_1=0, y_2=1$$

1. x-Wert in allgemeine Lösung einsetzen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2} \cdot 0} + C_2 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot 0} \\ C_1 \cdot 1 \cdot e^{\sqrt{2} \cdot 0} + C_2 \cdot 1 \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot 0} \end{pmatrix}$$

$$0 = C_1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + C_2 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot 1$$

$$1 = C_1 \cdot 1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\begin{cases} 0 = \sqrt{2}(C_1 - C_2) \\ 1 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

2. Erhaltener GLS lösen 3,7,1

$$\begin{cases} 0 = \sqrt{2}(C_1 - C_2) \\ 1 = C_1 + C_2 \end{cases} \quad C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

3.  $C_n$  in allgemeine Lösung einsetzen

$$y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}x} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}x}$$

## Lösung gegeben, DGL gesucht (homogen)

1. Form der Lösung erkennen

|                               |                                    |                        |
|-------------------------------|------------------------------------|------------------------|
| Einfache reelle Nullstellen   | $y = e^{ax}$                       | $\lambda = a$          |
| Doppelte reelle Nullstelle    | $y = x^k e^{ax}$                   | doppelt: $\lambda = a$ |
| Einfache komplexe Nullstellen | $y = \sin(bx)$ oder $y = \cos(bx)$ | $\lambda = \pm bi$     |

Form, siehe: Linear 2. Ordnung - Homogen

2. Passende  $\lambda$  definieren

$$\begin{aligned} e^{-x} \text{ gibt } \lambda &= -1 \\ x e^{2x} \text{ gibt } \lambda &= 2 \text{ doppelt} \\ \sin(3x) \text{ gibt } \lambda &= \pm 3i \end{aligned}$$

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{2x}$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

3. Charakteristisches Polynom bauen

$$(\lambda - a)(\lambda - bi)(\lambda + bi) = \lambda^2 + b^2$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

4. Ausmultiplizieren

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{expand() } 3,3$$

5. Polynom in DGL übersetzen

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

## Lösung gegeben, DGL gesucht (inhomogen)

1. Homogene DGL gemäß oben lösen

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + x^3 + 1 \quad y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} \quad y_s = x^3 + 1 \quad y'' - 4y = 0$$

2. Spezielle Lösung ableiten

$$y_p = x^3 + 1, \quad y_p' = 3x^2, \quad y_p'' = 6x$$

3. In Homogene Lösung einsetzen

$$6x - 4(x^3 + 1)$$

4. Ausmultiplizieren 3,3

$$g(x) = -4x^3 + 6x - 4$$

# Differentialgleichung DGL

Richtungsfelder =  $\mathbb{R}^2$

↳ Werte von  $x_0, y_0$  sind gegeben  
so kann die Steigung an diesem Punkt ermittelt und in ein  $\mathbb{R}^2$  eingetragen werden

1. Ordnung und Typ bestimmen
2. Umformen, wenn nötig
3. Integrieren
4. Lösungsfunktion aufstellen
5. Falls gegeben. Anfangsbedingung einsetzen um Konstanten  $[c]$  zu berechnen

## Separierbare DGL

$$y'(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{Nur x Komponenten}} \cdot \underbrace{g(y)}_{\text{Nur y Komponenten}}$$

1.  $f(x), g(y)$  und  $\frac{dy}{dx}$  identifizieren und in die Form bringen

$$\hookrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

2. Trennung der Variablen  $x$  &  $y$

$$\hookrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

3. Integration der beiden Seiten der Gleichung (falls möglich)

$$\hookrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

4. Auflösen nach  $y$  (falls möglich)

- (5.1) Anfangsbedingung AB einsetzen

↳ nach der Konstante  $C$  umstellen

- (5.2)  $C$  wieder in 4 einsetzen

Autonome DGL = Spezielle Form der Separierbaren DGL

$$y'(x) = \underbrace{f(x)}_{=1} \cdot g(y)$$

## Lineare DGL (y-Komponenten kein Exponent $\geq 2$ )

$$y'(x) + f(x) \cdot y = g(x)$$

$\swarrow$   $g(x) = 0 \rightarrow$  homogen  
 $\searrow$   $g(x) \neq 0 \rightarrow$  inhomogen  
 Störglied

1.  $f(x)$  &  $g(x)$  identifizieren und in die obige Form bringen

2. Bestimmung von  $F(x)$

3. Homogen oder inhomogen?

4. In die entsprechende Formel einfügen

5. Integrieren wenn Inhomogen

- (6) AB einsetzen wenn vorhanden

## L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Umformung sodass L'Hopital angewendet werden kann.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Von  $0 \cdot \infty$  nach  $\frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{0}$   
oder  $\infty - \infty$  nach  $\frac{0}{0}$

(Situation  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ )

## Notationen

| 1. Ordnung           | 2. Ordnung               |
|----------------------|--------------------------|
| $y' = 3x$            | $y'' = 3x$               |
| $y'(x) = 3x$         | $y''(x) = 3x$            |
| $\frac{dy}{dx} = 3x$ | $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x$ |
| $\dot{y} = 3x$       | $\ddot{y} = 3x$          |

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = f_{tx}(x, y) \quad \text{funktion } z \text{ ableiten nach } t \text{ dann nach } x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) \quad \text{funktion } z \text{ ableiten nach } x \text{ dann noch } x$$

## Lösungsformel homogen

$$y_h = C \cdot e^{-F(x)}$$

$$y_h = K(x) \cdot e^{-F(x)}$$

$$K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} \cdot dx$$

## Lösungsformel für inhomogenes Lineares-DGL 1. Ordnung

$$y = \underbrace{e^{-F(x)-C}}_{y_h} \cdot \underbrace{\int g(x) \cdot e^{F(x)+C}}_{K(x)} \cdot dx$$

$C$  ist nicht in der Formel enthalten weil es sich kürzt.

| Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ | Funktion $f(x)$     | Umformung                                                           |
|-----------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$    | $\frac{g(x)}{h(x)}$ | entfällt                                                            |
| $0 \cdot \infty$                        | $g(x) \cdot h(x)$   | $\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}$                                       |
| $\infty - \infty$                       | $g(x) - h(x)$       | $\frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x) \cdot h(x)}}$ |
| $0^\infty, \infty^0, 1^\infty$          | $g(x)^{h(x)}$       | $e^{h(x) \cdot \ln(g(x))}$                                          |

# Fourier Transformation

N = Anzahl gemessene Signalwerte

## Komplexe - Form

$$\hat{f}_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k m}{N}}$$

## Zusammenhang Reell und Komplex

$$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \hat{f}_m = \frac{1}{2}(a_m - ib_m) \quad (m = 1, 2, \dots, N-1)$$

$$a_m = 2 \cdot \operatorname{Re}(\hat{f}_m)$$

$$b_m = -2 \cdot \operatorname{Im}(\hat{f}_m)$$

## Reelle - Form

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{N-1} \left( a_m \cos\left(\frac{2\pi k m}{N}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi k m}{N}\right) \right)$$

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi k m}{N}\right) \quad (l = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

$$b_m = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi k m}{N}\right) \quad (l = 1, 2, \dots, N-1)$$

Es muss unterschieden werden ob N gerade oder ungerade ist

Gleichung:  $ax^2 + bx + c = 0$

Ergebnis:  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

## DGL 2. Ordnung in System überführen

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

$$y_2' = y''$$

## Differentialgleichungen Gesamtüberblick

! Ziel: Funktion  $y(x)$  herausfinden

! Gegeben: Gleichung mit Ableitungen der Funktion  $y(x) \rightarrow$  sog. gewöhnliche DGL

Ordnung

$$2y' - 4y = 5x$$

$$5y'' - 8y' + 2y = e^x$$

DGL 1. Ordnung  
DGL 2. Ordnung

Je nach Ordnung existiert ein anderes Lösungsverfahren

Störfunktion  $g(x)$

$$3y' + 2y' - 4y = 0$$

$$3y' + 2y' - 4y = 5x$$

homogene DGL  
inhomogene DGL

Je nach Störfunktion gibt es einen anderen Lösungssatz

Darstellung

$$5y' - y = \sin(x)$$

$$5y' - \sin(x) = y$$

explizite Darstellung  
implizite Darstellung

Vor Lösung einer DGL in explizite Darstellung umformen!

Linearität

$$2y'' = 3y' + 5y = e^x$$

$$3y' + y^2 + x = 5y$$

lineare DGL  
nicht-lineare DGL

Je nachdem ob linear oder nicht existiert ein anderes Lösungsverfahren

## Extrema

### lokales Maximum:

$$f'(x_E) = 0 \quad (x_E \text{ ist Nullstelle der Ableitung})$$

$$f''(x_E) < 0 \quad (\text{Graph ist rechtsgekrümmt})$$

### lokales Minimum:

$$f'(x_E) = 0 \quad (x_E \text{ ist Nullstelle der Ableitung})$$

$$f''(x_E) > 0 \quad (\text{Graph ist linksgekrümmt})$$

Wenn  $f''(x_E) = 0$   
 $\rightarrow$  kein Extremum!

① " $f'(x) = 0$ " und nach x auflösen

② Nullstellen  $(x_{i,1})$  in  $f''(x)$  einsetzen und lösen (größer/kleiner Null?)

## Wendepunkt:

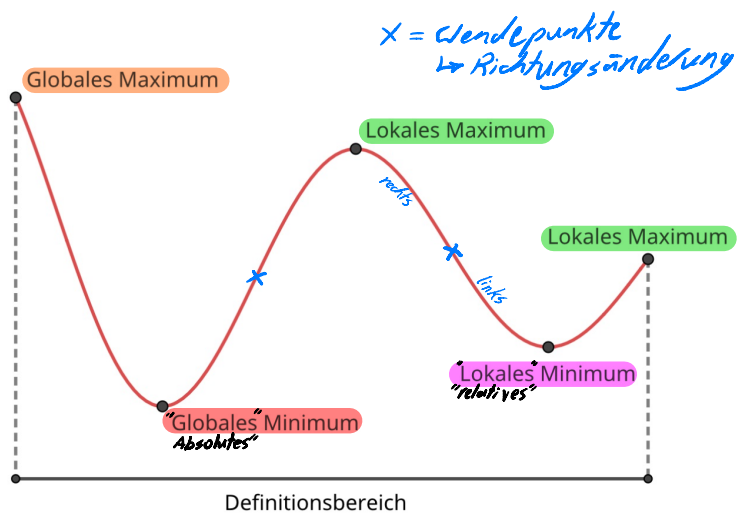
$$f''(x_0) = 0 \text{ und zusätzlich}$$

$$f'''(x_0) \neq 0$$

$$\begin{cases} f(x_0) > 0 \rightarrow \text{Rechts-Links} \\ f(x_0) < 0 \rightarrow \text{Links-Rechts} \end{cases}$$

① " $f'(x) = 0$ " und nach x auflösen

② Nullstellen  $(x_{i,1})$  in  $f''(x)$  einsetzen und lösen (größer/kleiner Null?)

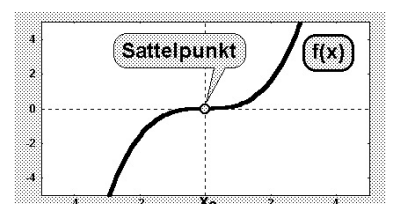


## Sattelpunkt:

$$f'(x_0) = 0$$

$$f''(x_0) = 0 \text{ und zusätzlich}$$

$$f'''(x_0) \neq 0$$



(Sattelpunkt ist auch Wendepunkt aber nicht umgekehrt!)



| Exakte Form | Dezimalwert |
|-------------|-------------|
| $\sqrt{2}$  | 1.41421     |
| $\sqrt{3}$  | 1.73205     |
| $\sqrt{5}$  | 2.23607     |
| $\sqrt{6}$  | 2.44949     |
| $\sqrt{7}$  | 2.64575     |
| $2\sqrt{2}$ | 2.82843     |
| $\sqrt{10}$ | 3.16228     |

| Exakte Form  | Dezimalwert |
|--------------|-------------|
| $1/\sqrt{2}$ | 0.70711     |
| $1/\sqrt{3}$ | 0.57735     |
| $\sqrt{2/3}$ | 0.81650     |
| $1/\sqrt{5}$ | 0.44721     |
| $\sqrt{3/5}$ | 0.77460     |

Trick: Zahl ins Quadrat

$$(1.73205)^2 = 3 \quad \text{also ist } 1.73205 = \sqrt{3}$$

| Exakte Form  | Dezimalwert |
|--------------|-------------|
| $\sqrt{2}/2$ | 0.70711     |
| $\sqrt{3}/2$ | 0.86603     |
| $\sqrt{5}/2$ | 1.11803     |
| $2/\sqrt{3}$ | 1.15470     |

### Spezielle Lösung einer Inhomogenen DGL

1.  $g(x) = x^2$  Polynom-Ansatz  
 $y'' + 4y = x^2$   $b_0 \cdot x^0 + b_1 \cdot x^1 + b_2 \cdot x^2$

2. Ansatz nach "x" ableiten  
 $y_s = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$   
 $y_s' = 2b_2 x + b_1$   
 $y_s'' = 2b_2$

3. Ableitungen in DGL  
 $2b_2 + 4(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = x^2$

4. Koeffizienten Vergleich  
 $(2b_2 + 4b_0) + (4b_1)x + (4b_2)x^2 = (1)x^2 + (0)x + 0$

5. Gleichungssystem lösen

$$\begin{cases} 2b_2 + 4b_0 = 0 \\ 4b_1 = 0 \\ 4b_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = -\frac{1}{8} \\ b_1 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

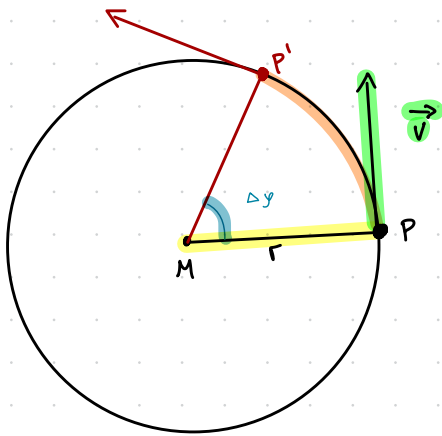
5. Spezielle-Lösung: Koeffizienten in Ansatz

$$y_s = -\frac{1}{8} + 0 \cdot x + \frac{1}{4} \cdot x^2$$

$$= \frac{1}{4} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right)$$

# Kreisbewegungen (gleichförmig)

Noah Wuhrmann



$\vec{v}$  = Konstant (weil gleichförmig)

$$|\vec{v}| = v = \frac{u}{T} \quad \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$\Delta \varphi$  = Winkel

$\Delta s$  = Bogenstück

$\Delta t$  = Zeitspanne

$r$  = Radius  $\left[ \text{m} \right]$

## Periodendauer / Umlaufdauer $\left[ \text{s} \right]$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

## Frequenz $\left[ \text{Hz} \right] \left[ \frac{1}{\text{s}} \right] \left[ \text{s}^{-1} \right]$

$$f = \frac{1}{T} \quad (f = n)$$

## Drehzahl

$$n = \frac{u}{\text{min}} ; \frac{1}{\text{min}} ; \frac{1}{\text{s}} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

## Zentripetalkraft

$$\begin{aligned} F_{\text{zp}} &= \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2 \\ &= m \cdot a_{\text{zp}} = \frac{m \cdot (\omega \cdot r)^2}{r} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{F_{\text{zp}} \cdot r}{m}} = \omega \cdot r$$

$$r = \frac{m \cdot v^2}{F_{\text{zp}}}$$

## Zentripetalbeschleunigung

$$a_{\text{zp}} = \frac{v^2}{r} = \frac{F_{\text{zp}}}{m} = \frac{\frac{m^2}{\text{s}^2}}{m} = \frac{m}{\text{s}^2} = \omega^2 \cdot r$$

## Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = \frac{v}{r}$$

$$\left[ \omega \right] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} ; \frac{1}{\text{s}} ; \text{s}^{-1}$$

$$v = \omega \cdot r$$

## Bahngeschwindigkeit $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

$$v = \frac{u}{T} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$= 2\pi \cdot r \cdot f = \sqrt{a_{\text{zp}} \cdot r}$$

Taschenrechner auf rad umstellen!

## Periodendauer / Umlaufdauer [s]

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(Wie viel Zeit für eine vollständige Bewegung (bis zur Wiederholung))

## Frequenz [Hz] $\left[\frac{1}{s}\right]$ $[s^{-1}]$

$$f = \frac{1}{T} \quad (f = n)$$

(Wie schnell die Wiederholungen aufeinander folgen)

## Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = \frac{v}{r}$$

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{s} ; \frac{1}{s} ; s^{-1}$$

$$v = \omega \cdot r$$

Schwingung = regelmäßige Bewegung um einen festen Punkt = sind Bewegungen

Wellen = Störungen die durch ein Medium ausbreiten = übertragen Bewegungen

Rückstellkraft

$$F = D \cdot s$$

$\Delta$  Strecke [m]

Federkonstante  
[N/m]

Hooke'sches Gesetz = harmonische Schwingung = Sinus

$$F = -D \cdot s$$

## Harmonische Schwingung

(Elongation)

Auslenkung = Momentane Entfernung zur Ruhelage

Amplitude = Maximale Entfernung zur Ruhelage

$$y(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad "T" \text{ gegeben}$$

$$y(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \quad "f" \text{ gegeben}$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Winkelgeschwindigkeit  
Phasenwinkelgeschwindigkeit  
„Kreisfrequenz“

$$\begin{pmatrix} v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$$

## Schwingungszeit Federpendel

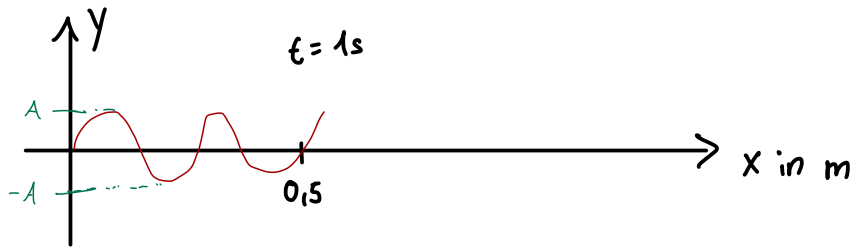
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

## Schwingungszeit Mathematischer Pendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

# Wellen

$L$  = Länge der Saite  
 $\lambda$  = Wellenlänge in [m]

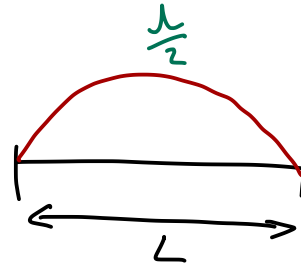
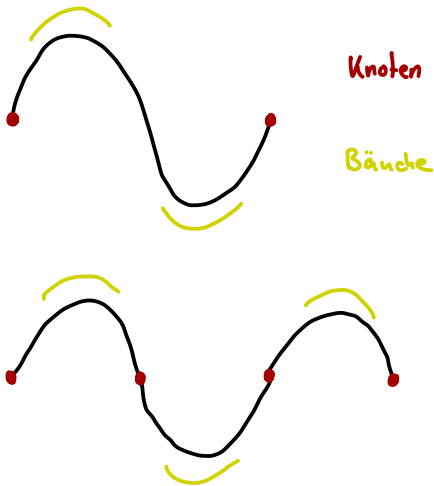


allgemein:

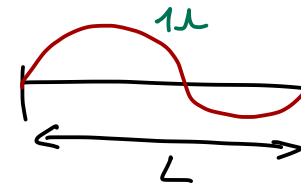
$n$  = Anzahl Bäuche

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

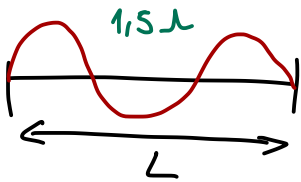
$n = 1, 2, 3 \dots$



$$L = \frac{\lambda}{2}$$



$$L = \lambda$$



$$L = 1,5 \lambda$$

## Stehende Welle

Zwei Wellen mit gleicher Frequenz treffen aufeinander  
 Knoten bleiben stehen Bäuche gehen auf und ab

## Ausbreitungsgeschwindigkeit $\left[ \frac{m}{s} \right]$

$$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$$

## Interferenz

[Hz]  $\left[ \frac{1}{s} \right]$   $[s^{-1}]$

$$f_{\text{res}} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$$f_{\text{schweb}} = |f_1 - f_2|$$

## Wellengleichung

$\lambda$  &  $T$  einsetzen!

$$y(t, x) = A \cdot \sin \left( \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \frac{2\pi \cdot t}{T} \right)$$

## Winkel in Bogenmass

$$\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$

## Winkel im Gradmass

$$\alpha = \frac{\alpha \cdot 180}{\pi}$$

## Grundgerüst 2. Ableitung

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dy} (f(x,y)) \right)$$

## 2. Integrale

$$\int \int f(x,y) dx dy$$

## Partielle Ableitungen

Bsp:

$$f(x,y) = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y^4 + y$$

Fertig

1. partielle Ableitung: 1. Ordnung

$$f_x = \frac{d}{dx} (f(x,y))$$

$$3 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y^4$$

$$f_y = \frac{d}{dy} (f(x,y))$$

$$12 \cdot y^3 \cdot x^2 + 1$$

2. partielle Ableitungen: 2. Ordnung

↳ Hesse-Matrix

$$f_{xx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} (f(x,y)) \right)$$

$$6 \cdot x + 6 \cdot y^4$$

$$f_{yy} = \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dy} (f(x,y)) \right)$$

$$36 \cdot y^2 \cdot x^2$$

$$f_{xy} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dy} (f(x,y)) \right)$$

$$24 \cdot x \cdot y^3$$

$$f_{yx} = \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dx} (f(x,y)) \right)$$

$$24 \cdot y^3 \cdot x$$

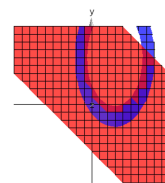
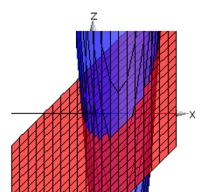
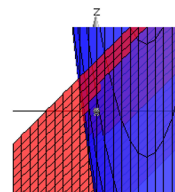
## Lagrange

$$F(x,y) = 3x^2 + y^2 - 9x - 6y + 1$$

Zielfunktion

$$G(x,y) = x + y - 2$$

Nebenbedingung



Eine nach oben geöffnete Parabel kann also nur 1 Minimum haben  
geht nach  $+\infty$

## GERADEN-GLEICHUNG

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad 2D$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad 3D$$

a, b, c = Schnittpunkte der jeweiligen Achse

|     |   |    |                      |                      |                      |     |
|-----|---|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----|
| sin | x | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90° |
|     | y | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1   |
| cos | x | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90° |
|     | y | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0   |
| tan | x | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90° |
|     | y | 0  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | ↗   |

|                                   |
|-----------------------------------|
| $45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$   |
| $90^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$   |
| $135^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ |
| $180^\circ = \sqrt{2}$            |
| $225^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ |
| $270^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ |
| $315^\circ = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ |
| $360^\circ = 2\sqrt{2}$           |



# Integrieren

| $f(x)$                                     | $F(x)$                              |
|--------------------------------------------|-------------------------------------|
| $x^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ , $n \neq -1$ ) | $\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$       |
| $c \cdot u(x)$                             | $c \cdot U(x)$                      |
| $u(x) + v(x)$                              | $U(x) + V(x)$                       |
| $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ( $x \neq 0$ )      | $\ln x $ ( $x \neq 0$ )             |
| $e^x$                                      | $e^x$                               |
| $a^x$ ( $a > 0$ )                          | $\frac{a^x}{\ln(a)}$                |
| $\ln(x)$ ( $x > 0$ )                       | $x \cdot \ln(x) - x$ ( $x > 0$ )    |
| $\log_a(x)$                                | $\frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)}$ |

Bsp 1:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{x+2} = \ln|x+2|$$

$$\int e^{f(x)} dx = \frac{1}{f'(x)} \cdot e^{f(x)} + C,$$

Bsp 2:

$$\int (x-2)^{-2} \cdot dx \rightarrow \text{analog zu } x^n = \frac{1}{-2+1} \cdot (x-2)^{-2+1} = \underline{\underline{-(x-2)^{-1}}}$$

|                    |                  |
|--------------------|------------------|
| $\cos(x)$          | $\sin(x)$        |
| $\sin(x)$          | $-\cos(x)$       |
| $\tan(x)$          | $-\log \cos(x) $ |
| $\frac{1}{1+x^2}$  | $\arctan(x)$     |
| $\frac{1}{1-x^2}$  | $\arcsin(x)$     |
| $\frac{-1}{1-x^2}$ | $\arccos(x)$     |

|                |                                  |
|----------------|----------------------------------|
| $f(x+h)$       | $F(x+h)$                         |
| $f(x \cdot k)$ | $\frac{1}{k} \cdot F(x \cdot k)$ |

Bsp:

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow F(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \cos(3x) \rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x)$$

# Ableiten

| Funktion $f(x)$             | Ableitung $f'(x)$                                        |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------|
| Potenzfunktion              | $x^n \rightarrow nx^{n-1}$                               |
| Trigonometrische Funktionen | $\sin x \rightarrow \cos x$ ( $-\sin(x)^*$ )             |
|                             | $\cos x \rightarrow -\sin x$ ( $-\cos(x)^*$ )            |
|                             | $\tan x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$   |
|                             | $\cot x \rightarrow -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ |
| Arkusfunktionen             | $\arcsin x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$           |
|                             | $\arccos x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$          |
|                             | $\arctan x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$                  |
|                             | $\text{arccot } x \rightarrow -\frac{1}{1+x^2}$          |
| Exponentialfunktionen       | $e^x \rightarrow e^x$                                    |
|                             | $a^x \rightarrow (\ln a) \cdot a^x$                      |
| Logarithmusfunktionen       | $\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$                          |
|                             | $\log_a x \rightarrow \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$         |

✓ Ableitung von  $e^{f(x)}$ :

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

## Ableitung ohne Verwendung der Regeln

$$c = f'(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

↓  
Funktion einsetz.  
und vereinfachen  
↓  
 $h=0$   
setzen & ableiten

Bsp:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{x^2 - (x+h)^2}{hx^2(x+h)^2}$$

Daraus folgt

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

z.B.  $f(x) = \sin(x)$   $g(x) = 2x$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \underline{\underline{\sin(2x)}}$$

# Ableitungsregeln

## Quotientenregel

Die **Quotientenregel** ist eine Methode, um die Ableitung eines Bruchs (eines Quotienten zweier Funktionen) zu berechnen. Wenn du eine Funktion in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Bsp. ①  $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$u(x) = x$$

$$v(x) = x-1$$

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = 1$$

hast, berechnest die Quotientenregel die Ableitung von  $f(x)$  wie folgt:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Bsp. ②

$$f'(x) = \frac{(1)(x-1) - (x)(1)}{(x-1)^2}$$

## Produktregel

Die Produktregel lautet:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

z.B.

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x)$$

## Doppelwinkelform

für das "Vereinfachen"

**Sinus:**  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$

**Kosinus:**  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

## Kettenregel

Die Ableitung einer aus den beiden (elementaren) Funktionen  $y = F(u)$  und  $u = u(x)$  zusammengesetzten (verketteten) Funktion  $y = F(u(x)) = f(x)$  ist das Produkt aus der äußeren und der inneren Ableitung (sog. Kettenregel):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad f'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

Bezeichnungen

$$\left. \begin{array}{l} y = F(u): \text{Äußere Funktion} \\ u = u(x): \text{Innere Funktion} \end{array} \right\} y = F(u(x)) = f(x)$$

$$\frac{dy}{du} = F'(u): \text{Äußere Ableitung (Ableitung der äußeren Funktion)}$$

$$\frac{du}{dx} = u'(x): \text{Innere Ableitung (Ableitung der inneren Funktion)}$$

Bsp.:

$$f(x) = \ln(x^3 - 1)$$

$$u(x) = x^3 - 1 \rightarrow u'(x) = 3x^2$$

$$F(u) = \ln(u) \rightarrow F'(u) = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^3 - 1}$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot F'(u) = 3x^2 \cdot \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$

## Pyth. Identität

Pythagoras-Identität:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Umstellungen:

1. Nach  $\sin^2(x)$ :

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

2. Nach  $\cos^2(x)$ :

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

## Summenform in faktorisierte Form umwand.

• **Lineare Summe:**

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

• **Quadratische Summe:**

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

• **Konstante Summe:**

$$\sum_{k=1}^n c = c \cdot n$$

(wobei  $c$  eine Konstante ist).

Bsp.:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (3 \cdot k^2 + 2 \cdot k + 4)$$

Lösung:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4$$

Quadratisch

Linear

Konstant

$$3 \cdot \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] + 2 \cdot \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right] + [4n]$$

Linear

$$f: y = m \cdot x + q$$

Bestimmung von Geraden aus 2 Punkten

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

$\textcircled{2} \quad q = \text{Punkt in Funktion einsetzen}$

Quadratisch

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

Bestimmung von Parabeln aus 3 Punkten

(Scheitelpunkt zählt doppelt)

$\textcircled{1} \quad \text{Gleichungssystem aufstellen \& lösen}$

$\textcircled{1} \quad \text{Wenn } S \text{ gegeben: } S \text{ in S-Punktform einsetzen, nach } a \text{ umstellen}$

$\textcircled{2} \quad 2. \text{ gegebener Punkt einsetzen}$

Zueinander senkrecht stehende Gerade

$\textcircled{1} \quad \text{Kehrwert: z.B. } 1 = \frac{1}{1}$

$$\frac{5}{2} = \frac{3}{5}$$

$\textcircled{2} \quad \text{Vorzeichen ändern } -\frac{1}{1}$

$$-\frac{2}{5}$$

Normalform

$$f: y = x^2$$

Scheitelpunkt

$$x_s = \frac{-b}{2a}$$

$y_s = x_s$  einsetzen in Funktion  
 $(c - \frac{b^2}{4a})$

Scheitelpunktform

$$f: y = a(x-u)^2 + v$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $x \quad y$

$S(u|v)$   
 $\downarrow$   
Scheitelpunkt

$$a(u-x)^2 + v$$

Die Vorzeichen wurden  
gedreht, aber nichts  $\neq$  geändert

Wenn Normalform gefragt

Ausrechnen z.B.:  $y = -2(x+1)^2 + 2 \rightarrow y = -2x^2 - 4x$

Nullstelle/n

dort wo Parabel durch x geht  
wo  $y=0 \rightarrow$  lösen einer GGL

Nullstellen - / Produktform allgemein

$$f: y = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$p: y = x^2 - 6x + 8$$
$$(x-4)(x-2)$$

Spiegeln

$\textcircled{1} \quad \text{Scheitelpunkt definieren}$

$\textcircled{2} \quad \Delta \text{ zum gegebenen Punkt mal } 2 - \text{Punkt}$

$\textcircled{3} \quad a = \text{mal } -1$

Schnittpunkt

$\textcircled{1} \quad \text{gleichsetzen}$

$\textcircled{2} \quad \text{nach } 0 \text{ umstellen}$

$\textcircled{3} \quad x \text{ einsetzen in Funktion}$

Betragsfunktion

$$a|x-u|+v$$

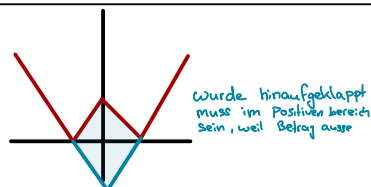
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
Steigung  $x \quad y$



$K(u|v)$   
 $\downarrow$   
Knickpunkt

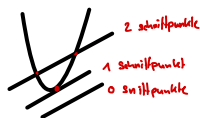
Betragsfunktion W-Form

$$|a|x-u|+v|$$



wurde hinaufgeklappt  
muss im positiven Bereich  
sein, weil Betrag ausgeht

Tangenten Berühren die Parabel  
(nicht schneidend)



2 Schnittpunkte  
1 Schnittpunkt  
0 Schnittpunkte

2 Tangenten wenn Punkt außerhalb Parabel

1 Tangente wenn Punkt auf Parabel

0 Tangenten wenn Punkt innerhalb Parabel

Tangente - Formel

$\textcircled{1} \quad \text{Schnittgleichung } p \cap l, \text{ nach } 0 \text{ umstellen}$

$\textcircled{2} \quad b^2 = 4ac$

$\textcircled{3} \quad 0 \text{ setzen, da Diskriminante } 0 \text{ sein muss}$

$\textcircled{4} \quad \text{Tangente in Schnittgleichung einsetzen um Punkt zu erhalten}$